



УДК 62.001.63

Р. И. Сольницев

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

А. С. Малина

АО «Лаборатория Касперского»

Метод иерархического макро моделирования для анализа многомерных и многосвязных систем автоматического регулирования

Рассматривается применение метода иерархического макро моделирования для анализа многомерных и многосвязных систем автоматического регулирования. Под макро моделью понимается математическая модель, соответствующая основным параметрам проектируемого объекта. Одной из особенностей, характерной для сложных объектов, является наличие слабо связанных между собой подсистем. Для каждой подсистемы в явном виде выделяются входные и выходные фазовые координаты, подлежащие анализу, и варьируемые параметры регулирования. Исключение внутренних переменных из каждой подсистемы обеспечивает существенное сокращение количества уравнений исходной модели. Построение иерархических макро моделей для математических моделей таких объектов возможно за счет независимого построения макро моделей подсистем с последующим их объединением. Анализ проводится методом частотных характеристик на основе блочных иерархических макро моделей. Возможности и преимущества предлагаемого метода показаны на примере многомерной и многосвязной системы регулирования трехосного гиросtabilизатора.

Системы автоматизации проектирования, трехосный гироскопический стабилизатор, макро моделирование, методы иерархического макро моделирования, частотные характеристики, устойчивость, ЛАФЧ

При проектировании объектов сложной структуры, в том числе многомерных и многосвязных систем автоматического регулирования, такую систему обычно разбивают на подсистемы, чтобы обеспечить возможность независимого рассмотрения подсистем, тем самым снижая трудоемкость и затраты вычислительных ресурсов при анализе, синтезе и расчетах проектируемых объектов. Однако при таком подходе часто не учитывается влияние важных для проектирования параметров, что приводит к многократным повторным вычислениям, выполняемым для каждой подсистемы в отдельности. Методам декомпозиции, в том числе понижения порядка системы уравнений, диакоптика посвящены работы [1]–[5].

Предлагаемый подход на основе блочно-иерархического макро моделирования позволяет получить весь вектор выходных фазовых координат и весь вектор варьируемых параметров параллельно. Макро модель представляет собой систему меньшей размерности, включающую только фазовые координаты, соответствующие задачам проектирования. При этом соответственно возрастает порядок системы по производным этих фазовых координат.

В [6], [7] рассмотрен процесс построения иерархических макро моделей применительно к схемотехническому проектированию электрических блоков. В данной статье этот метод распространяется на многосвязные и многомерные системы автоматического регулирования. При этом в зависимости от задач проектирования (оценка

устойчивости, точности, надежности и т. д.) удается значительно снизить трудоемкость и вычислительные затраты за счет выделения только «выходных» фазовых координат и варьируемых параметров.

Иерархические макромодели. Пусть задана математическая модель системы автоматического регулирования в виде системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. После преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях эту систему можно представить в алгебраической форме:

$$A(p)\bar{x}(p) = \bar{y}(p), \quad (1)$$

где $A(p)$ – полиномиальная матрица размера $N \times N$; $\bar{x}(p)$ – вектор фазовых координат исходной системы размерности N ; $\bar{y}(p)$ – вектор возмущающих входных воздействий размерности N ; p – оператор Лапласа.

Исходную модель можно представить в блочном виде в соответствии с задачей проектирования и интересующими выходными фазовыми координатами и входными возмущающими воздействиями:

$$\begin{bmatrix} A_{11}(p) & A_{12}(p, \bar{Q}) \\ A_{21}(p, \bar{Q}) & A_{22}(p, \bar{Q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Блочный вид матрицы сформирован таким образом, что вектор \bar{X}_2 – $(m \times 1)$ -вектор «внешних» переменных, отражающих соотношения типа «вход-выход», включает в себя интересующие проектировщика фазовые координаты; \bar{X}_1 – $(M \times 1)$ -вектор «внутренних» переменных модели ($M \gg m$, $m + M = N$); $\bar{Q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ – вектор варьируемых параметров; $p = j\omega$ ($j = \sqrt{-1}$, ω – круговая частота).

Математическая модель (2) после выделения только интересующих фазовых координат и варьируемых параметров преобразуется к виду

$$\begin{bmatrix} -A_{21}(p, \bar{Q})A_{11}^{-1}(p)A_{12}(p, \bar{Q}) + A_{22}(p, \bar{Q}) \end{bmatrix} \bar{X}_2 = \bar{Y}_2 - A_{21}(p, \bar{Q})A_{11}^{-1}(p)\bar{Y}_1. \quad (3)$$

Часто оказывается, что многомерные и многосвязные системы большой размерности в соответствии с физической сущностью проектируемого объекта необходимо разбить на подсистемы. В связи с этим математическую модель (1) также можно представить в виде соответствующей блочной матрицы:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_1(p, \tilde{Q}_1) & 0 & 0 & A_{1c(2)} \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{A}_n(p, \tilde{Q}_n) & A_{nc(2)} \\ A_{c1(2)} & \dots & A_{cn(2)} & A_{cc}(p, \bar{Q}_c) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{X}_{12} \\ \dots \\ \bar{X}_{n2} \\ \bar{X}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Y}_{12} \\ \dots \\ \tilde{Y}_{n2} \\ \bar{Y}_c \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $\tilde{A}_i(p, \tilde{Q}_i)$, $i = \overline{1, n}$ – матрица макромодели i -го блока, которая представляется в форме (3); \tilde{Q}_i – вектор варьируемых параметров макромодели i -го блока. Окаймление $A_{c1}, \dots, A_{cn}, A_{1c}, \dots, A_{nc}, A_{cc}(p, \bar{Q}_c)$ отражает связи между блоками.

По модели (4) можно построить иерархическую макромодель, исключив из нее переменные, отражающие связи между блоками.

Модель (4) может быть записана в виде

$$\begin{bmatrix} B_{11}(p, \bar{Q}) & B_{12} \\ B_{21} & A_{cc}(p, \bar{Q}_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{X}_M \\ \bar{X}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_M \\ \bar{Y}_c \end{bmatrix},$$

где

$$B_{11}(p, \bar{Q}) = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1(p, \tilde{Q}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{A}_n(p, \tilde{Q}_n) \end{bmatrix};$$

$$B_{12} = \begin{bmatrix} A_{1c(2)} \\ \dots \\ A_{nc(2)} \end{bmatrix}; B_{21} = [A_{c1(2)} \dots A_{cn(2)}];$$

$$\bar{Q} = [\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n]^T; \bar{X}_M = [\bar{X}_{12}, \dots, \bar{X}_{n2}]^T.$$

Так как окаймление матрицы отражает связи между подсистемами, то $\bar{Y}_c = \bar{0}$, тогда соответствующая иерархическая макромодель приобретает вид

$$[B_{11}(p, \bar{Q}) - B_{12}A_{cc}^{-1}(p, \bar{Q}_c)B_{21}] \bar{X}_M = \bar{Y}_M. \quad (5)$$

Предложенные метод и соответствующая методика позволяют также решать задачи упрощения полных математических моделей в соответствии с поставленными задачами проектирования [8].

Применение метода иерархических макромоделей к анализу устойчивости трехосного гиросtabilизатора. Трехосный гироскопиче-

ский стабилизатор (ТГС) представляет собой многомерную и многосвязную систему автоматического регулирования (эквивалентную многоконтурной электронной схеме). Описание трехосного гиросtabilизатора, его математическая модель, заданная в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а также числовые значения параметров модели приведены в [9], [10].

Математическая модель имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \left[A_1 + I_{дв1} + (B_2 + A_3 \sin^2 \theta + B_3 \cos^2 \theta) \cos^2 \psi + (C_3 + I_{дв3}) \sin^2 \psi \right] \ddot{\alpha}_1 + (h'_1 + h''_1 \sin^2 \psi) \dot{\alpha}_1 + \\
 & + (A_3 - B_3) \sin \theta \cos \theta \cos \psi \ddot{\alpha}_2 + h''_1 \sin \psi \dot{\alpha}_3 - I_{дв3} \sin \psi \ddot{\alpha}_3 - c(\delta_1 \cos \theta \cos \psi + \delta_2 \cos \psi \sin \theta) + \\
 & + M_{ст1} + M_{ст3} \sin \psi = M_{в1}; \\
 & (B_2 + A_3 \cos^2 \theta + B_3 \sin^2 \theta + I_{дв2}) \ddot{\alpha}_2 + h''_1 \dot{\alpha}_2 + (A_3 - B_3) \sin \theta \cos \theta \cos \psi \dot{\alpha}_1 + \\
 & + c(\delta_1 \sin \theta - \delta_2 \cos \theta) + M_{ст2} = M_{в2}; \\
 & (C_1 + I_{дв3}) \ddot{\alpha}_3 + h'_1 \sin \psi \dot{\alpha}_1 - C_3 \dot{\alpha}_1 \sin \psi - I_{дв1} \dot{\alpha}_1 \sin \psi + h''_1 \dot{\alpha}_3 - c\delta_3 + M_{ст3} = M_{в3}; \\
 & B\ddot{\beta}_1 + h'_2 \dot{\beta}_1 + B(\ddot{\alpha}_1 \sin \theta \cos \psi + \ddot{\alpha}_2 \cos \theta) - H(\dot{\alpha}_1 \cos \theta \cos \psi + \dot{\alpha}_2 \sin \theta) - H\dot{\delta}_1 = M_{в4}; \\
 & B\ddot{\beta}_2 + h'_2 \dot{\beta}_2 - B(\ddot{\alpha}_1 \cos \theta \cos \psi - \ddot{\alpha}_2 \sin \theta) + H(\dot{\alpha}_1 \sin \theta \cos \psi - \dot{\alpha}_2 \cos \theta) - H\dot{\delta}_2 = M_{в5}; \\
 & B\ddot{\beta}_3 + h''_2 \dot{\beta}_3 - B(\ddot{\alpha}_1 \cos \theta \cos \psi - \ddot{\alpha}_2 \sin \theta) - H(\dot{\alpha}_3 - \dot{\alpha}_1 \sin \psi) - H\dot{\delta}_3 = M_{в6}; \\
 & D\ddot{\delta}_1 + h'_3 \dot{\delta}_1 + c\delta_1 - D(\ddot{\alpha}_1 \cos \theta \cos \psi - \ddot{\alpha}_2 \sin \theta) - H(\dot{\alpha}_1 \sin \theta \cos \psi + \dot{\alpha}_2 \cos \theta) + H\dot{\beta}_1 = M_{в7}; \\
 & D\ddot{\delta}_2 + h'_3 \dot{\delta}_2 + c\delta_2 - D(\ddot{\alpha}_1 \cos \theta \cos \psi + \ddot{\alpha}_2 \cos \theta) + H(\dot{\alpha}_2 \sin \theta + \dot{\alpha}_1 \cos \theta \cos \psi) + H\dot{\beta}_2 = M_{в8}; \\
 & D\ddot{\delta}_3 + h'_3 \dot{\delta}_3 + c\delta_3 - D(\ddot{\alpha}_3 - \ddot{\alpha}_1 \sin \psi) + H\dot{\alpha}_2 \cos \theta \cos \psi + H\dot{\beta}_3 = M_{в9}; \\
 & M_{сти} = k_{с.сi} k_i(p) \beta; \\
 & k_i(p) = (1 - \tau_i p) / (1 + \tau_i p), \quad i = 1, 2, 3,
 \end{aligned} \tag{6}$$

где $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ – моменты инерции кардановых колец относительно соответствующих осей; A_3, B_3, C_3 – моменты инерции стабилизирующей платформы относительно соответствующих осей; B – момент инерции ротора вместе с кожухом относительно оси кожуха; D – момент инерции ротора вместе с кожухом относительно оси, параллельной оси стабилизации; $I_{дв1}, I_{дв2}, I_{дв3}$ – моменты инерции роторов стабилизирующих двигателей, приведенные к соответствующим осям стабилизации; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – углы стабилизации; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – углы прецессии; $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – углы поворота роторов гироскопов вместе с кожухом относительно осей, параллельных осям стабилизации; c – коэффициент жесткости оси кожуха; $M_{сти}$ – момент стабилизирующего двигателя; $k_{с.сi}$ – крутизна характеристики системы стабилизации; $k_i(p)$ – корректирующее звено ($i = 1, 2, 3$); τ_i – постоянная времени коррек-

тирующего звена системы стабилизации ($i = 1, 2, 3$); h'_1, h''_1, h'''_1 – суммарные удельные моменты сил вязкого трения в осях прецессии гироскопов; h'_2, h''_2, h'''_2 – удельные моменты сил вязкого трения в осях прецессии гироскопов; h'_3, h''_3, h'''_3 – удельные моменты сил вязкого трения гироскопов относительно осей, параллельных осям стабилизации; $M_{в1} - M_{в9}$ – возмущающие моменты в соот-

ветствующих осях; $\theta(t), \psi(t)$ – углы разворота стабилизированной платформы относительно внутренней и промежуточной осей ТГС соответственно.

Числовые значения параметров ТГС при $\theta = \psi = 0$:

$$\begin{aligned}
 & A_1 = 0.51 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; H = 1.47 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}; \\
 & A_3 = 0.081 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; B_3 = 0.088 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\
 & B_2 = 0.076 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; C_3 = 0.1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\
 & B = 0.46 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; D = 0.68 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\
 & h'_1 = h''_1 = h'''_1 = 0.29 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}; h'_2 = h''_2 = h'''_2 = \\
 & = 0.29 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}; \\
 & h'_3 = h''_3 = h'''_3 = 0.098 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}; \\
 & c = 5.133 \cdot 10 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot (\dots)^{-1}; I_{двi} = 0.026 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\
 & i = 1, 2, 3; M_{в1} = 0.1 \dots 0.98 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\
 & M_{в2} = M_{в3} = 0.1 \dots 0.49 \text{ Н} \cdot \text{м}; \\
 & k_{с.сi} = 17.44 \dots 0.98 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot (\dots)^{-1}, \\
 & i = 1, 2, 3; \tau_1 = 0.029 \text{ с}; \tau_2 = \tau_3 = 0.015 \text{ с};
 \end{aligned}$$

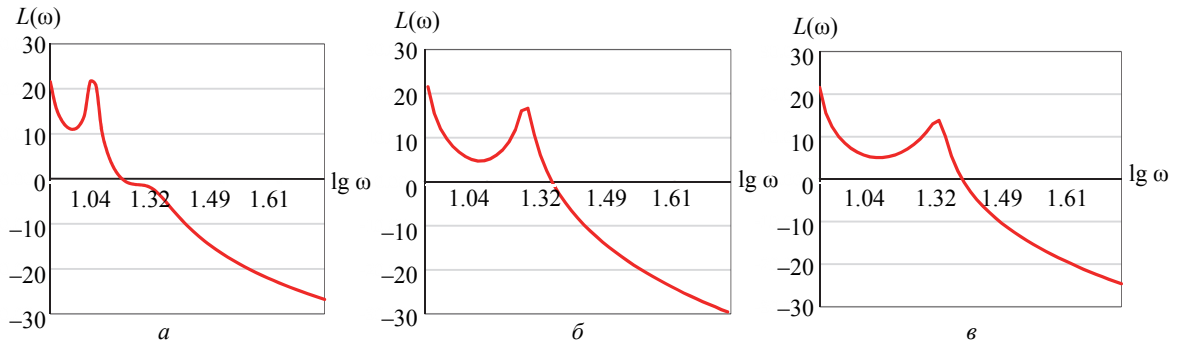


Рис. 1

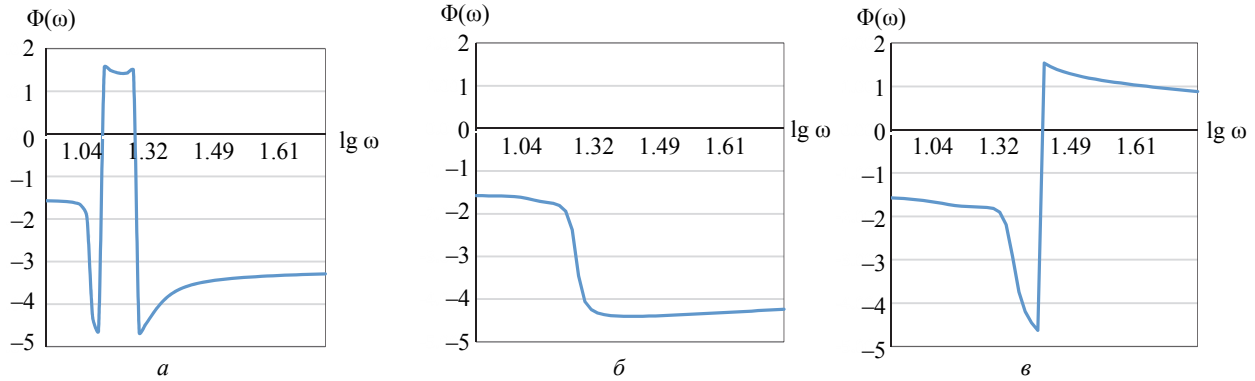


Рис. 2

$$0 \leq \theta \leq 0.8 \text{ рад}; 0 \leq \psi \leq 0.5 \text{ рад}; M_{в4} = M_{в5} = M_{в6} = M_{в7} = M_{в8} = M_{в9} = 0.$$

Громоздкость и, следовательно, необходимость упрощения этих уравнений по отношению к соответствующей задаче проектирования очевидна.

Анализ устойчивости трехосного стабилизатора обычно проводится методом амплитудно-фазовых частотных характеристик (АФЧХ) и более адекватно – логарифмических АФЧХ (ЛАФЧХ).

Выделим фазовые координаты, необходимые для оценки устойчивости трехосного гиросtabilизатора: $M_{в1}, M_{в2}, M_{в3}$ – входные воздействия; $M_{ст1}, M_{ст2}, M_{ст3}$ – стабилизирующие моменты.

Переменные α, β, δ потребуются для решения других задач проектирования (оценка точности, надежности и т. д.).

Для анализа устойчивости отдельных осей ТГС по модели (6) была построена модель (5). Для этого к модели (6) было применено преобразование Лапласа, затем модель разбивалась на подсистемы, где каждая подсистема соответствует одной из осей стабилизатора. По каждой модели подсистемы строилась модель вида (3) посредством исключения ненужных для анализа устойчивости фазовых переменных. Затем построенные макромодели осей стабилизатора были включены в общую систему вида (4), которая

учитывает связи между ними, после чего модель (4) была преобразована к виду (5). Модель вида (5) позволяет одновременно определять устойчивость каждой из подсистем, соответствующих осям стабилизатора.

Далее приводится анализ устойчивости трех осей гиросtabilизатора.

При $\theta = 0$ и $\psi = 0$ система (6) разбивается на отдельные оси, количество связей между которыми минимально.

Положим $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ (без корректирующего звена), тогда ЛАЧХ для первой оси гиросtabilизатора имеет вид, показанный на рис. 1, а, для второй оси – на б, для третьей оси – на в.

ЛФЧХ для первой оси гиросtabilизатора имеет вид, показанный на рис. 2, а, для второй оси – на б, для третьей оси – на в.

Согласно критерию устойчивости Найквиста [11] каждая из подсистем на рис. 1 и 2 неустойчива.

Положим $\tau_1 = 0.029 \text{ с}, \tau_2 = \tau_3 = 0.015 \text{ с}$ (добавление коррекции), тогда ЛАЧХ для первой оси гиросtabilизатора примет вид, показанный на рис. 3, а, для второй оси – на б, для третьей оси – на в.

ЛФЧХ для первой оси гиросtabilизатора примет вид, показанный на рис. 4, а, для второй оси – на б, для третьей оси – на в.

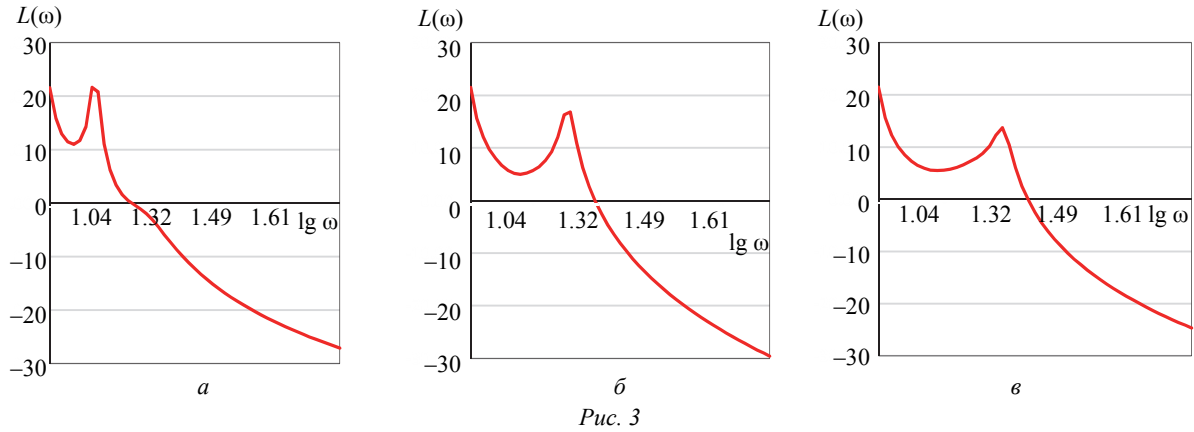


Рис. 3

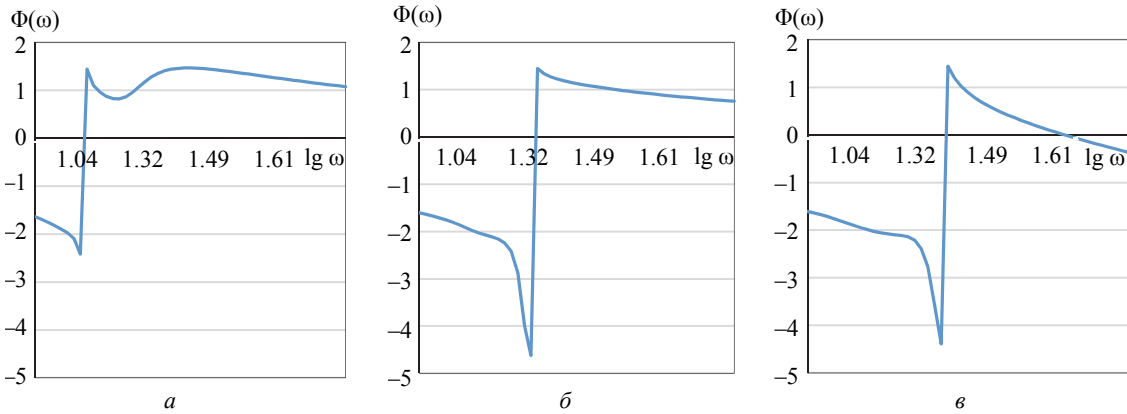


Рис. 4

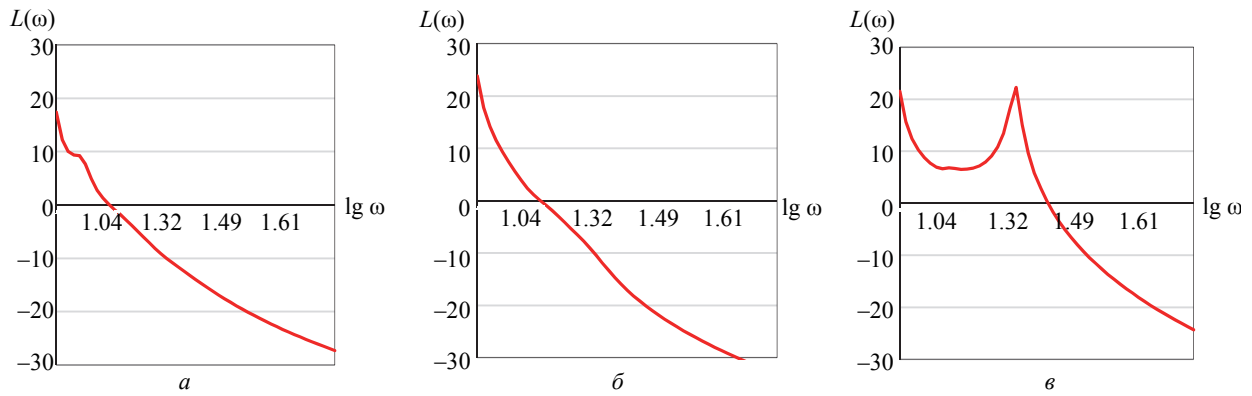


Рис. 5

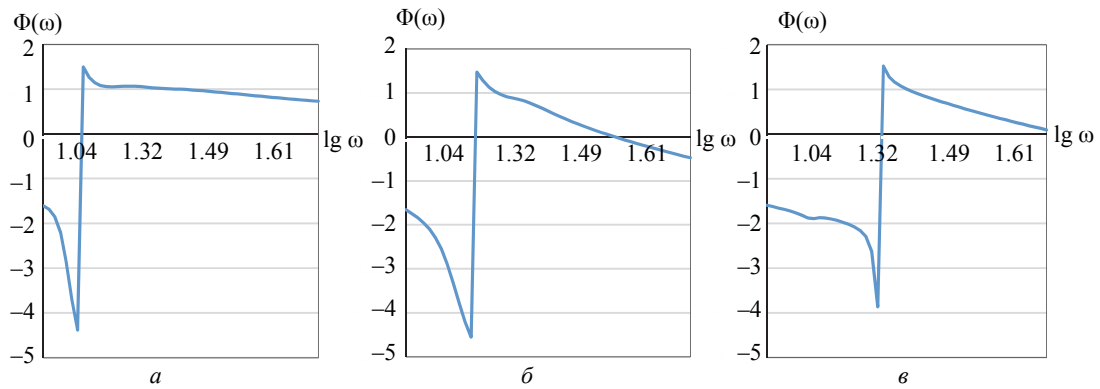


Рис. 6

Подсистемы на рис. 3 и 4 устойчивы.

Добавляя связи между подсистемами (вводя ненулевые углы θ и ψ), можно убедиться, что устойчивость каждой из подсистем ухудшается.

Положим $\theta = 0.7$ рад и $\psi = 0.7$, тогда ЛАЧХ для первой оси гиросtabilизатора примет вид, показанный на рис. 5, а, для второй оси – на б, для третьей оси – на в.

ЛФЧХ для первой оси гиросtabilизатора примет вид, показанный на рис. 6, а, для второй оси – на б, для третьей оси – на в.

Предлагаемый подход на основе блочно-иерархического макро моделирования обеспечивает не только декомпозицию полной математи-

ческой модели по отношению к варьируемым (основным) параметрам, но и возможность параллельного решения задач схемотехнического проектирования в спектральной области с учетом особенностей проектируемого объекта – позволяет получить весь вектор выходных фазовых координат и весь вектор варьируемых параметров параллельно, снижая трудоемкость проектных процедур анализа рассматриваемых объектов проектирования по полным моделям.

Преимущества использования данного подхода показаны на примере расчета устойчивости многомерной и многосвязной системы регулирования трехосного гиросtabilизатора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гридин В. Н., Анисимов В. И., Абухазим М. М. Моделирование больших систем на основе методов декомпозиции и сжатия данных // Системы высокой доступности. 2015. № 4. С. 77–82.
2. Андронов С. А. Вопросы упрощения математических моделей в САПР ЭМП // Материалы XIV межотрасл. науч.-техн. конф. памяти Н. Н. Острякова / ЦНИИ «Румб». Л., 1987. С. 243.
3. Анисимов В. И., Иванов К. А. Организация параллельных вычислений на основе методов диакоптика // Информатика, управление и компьютерные технологии. 2002. № 2. С. 4–7.
4. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика. М.: Наука, 1972. 544 с.
5. Петренко А. И., Власов А. И. Алгоритм упорядочения больших разреженных систем алгебраических уравнений // Автоматизация проектирования в электронике. 1975. № 12. С. 17–23.
6. Малина А. С., Борисов Н. И. Разработка методов определения частотных свойств линейных электрических эквивалентных схем с использованием

макро моделирования // Качество. Инновации. Образование. 2013. № 3. С. 44–49.

7. Метод иерархического макро моделирования как способ сокращения трудоемкости процесса анализа линейных электрических эквивалентных схем и повышения качества проектирования в САПР / А. Е. Абрамшин, Н. И. Борисов, Н. П. Кравченко, А. С. Малина // Качество. Инновации. Образование. 2013. № 11. С. 40–46.

8. Сольницев Р. И., Андронов С. А. Упрощение математических моделей электромеханических систем средствами САПР // Межвуз. сб. науч. тр. / под ред. С. С. Ривкина; Перм. политехн. ин-т. Пермь, 1987. С. 25–34.

9. Сольницев Р. И. Вычислительные машины в судовой гироскопии. Л.: Судостроение, 1977. 312 с.

10. Сольницев Р. И. Основы автоматизации проектирования гироскопических систем: учеб. пособие для вузов по спец. «Гироскопические приборы и устройства». М.: Высш. шк., 1985. 240 с.

11. Nyquist H. Regeneration theory // Bell System Technical J. 1932. № 11. P. 126–147.

R. I. Solnitsev

Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

A. S. Malina

JSC «Kaspersky Lab»

THE METHOD OF HIERARCHICAL MACROMODELING FOR ANALYSIS OF MULTIDIMENSIONAL AND MULTICONNECTED AUTOMATED CONTROL SYSTEMS

The application of the method of hierarchical macromodeling for the analysis of multidimensional and multiply connected automated control systems is considered. A macromodel is a mathematical model that corresponds to the basic parameters of a projected object. One of the features characteristic of complex objects is the presence of loosely connected subsystems. For each subsystem, the input and output phase coordinates to be analyzed and the variable parameters are explicitly distinguished. The elimination of internal variables from each subsystem provides a significant reduction in the number of equations of the original model. The construction of hierarchical macromodels for mathematical models of such objects is possible due to the independent construction of macromodels of subsystems with their subsequent integration. The analysis is carried out by the method of frequency characteristics on the basis of block hierarchical macromodels. The possibilities and advantages of the proposed method are shown in the example of a multidimensional and multiply connected control system of a triaxial gyrostabilizer.

Computer aided design, triaxial gyroscopic stabilizer, macromodeling, hierarchical macromodeling methods, frequency response, stability, logarithmic magnitude-phase frequency characteristics