



УДК 539.3

А. В. Михеев

## Влияние краевого закрепления на локальную устойчивость цилиндрических оболочек с наполнителем

*Рассматривается вопрос о локальной устойчивости цилиндрической оболочки средней длины с упругим наполнителем при трех способах закрепления на краях: жесткая заделка с обоих концов, шарнирное опирание и жесткая заделка, шарнирное опирание с обоих концов. Анализируется зависимость параметра нагружения от параметра жесткости наполнителя для трех типов закрепления в случае цилиндрической оболочки с сечением в форме эллипса.*

### Цилиндрические оболочки, граничные условия, расчет устойчивости

Актуальность исследований напряженно-деформированного состояния, упругой устойчивости и динамики конструкций, состоящих из тонкостенной оболочки и закрепленного в ее полости деформируемого массива, обусловлена их широким применением в современной технике. Характерным примером таких конструкций служит оболочка цилиндрической формы с центральным каналом, заполненным упругим материалом (наполнитель). Для описания такой системы используются как двумерные, так и трехмерные теории оболочек. В [1] описывается локальная теория устойчивости цилиндрических оболочек без наполнителя при осевом сжатии, внешнем давлении и кручении. Статья [2] посвящена применению локальной теории устойчивости оболочек модели Кирхгофа–Лява к исследованию критической нагрузки. В [3] рассматривается влияние сдвига на устойчивость цилиндрической оболочки при осевом сжатии и кручении. Обширное описание различных подходов к исследованию устойчивости оболочек с наполнителем, в том числе цилиндрической формы, дается в [4]. Численные методы расчета устойчивости цилиндрических оболочек при различных типах нагружения изложены в [5]. Цель данной статьи – используя аппарат локальной теории устойчивости оболочек, исследовать влияние различных типов краевого закрепления на устойчивость цилиндрической оболочки с упругим наполнителем.

**Постановка задачи.** Рассматривается задача о потере устойчивости цилиндрической оболочки средней длины модели Кирхгофа–Лява с однородным наполнителем под действием сил осевого сжатия. Края оболочки считаются закрепленными одним из трех способов: жесткая заделка с обоих концов (З-З); жесткая заделка и шарнирное опирание (З-Ш), шарнирное опирание с обоих концов (Ш-Ш). Предполагаются справедливыми гипотезы так называемого локального подхода [1], что позволяет использовать в качестве инструмента исследований систему уравнений пологих оболочек.

**Система уравнений устойчивости для цилиндрической оболочки.** Введем ортогональную систему координат  $s$ ,  $\varphi$  на срединной поверхности оболочки (рис. 1).

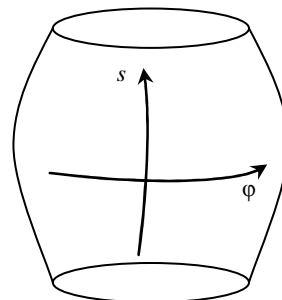


Рис. 1

Согласно [1], [2] система уравнений устойчивости пологих оболочек на упругом основании имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \Delta \Delta w + \lambda \varepsilon^2 \Delta_t w - \Delta_k \Phi - p / R &= 0, \\ \varepsilon^4 \Delta \Delta \Phi + \Delta_k \Phi &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$p = -cq w; \quad c = \frac{E_0}{E} \frac{R}{h \varepsilon^4} \frac{2(1-\nu_0)}{(1+\nu_0)(3-4\nu_0)};$$

$$\varepsilon^8 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2},$$

$p$  – реакция заполнителя;  $q$  – волновое число в окружном направлении;  $w$  – нормальный прогиб,  $\Phi$  – функция усилий;  $h$  – толщина оболочки;  $R$  – характерный радиус кривизны срединной поверхности,  $E_0, \nu_0$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона заполнителя;  $E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона оболочки;

$$\Delta_t = t_1 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + 2t_3 \frac{\partial^2}{\partial s \partial \phi} + t_2 \frac{\partial^2}{\partial \phi^2};$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}; \quad \Delta_k = k(\phi) \frac{\partial^2}{\partial s^2};$$

$$(T_1^0, T_2^0, S^0) = -\lambda E h \varepsilon^6 (t_1, t_2, t_3), \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon \lambda_1 + \dots,$$

где  $(T_1, T_2, S_0)$  – начальные усилия;  $(t_1, t_2, t_3)$  – безразмерные начальные усилия;  $\lambda$  – параметр нагружения;  $k(\phi)$  – кривизна срединной поверхности оболочки в зависимости от угловой координаты.

#### Решение системы уравнений устойчивости.

Решение системы уравнений (1) ищем в виде

$$w(s, \phi) = w_0(s) e^{iq\phi/\varepsilon}, \quad \Phi(s, \phi) = \Phi_0(s) e^{iq\phi/\varepsilon}.$$

Краевая задача в нулевом приближении состоит из уравнений

$$(cq + q^4 - \lambda_0 q^2) w_0(s) - k(\phi) \frac{\partial^2 \Phi_0(s)}{\partial s^2} = 0, \quad (2)$$

$$k(\phi) \frac{\partial^2 w_0(s)}{\partial s^2} + q^4 \Phi_0(s) = 0$$

и граничных условий на краях  $s = 0, s = l$ , которые в зависимости от способа закрепления имеют вид

$$w_0(0) = w'_0(0) = w_0(l) = w'_0(l) = 0 \quad (3-3);$$

$$w_0(0) = w'_0(0) = w_0(l) = w''_0(l) = 0 \quad (3-Ш);$$

$$w_0(0) = w''_0(0) = w_0(l) = w''_0(l) = 0 \quad (Ш-Ш).$$

Из системы (2) получим:

$$\frac{\partial^4 w_0(s)}{\partial s^4} - \alpha^4 w_0(s) = 0, \quad \alpha^4 = -\frac{q^8 + cq^5 - \lambda_0 q^6}{k^2(\phi)}. \quad (3)$$

Используя результаты, найденные в [1], решим задачу (3) в функциях Крылова. Если на обоих краях оболочки заданы условия жесткой заделки, то

$$w_0(s) = \frac{\cos(\alpha \xi)}{\cos(\alpha/2)} - \frac{\text{ch}(\alpha \xi)}{\text{ch}(\alpha/2)},$$

$$\Phi_0(s) = \sqrt{\frac{1}{3}} \left( \frac{\cos(\alpha \xi)}{\cos(\alpha/2)} + \frac{\text{ch}(\alpha \xi)}{\text{ch}(\alpha/2)} \right), \quad (4)$$

$$\alpha = 4.73, \quad \xi = s/l - 1/2.$$

Если на краю  $s = 0$  заданы условия жесткой заделки, а на краю  $s = l$  – условия шарнирного опирания, то

$$w_0(s) = \frac{\sin(\alpha \xi)}{\sin(\alpha)} - \frac{\text{sh}(\alpha \xi)}{\text{sh}(\alpha)},$$

$$\Phi_0(s) = \sqrt{\frac{1}{3}} \left( \frac{\sin(\alpha \xi)}{\sin(\alpha)} + \frac{\text{sh}(\alpha \xi)}{\text{sh}(\alpha)} \right), \quad (5)$$

$$\alpha = 3.92, \quad \xi = s/l.$$

Если же на обоих краях заданы условия шарнирного опирания, то

$$w_0(s) = \sqrt{2} \cdot \sin(\alpha \xi), \quad \Phi_0(s) = \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\alpha \xi), \quad (6)$$

$$\alpha = \pi, \quad \xi = s/l.$$

В (4)–(6)  $\alpha$  является наименьшим собственным значением задачи (3). Выразив нулевое приближение параметра нагружения  $\lambda_0$  из второго уравнения (3), получим:

$$\lambda_0 = q^2 + \frac{c}{q} + \frac{\alpha^4 k^2(\phi)}{q^6}. \quad (7)$$

Критическое значение параметра  $\lambda_0$  находится минимизацией правой части равенства (7) по волновому числу  $q$ .

**Влияние закрепления краев на устойчивость цилиндрической оболочки с сечением в форме эллипса.** Рассмотрим оболочку цилиндрического типа, сечение которой имеет вид эллипса с полуосями  $a_0, b_0$  (рис. 2).

Тогда

$$k(\phi) = \frac{(\sin^2 \theta + \delta^2 \cos^2 \theta)^{3/2}}{\delta^2}, \quad \delta = \frac{b_0}{a_0},$$

где  $k(\phi)$  – кривизна поверхности в зависимости от угловой координаты;  $\theta$  – угол между полуосью  $0b_0$  и нормалью к поверхности ( $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ).

Наиболее слабой точкой будет  $\theta_0 = 0$  при  $a_0 > b_0$

и  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  при  $a_0 < b_0$ . Минимизируя правую

часть уравнения (7) по параметру  $q$ , получим зависимость критического значения нулевого приближения параметра нагружения  $\lambda_0$  от параметра относительной жесткости заполнителя  $c$  в наиболее слабой точке (рис. 3).

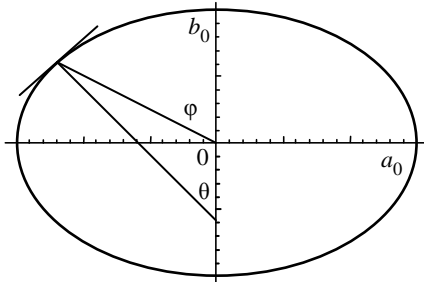


Рис. 2

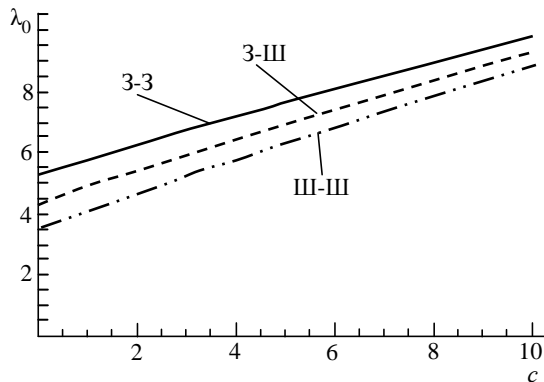


Рис. 3

Зависимость критического значения первого приближения  $\lambda_1$  параметра нагружения  $\lambda$  от параметра относительной жесткости заполнителя  $c$  представлена на рис. 4.

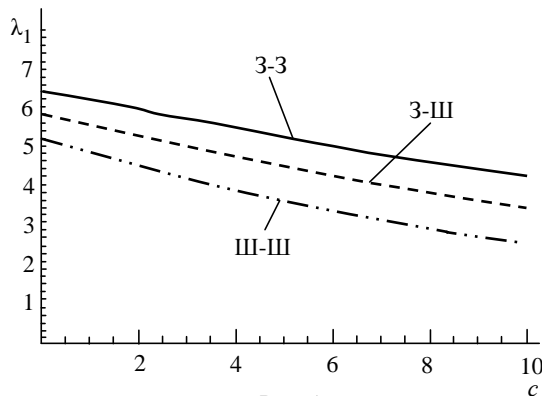


Рис. 4

Согласно выражению критического значения параметра нагружения  $\lambda$ , данному в (3), построим график зависимости  $\lambda(c)$  при  $\nu=0.3$ ,  $h/R=1/400$  (рис. 5).

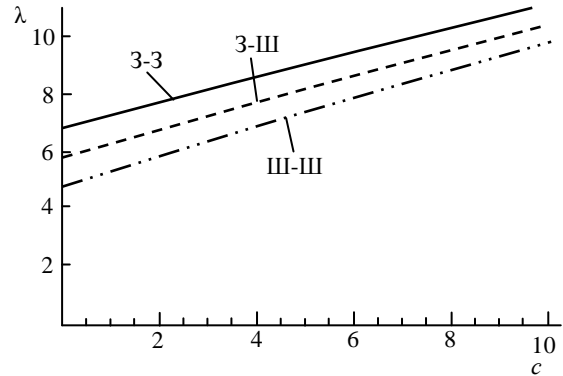


Рис. 5

Из графика, представленного на рис. 5, видно, что с увеличением параметра относительной жесткости заполнителя критическое значение параметра нагружения  $\lambda$  монотонно возрастает. В то же время асимптотическое поведение нулевого и первого приближений критического значения параметра нагружения противоположно: монотонное возрастание в первом случае (рис. 3) и монотонное убывание во втором (рис. 4). Как и следовало ожидать, наибольшее значение критической нагрузки при каждом значении жесткости заполнителя имеет место при жестком закреплении с обоих концов (3-3), а наименьшее – при условиях шарнирного опирания на обоих краях (Ш-Ш). Критическая нагрузка в случае шарнирного опирания с одного конца и жесткого закрепления с другого (3-Ш) всегда находится между вышеупомянутыми значениями.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Товстик П. Е. Устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 1995. 320 с.
2. Товстик П. Е. Локальная устойчивость пластин и пологих оболочек на упругом основании // Изв. РАН. 2005. Вып. 1. С. 147–160.
3. Михеев А. В. Влияние сдвига на локальную устойчивость пологих оболочек на упругом основании // Асимптотические методы в механике дефор-

- мируемого твердого тела: сб. тр., посвященных 70-летию проф. П. Е. Товстика. СПб.: ВВМ, 2006. С. 87–97.
4. Ильгамов М. А., Иванов В. А., Гулин Б. В. Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим заполнителем. М.: Наука, 1977. 332 с.
5. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.

A. V. Mikheev

## INFLUENCE OF BOUNDARY CONDITIONS ON LOCAL STABILITY OF CYLINDRICAL SHELLS WITH ELASTIC FILLING

*The question of local stability of cylindrical shells of medium length with elastic filling for three methods of fixing the edges: rigid fixing at both ends, rocker bearing - rigid fixing, rocker bearing at both ends is considered. The dependence of critical load parameter on the stiffness parameter for three types of boundary conditions in the case of a cylindrical shell with a cross section in the shape of an ellipse is analysed.*

**Cylindrical shells, stability, boundary conditions**

---

УДК 621.387.3

Е. А. Смирнов

## Динамические свойства тлеющего разряда в протяженных трубках

*Исследован импеданс тлеющего разряда в узких протяженных трубках, характерного для газоразрядных лазеров. Получено выражение для импеданса разряда с учетом падающего характера вольт-амперных характеристик, динамических свойств положительного столба и прикатодной области. Достигнуто удовлетворительное согласование расчетных и экспериментальных результатов.*

**Динамическое сопротивление, тлеющий разряд, положительный столб, прикатодная область разряда, вольт-амперная характеристика, годограф импеданса**

Тлеющий разряд в протяженных трубках широко используется в газоразрядных лазерах. Применение газоразрядных лазеров в промышленности и научных исследованиях – динамичное и перспективное направление, которое вносит весомый вклад в повышение эффективности научных исследований, открытие новых производств и техпроцессов, играет важную роль в повышении производительности труда и качества товаров.

При работе газоразрядного лазера его разрядный промежуток является нелинейным элементом токовой цепи. Падающая вольт-амперная характеристика (ВАХ), свойственная лазерам тлеющего разряда (ЛТР), не несет полной информации о возможном поведении разрядного промежутка в цепи внешних возмущений и собственных флуктуаций разрядного тока. В этом случае открытым остается и вопрос об устойчивости электрической цепи, содержащей разрядный промежуток ЛТР, например токовой цепи системы пассивной или активной стабилизации мощности излучения лазера [1]. Более полная информация о свойствах разряда ЛТР может быть получена при изучении его поведения в динамике. Здесь путем внешних периодических или аperiodических возмущений равновесного состояния разряда может быть изу-

чена картина явлений процессов, протекающих в разрядном промежутке, ответственных за его свойства в нестационарном режиме работы. Удобной характеристикой для таких исследований является полное сопротивление переменному току – динамическое сопротивление или импеданс разряда [2], [3].

При суммарных давлениях порядка 0.1...1 кПа и плотности тока на уровне  $10^{-3}$  А · мм<sup>-2</sup> процессы в положительном столбе ЛТР удовлетворительно описываются системой уравнений, состоящей из уравнения баланса заряженных частиц и уравнения непрерывности тока, на основе которой можно получить уравнение динамической вольт-амперной характеристики. Распределение электронов по энергиям предполагалось максвелловским, и скорость прямой ионизации описывалась экспоненциальной функцией [4]. Разрядные условия, реализуемые в ЛТР, соответствуют участку резкого падения ВАХ газового промежутка, когда имеет место переходная стадия от свободной диффузии электронов к амбиполярной. Это учитывалось по предложенной в [5] методике с помощью параметра  $k$ , зависящего от отношения скоростей электронов и ионов. При учете конечной скорости установления параметра  $k$  было получено