



УДК 530.1:621.313

Г. А. Борисов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Магнитное поле движущихся электрических зарядов¹

Согласно уравнениям Максвелла магнитное поле возникает при движении электрических зарядов (при наличии электрического тока) и при изменении во времени электрического поля. Показано, что и при наличии электрического тока истинной причиной появления магнитного поля также является переменное во времени электрическое поле.

Электрическое поле, магнитное поле, электромагнитное поле, электромагнитная взаимоиндукция, электрический заряд, электрический поток, магнитный поток

В первой части статьи [см. лит.] рассмотрен вариант приближения движущегося заряда $+q$ к выделенной нормальной плоскости, в которой, как и в других аналогичных плоскостях, индуцируются магнитные циркуляции с индукцией B , определяемой с помощью выражений (19). При этом по мере приближения заряда к выделенной плоскости индукция магнитных циркуляций увеличивается, достигая максимума при пересечении зарядом выделенной плоскости (20). После пересечения плоскости заряд удаляется от нее, причем если при приближении заряда к плоскости в индуцировании магнитных циркуляций участвовала правая половина шарового распределения электрического поля (силовых линий) заряда (см. рис. 2), то при удалении заряда индуцирование магнитных циркуляций происходит за счет временного изменения в плоскости левой половины шарового распределения электрического поля движущегося заряда. При этом направление силовых линий электрического поля меняется на противоположное по сравнению с вариантом приближения заряда к выделенной плоскости.

Зафиксируем удаляющийся от выделенной плоскости заряд $+q$ в точке 2 (см. рис. 3), расположенной от плоскости на расстоянии r_2 . По мере удаления заряда составляющая его электрического поля, пронизывающая выделенную нормальную плоскость, уменьшается, что приводит к

индуцированию в плоскости магнитных циркуляций с центрами, расположенными в общей точке O на траектории движения заряда (см. рис. 3). Рассмотрим в плоскости окружность с радиусом R . Значения напряженности E_2 электрического поля во всех точках рассматриваемой окружности одинаковы и равны

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r')^2}, \quad (24)$$

где r' – расстояние от любой точки рассматриваемой окружности до движущегося электрического заряда.

Из рис. 3 следует, что

$$r' = \sqrt{r_2^2 + R^2}. \quad (25)$$

Расстояние r' является радиусом шара, поверхность которого представляет собой геометрическое место точек с одинаковыми значениями напряженности $E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r')^2}$ электрического поля движущегося заряда. По мере удаления заряда $+q$ меняется r' , изменяется напряженность E_2 (24), оставаясь одинаковой во всех точках поверхности шара с радиусом r' и центром, совпадающим с движущимся зарядом. С изменением E_2 меняется электрический поток, охватываемый рассматриваемой окружностью с радиусом R .

¹ Окончание. Начало см. в № 1/2014.

По закону электромагнитной взаимной индукции окружность с радиусом R , охватывающая переменный электрический поток, становится циркуляцией (замкнутой силовой линией) индуцированного магнитного поля. Нормальная к направлению движения электрического заряда плоскость с рассматриваемой магнитной циркуляцией отсекает от шара с радиусом r' сегмент с основанием, равным площади круга, ограниченного циркуляцией, и высотой h_2 .

Электрический поток, обеспечивающий индуцирование рассматриваемой магнитной циркуляции,

$$\Phi_{E_{\text{ц}}} = \oint_{S_{\text{ц}}} E_{2n} dS_{\text{ц}}, \quad (26)$$

где E_{2n} – нормальная к выделенной плоскости составляющая напряженности электрического поля движущегося заряда в произвольной точке площади $S_{\text{ц}}$ круга, ограниченного рассматриваемой магнитной циркуляцией.

Электрический поток $\Phi_{E_{\text{ц}}}$, проходящий через площадь $S_{\text{ц}}$ круга, ограниченного циркуляцией, равен электрическому потоку $\Phi_{E_{\text{сег}}}$, проходящему через боковую поверхность $S_{\text{сег}}$ сегмента, т. е.

$$\Phi_{E_{\text{ц}}} = \oint_{S_{\text{ц}}} E_{2n} dS_{\text{ц}} = E_{2n_{\text{ср}}} S_{\text{ц}} = \Phi_{E_{\text{сег}}} = E_2 S_{\text{сег}}, \quad (27)$$

где $E_{2n_{\text{ср}}}$ – средняя нормальная к площади круга составляющая напряженности электрического поля. Напряженность E_2 одинакова во всех точках поверхности шара и боковой поверхности сегмента как части поверхности шара.

С учетом рис. 3 площадь круга и боковая поверхность сегмента соответственно

$$S_{\text{ц}} = \pi R^2; \quad (28)$$

$$S_{\text{сег}} = 2\pi r' h_2 = 2\pi r' (r' - r_2). \quad (29)$$

Из (27) находим:

$$E_{2n_{\text{ср}}} = E_2 \frac{S_{\text{сег}}}{S_{\text{ц}}}. \quad (30)$$

Решив совместно (24), (25) и (27)–(30), получаем:

$$\Phi_{E_{\text{ц}}} = \frac{q}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + R^2}} \right). \quad (31)$$

Из сравнения электрических потоков, участвующих в индуцировании магнитной циркуляции с радиусом R при приближении заряда к выделенной плоскости и удалении от нее (рис. 3), видно, что потоки имеют противоположные направления. С учетом противоположного направления потока $\Phi_{E_{\text{ц}}}$ относительно потока $\Phi_{E_{\text{кр}}}$ выражение (31) перепишем в виде

$$\Phi_{E_{\text{ц}}} = \frac{q}{2\varepsilon_0} \left(\frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + R^2}} - 1 \right). \quad (32)$$

В соотношении (32) расстояние r_2 от выделенной нормальной плоскости до удаляющегося электрического заряда $+q$ является переменной величиной, зависящей от времени t :

$$r_2 = vt. \quad (33)$$

Отсчет времени производится с момента прохождения зарядом выделенной плоскости. После подстановки (33) в (32) получаем:

$$\Phi_{E_{\text{ц}}} = \frac{q}{2\varepsilon_0} \left(\frac{r_2}{\sqrt{v^2 t^2 + R^2}} - 1 \right). \quad (34)$$

Переменный во времени электрический поток, охватываемый окружностью с радиусом R , индуцирует в выделенной нормальной к направлению движения заряда плоскости магнитную циркуляцию, совпадающую с указанной окружностью.

Используем математическое оформление (2) второй стороны закона электромагнитной взаимной индукции для рассматриваемого случая:

$$c^2 \oint_{L=2\pi R} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{d\Phi_{E_{\text{ц}}}}{dt}. \quad (35)$$

Так как все точки индуцированной магнитной циркуляции с радиусом R находятся в одинаковых электрических условиях, то для нее справедливо соотношение (17).

Правая часть уравнения (35) с учетом (25), (33) и (34)

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{E_{\text{ц}}}}{dt} &= \frac{qvR^2}{2\varepsilon_0 (v^2 t^2 + R^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{qvR^2}{2\varepsilon_0 (r_2^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{qvR^2}{2\varepsilon_0 (r')^3}. \end{aligned} \quad (36)$$

Из совместного решения (3), (17) и (36) получаем:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qvR}{(v^2 t^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qvR}{(r_2^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qvR}{(r')^3}. \quad (37)$$

Выражения (36) и (37) почти аналогичны выражениям (18) и (19). Отличие сводится к различию трактовок расстояний r_1 – от движущегося электрического заряда до выделенной плоскости и r_2 – от выделенной плоскости до удаляющегося от нее заряда. Циркуляции индуцированного магнитного поля B , описываемые соотношениями (37), подчиняются сформулированному выше правилу правого винта.

Если движущийся электрический заряд $+q$ рассматривать в положениях, одинаково удаленных от выделенной плоскости при приближении к ней и удалении от нее, т. е. при $r_1 = r_2$ и с учетом (8) и (25) $r = r'$, то скорость изменения электрического потока и индукция магнитных циркуляций математически представляются соответственно в виде

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{d\Phi_{E_{\text{кр}}}}{dt} = \frac{d\Phi_{E_{\text{ц}}}}{dt} = \frac{qvR^2}{2\varepsilon_0 r^3}, \quad (38)$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qvR}{r^3}. \quad (39)$$

С учетом изложенного механизм появления магнитного поля при движении электрического заряда в вакууме можно описать следующим образом.

В произвольной точке прямолинейной траектории движущегося положительного заряда q выделяем нормальную к направлению движения (к вектору скорости \mathbf{v}) заряда плоскость. Выделение такой плоскости разбивает движение заряда на два периода: приближение заряда к выделенной плоскости и удаление от нее. Между этими периодами существует важный, но очень кратковременный (практически мгновенный) промежуток прохождения зарядом выделенной плоскости.

Электрическое поле положительного заряда представляется в виде равномерно распределенных радиальных силовых линий, выходящих из заряда.

В случае приближения электрического заряда к выделенной плоскости слева направо индуцирование магнитных циркуляций в плоскости обеспечивается правой половиной распределения электрического поля заряда. При этом индукция магнитной циркуляции с радиусом R определяется с помощью выражения (19). По мере приближения заряда к выделенной плоскости (уменьшения r_1) индукция возрастает, достигая максимального значения (20) в момент прохождения зарядом плоскости ($r_1 = 0$). После этого заряд удаляется от выделенной плоскости и индуцирование магнитных циркуляций осуществляется за счет изменения левой половины распределения электрического поля заряда. При этом для определения индукции магнитной циркуляции следует использовать выражение (37). По мере удаления заряда от выделенной плоскости (увеличения r_2) индукция уменьшается. Направление индуцированных магнитных циркуляций на всех этапах движения электрического заряда устанавливается с помощью правила правого винта.

Таким образом, при движении электрического заряда с постоянной скоростью по всей его траектории индуцируются магнитные циркуляции, концентрически охватывающие траекторию движения заряда. Циркуляции, замыкающиеся в нормальной плоскости, проходящей через заряд, характеризуются максимальной индукцией. Справа и слева по траектории от заряда индуцируются циркуляции с меньшими значениями индукции, причем чем дальше от заряда, тем меньшую индукцию имеют циркуляции с одинаковым радиусом R . С увеличением радиуса значения индукции, характеризующие циркуляции, уменьшаются.

Рассмотрим в качестве примера магнитное поле электрона (позитрона), движущегося прямолинейно в вакууме с постоянной скоростью 10^8 м/с (100 000 км/с). Будем представлять радиусы R индуцированных магнитных циркуляций и расстояния r_1 и r_2 от рассматриваемых точек на траектории до движущегося электрона в долях его радиуса $r_e \approx 10^{-15}$ м. Электрический заряд электрона $q_e \approx 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Поскольку в примере магнитное поле оценивается только с количественной стороны, знак электрического заряда не учитывается. В табл. 2 приведены результаты расчетов магнитной индукции B по (19)

или (37). Так как соотношения (19) и (37) получены для точечного электрического заряда, радиус которого равен нулю, то при определении индукции циркуляций магнитного поля в нормальной плоскости, проходящей через движущийся электрон, принималось $r_1 = r_2 = 0$ ($r_1/r_e = r_2/r_e = 0$).

Как следует из таблицы, индукция циркуляции магнитного поля движущегося электрона в нормальной плоскости, проходящей через электрон, при радиусе циркуляции, превышающем радиус электрона в 10^6 раз, составляет 1,6 Тл, что соответствует значениям индукции, характерным для магнитных цепей электрических машин. При уменьшении и увеличении радиуса магнитной циркуляции в 10^4 раз индукция соответственно увеличивается и уменьшается относительно указанного значения в 10^8 раз. Индукция магнитных циркуляций с одинаковыми радиусами $R = 10^{-13}$ м при их удалении от движущегося электрона на каждые два порядка (10^2) уменьшается в 10^6 раз.

R/r_e	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}	10^2	10^2	10^2	10^2	10^2
$R, \text{ м}$	10^{-13}	10^{-11}	10^{-9}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}	10^{-13}
$r_1/r_e = r_2/r_e$	0	0	0	0	0	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}
$r_1 = r_2, \text{ м}$	0	0	0	0	0	10^{-13}	10^{-11}	10^{-9}	10^{-7}	10^{-5}
$B, \text{ Тл}$	$1,6 \cdot 10^8$	$1,6 \cdot 10^4$	1,6	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-8}$	$0,6 \cdot 10^8$	$1,6 \cdot 10^2$	$1,6 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-10}$	$1,6 \cdot 10^{-16}$

Обобщенное выражение (39) для индукции можно представить в другом виде, если учесть при $r_1 = r_2$ соотношение (см. рис. 3)

$$R = r \sin \alpha = r' \sin \alpha', \quad (40)$$

где α, α' – углы между прямолинейной траекторией движения заряда и соответственно радиусами-векторами r и r' , соединяющими соответственно движущийся заряд с любой точкой индуцированной магнитной циркуляции с радиусом R .

После подстановки (40) в (39) получаем:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qvr \sin \alpha}{r^3}. \quad (41)$$

Выражение (41) можно переписать в векторной форме:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q(\mathbf{v} \times \mathbf{r})}{r^3}. \quad (42)$$

Согласно (42) индукция магнитного поля движущегося прямолинейно с постоянной скоростью v электрического заряда $+q$ пропорцио-

нальна векторному произведению вектора скорости v и радиуса-вектора r , проведенного от заряда к рассматриваемой точке M (рис. 4).

При использовании соотношения (42) необходимо помнить, что физической основой возникновения магнитного поля вокруг движущегося заряда является закон электромагнитной взаимной индукции, механизм действия которого применительно к указанному случаю рассмотрен при выводе соотношений (19), (37) и (39).

Как отмечается в электротехнической литературе формула (42) получена в результате *обобщения экспериментальных данных*. В предлагаемой работе она выведена *теоретически с помощью закона электромагнитной взаимной индукции*.

Изложенный материал о магнитном поле движущегося электрического заряда позволяет сделать вывод, что при движении заряда причиной появления магнитных циркуляций в какой-либо конкретной нормальной плоскости является изменение во времени составляющей электрического поля (электрического потока) заряда, пронизывающей эту плоскость. Очевидно, и причи-

ной магнитного поля электрического тока как упорядоченного движения электрических зарядов также является переменное электрическое поле.

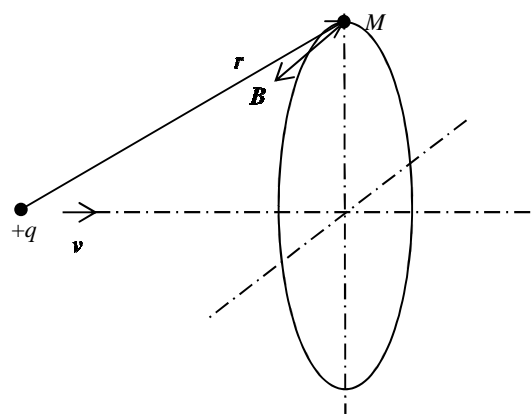


Рис. 4

Рассмотрим прямолинейный цилиндрический проводник с радиусом a , по которому протекает постоянный ток I . Естественно, указанный проводник должен представлять собой участок замкнутой электрической цепи с тем же током.

Для индуцирования магнитных циркуляций необходим охват ими переменного электрического потока. Поэтому, как и в случае определения магнитного поля движущегося электрического заряда, при оценке магнитного поля проводника с током следует выделять нормальную к направлению движения зарядов плоскость, для которой и рассматривать процесс индуцирования магнитных циркуляций. В выделенной нормальной плоскости находится одно из сечений проводника с током. Необходимо отметить, что при протекании тока по проводнику все нормальные плоскости со своими сечениями проводника находятся в одинаковых электрических условиях. Поэтому количественная оценка индуцированных магнитных циркуляций для одной нормальной плоскости количественно определяет магнитное поле всего проводника.

Электрический ток в проводнике

$$I = dQ/dt, \quad (43)$$

где dQ – электрический заряд, проходящий через сечение S проводника за время dt .

Применив выражение (4) для рассматриваемого случая, представляем электрический поток от заряда dQ , проходящий через сечение проводника, в виде

$$d\Phi_E = dQ/\varepsilon, \quad (44)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость проводящей среды с током.

Из совместного решения (43) и (44) получаем:

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \frac{I}{\varepsilon}. \quad (45)$$

Если считать диэлектрическую ε и магнитную μ проницаемости проводящей среды с током постоянными, то для рассматриваемого случая можно использовать математическое описание (2) второй стороны закона электромагнитной взаимоиндукции:

$$\frac{1}{\varepsilon\mu} \oint_{2\pi R} \mathbf{B} d\mathbf{l} = \frac{d\Phi_E}{dt}, \quad (46)$$

где R – радиус магнитной циркуляции, индуцируемой в нормальной к оси проводника плоскости, проходящей через рассматриваемое сечение проводника. Индуцируемые в выделенной нормальной плоскости магнитные циркуляции представляют собой концентрические окружности с центром на оси проводника с током.

С учетом (45) из (46) находим:

$$B = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{R}. \quad (47)$$

Если проводник с током имеет цилиндрическую форму с радиусом a и находится в воздухе, то при $R \geq a$ с учетом (47) индукция магнитной циркуляции с радиусом R

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{R}, \quad (48)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная проницаемость воздуха.

При $R \leq a$ ток, охватываемый циркуляцией,

$$I' = j\pi R^2 = I \frac{R^2}{a^2}, \quad (49)$$

где $j = I/(\pi a^2)$ – плотность тока в проводнике.

Из совместного решения (47) при $I = I'$ и (49) получаем индукцию магнитных циркуляций в проводящей среде с током:

$$B = \frac{\mu}{2\pi} \frac{IR}{a^2}. \quad (50)$$

При $R = a$ согласно (48)

$$B_{a1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a}, \quad (51)$$

с учетом (50)

$$B_{a2} = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{a}. \quad (52)$$

Решив совместно (51) и (52), имеем:

$$\frac{B_{a1}}{B_{a2}} = \frac{\mu_0}{\mu}. \quad (53)$$

Из (53) следует, что при $\mu \neq \mu_0$ индукция магнитного поля на поверхности проводника с током испытывает скачок. Это объясняется реакцией материала проводника (например, стали) на индуцированное в нем магнитное поле при протекании электрического тока. Реакция обусловлена действием появившегося собственного магнитного поля проводника после индуцирования в нем магнитного поля.

Таким образом, на уровне вещественного состояния материи истинной причиной появления магнитных циркуляций является электрический поток, изменяющийся во времени по закону (38) при движении отдельного электрического заряда, и по закону (45) при наличии электрического тока. В обоих случаях плоскости, перпендикулярные направлению движения зарядов, пронизыва-

ются переменным электрическим потоком и в них по закону электромагнитной взаимоиנדукции индуцируются магнитные циркуляции.

Из вышеизложенного следует вывод: в природе существует одна причина появления (один источник) магнитного поля – это *переменное во времени электрическое поле*. Однако на уровне *полевого* состояния материи изменяющееся во времени электрическое поле является *вихревым*, на уровне же *вещественной* материи – *потенциальным*. В последнем случае изменение во времени потенциального электрического поля всегда связано с движением электрических зарядов (электрическим током). Сам факт движения зарядов как бы затеняет истинную причину возникно-

вения магнитного поля. Математическое описание магнитного поля (магнитных циркуляций) с использованием электрического тока получается более простым и удобным, что необходимо учитывать в случае количественной оценки магнитных полей на уровне вещественной материи. Обычно так и поступают при расчете магнитных цепей электромагнитных устройств, используя закон полного тока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Борисов Г. А. Магнитное поле движущихся электрических зарядов // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014. № 1. С. 39–44.

G. A. Borisov

Saint-Petersburg state electrotechnical university «LETI»

MAGNETIC FIELD OF MOVING ELECTRIC CHARGES

According to Maxwell's equations the magnetic field arises at movement of electric charges (in the presence of an electric current) and at change in time of electric field. It is shown, as in the presence of an electric current the true reason of emergence of a magnetic field also is variable in time electric field.

Electric field, magnetic field, electromagnetic field, electromagnetic interinduction, electric charge, electric stream, magnetic stream