



УДК 681.883.67.001.24

С. И. Коновалов, А. Г. Кузьменко

*Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)*

## **Определение частот резонанса и антирезонанса пьезокерамического пластинчатого преобразователя на основании частотной характеристики его входного электрического импеданса**

*Рассматривается пьезокерамическая пластина, нагруженная с одной стороны на водную сред и свободная с другой стороны. На основании расчета частотной характеристики входного электрического импеданса определяются частоты резонанса и антирезонанса. Обсуждается смысл этих терминов, приводятся результаты расчетов этих величин в зависимости от квадрата коэффициента электромеханической связи пьезокерамики. Указывается на возможность иного подхода к определению частот резонанса и антирезонанса, в зависимости от того, какая физическая величина является определяющей при работе преобразователя. В данной статье такой величиной является входной электрический импеданс, определяющий ток, протекающий через преобразователь. Другой возможный подход состоит в рассмотрении механической величины – колебательной скорости на рабочей грани пластины (т. е. на «выходе» преобразователя), что в схеме-аналоге является «током», проходящим через сопротивление излучения. Приводятся некоторые сравнительные данные для двух указанных подходов. Показано, что результаты, хотя и отличаются, но незначительно.*

### **Входной электрический импеданс, пьезокерамическая пластина, частота резонанса, частота антирезонанса, коэффициент электромеханической связи, водная среда**

Исследование теоретических основ работы пьезоэлектрических преобразователей (ПЭП), разработка разнообразных вариантов их конструкций и совершенствование технологии изготовления являются предметом постоянного внимания отечественных и зарубежных специалистов. Объяснение данного факта состоит в возможности получения важнейших параметров, характеризующих свойства физических сред, материалов, изделий и полуфабрикатов за счет использования акустических методов исследования, подразумевающих применение ПЭП в качестве излучателей и приемников акустического сигнала. В рамках настоящей статьи не представляется возможным привести исчерпывающий перечень литературных источников, затрагивающих проблемы, связанные с решением многочисленных задач, которые касаются разработки и применения пьезопреобразователей в самых разнообразных областях науки и техники. В качестве приме-

ра стоит упомянуть хотя бы некоторые из работ, например [1]–[7]. Стоит отметить, что изучение импульсного режима работы пьезопреобразователей является одним из направлений развития общей теории работы ПЭП. При этом подразумевается, что излучаемые (принимаемые) пьезопреобразователями импульсы имеют малую длительность. Обычно на выходе ПЭП она не превышает всего лишь нескольких полупериодов колебаний высокой частоты. Применение столь коротких сигналов позволяет решать многие вопросы, связанные с улучшением важнейших параметров аппаратуры, предназначенной для применения в разнообразных задачах прикладной акустики, например имеющих локационный характер. В частности, создание преобразователей, способных эффективно работать в импульсном режиме, является весьма актуальным для ультразвуковой дефектоскопии. Применение коротких акустических сигналов способствует увеличению точно-

сти определения координат дефектов, повышению разрешающей способности и снижению мертвой зоны аппаратуры, используемой в задачах измерения и контроля. Обширный перечень литературы по данному вопросу представлен в [8], авторами которой для получения большей общности результатов был использован единый подход к оценке длительности импульсов на выходе пьезопреобразователя (в излучении и приеме). Суть этого подхода состоит в том, что длительности сигналов измерялись в относительных единицах, в качестве которых использовалась длительность полупериода колебаний на собственной частоте пластины (на частоте антирезонанса). Выбирая антирезонансную частоту в качестве «точки отсчета», авторы исходили из общепринятых представлений о том, что ее положение на оси частот не изменяется при изменении значения коэффициента электромеханической связи пьезоматериала. Частота же резонанса не может служить таковым базисом, поскольку с ростом коэффициента электромеханической связи пьезокерамики она смещается в область более низких частот. При этом смещение тем больше, чем больше коэффициент электромеханической связи. Применение описанного подхода требует некоторого уточнения понятий резонансной и антирезонансной частот. При этом возможны два подхода. Первый из них состоит в том, что под частотой резонанса можно понимать частоту, на которой наблюдается максимум колебательной скорости излучающей грани пластины. Это соответствует максимальному току через сопротивление излучения в схеме-аналоге преобразователя. Реактивная составляющая тока в этот момент равна нулю, что и является условием резонанса. Именно такой подход использован в [9], где в качестве излучателя рассмотрена пластина, нагруженная на воду с одной стороны. Тыльная ее сторона свободна. Другой подход подразумевает использование понятия о входном электрическом импедансе преобразователя (по существу, полного электрического тока, протекающего через преобразователь), что и явилось предметом исследований, результаты которых излагаются в настоящей статье. Такой подход может представить интерес с точки зрения изучения возможности согласования ПЭП с генератором.

В качестве ПЭП будем рассматривать пьезопластину, излучающую сигнал в водную среду. При этом тыльная сторона пластины свободна, т. е. она контактирует с воздухом. Введем обозначения:  $l_k$  и  $S$  – толщина пьезокерамической пла-

стины и площадь ее грани;  $z_k$  и  $z_b$  – удельные акустические импедансы пьезокерамики и воды соответственно;  $Z_k = z_k S$  и  $Z_b = z_b S$  – их полные импедансы. Пусть  $k_k = \omega/c_k$  – волновое число в пьезокерамике, где  $\omega$  – циклическая (угловая) частота;  $c_k = \sqrt{c_{33}^D/\rho_k}$  – скорость звуковых волн в пьезокерамике ( $c_{33}^D$  – упругий модуль пьезокерамики при постоянной электрической индукции  $D$ ;  $\rho_k$  – плотность пьезокерамики). Введем в рассмотрение  $k_U = e_{33}S/l_k$  – коэффициент электро-механической трансформации, где  $e_{33}$  – пьезопостоянная. Электрическую емкость механически заторможенной пластины обозначим  $C_0$ .

С учетом введенных обозначений схему-аналог рассматриваемого пластинчатого преобразователя можно изобразить в виде, представленном на рис. 1. Сопротивления  $Z_1$  и  $Z_2$ , входящие в состав схемы-аналога, могут быть представлены выражениями  $Z_1 = jz_k S \operatorname{tg} \frac{k_k l_k}{2}$  и  $Z_2 = \frac{z_k S}{j \sin k_k l_k}$ .

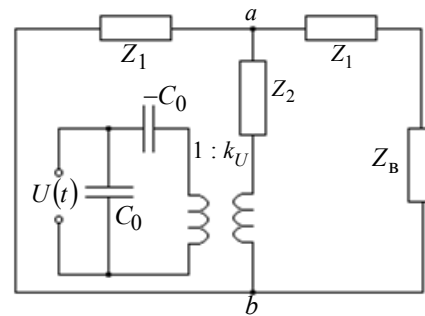


Рис. 1

В механической части схемы-аналога буквами  $a$  и  $b$  обозначены точки, к которым справа подключен импеданс  $(Z_1 + Z_b)$ , а слева – импеданс  $Z_1$ . Заметим, что указанные импедансы включены параллельно. В связи с этим общий импеданс  $Z_{ab}$  между точками  $a$  и  $b$  будет определяться вы-

$$Z_{ab} = \frac{Z_1^2 + Z_1 Z_b}{2Z_1 + Z_b}.$$

Полный механический импеданс, подключенный к концам вторичной обмотки электромеханического трансформатора, определяется как  $Z_M = Z_2 + Z_{ab}$ . Кроме того, учтем, что  $2Z_1 Z_2 + Z_1^2 = Z_k^2$ . Тогда после некоторых алгебра-

ических преобразований можно получить следующее выражение:  $Z_M = \frac{Z_K^2 \sin x - jZ_K Z_B \cos x}{Z_B \sin x + j2Z_K(1 - \cos x)}$ , где  $x = k_K l_K$ .

Механический импеданс может быть пересчитан с механической стороны схемы-аналога на ее электрическую сторону делением  $Z_M$  на квадрат коэффициента электромеханической трансформации, т. е.  $Z_{вн} = Z_M / k_U^2$ , где  $Z_{вн}$  – внесенное сопротивление.

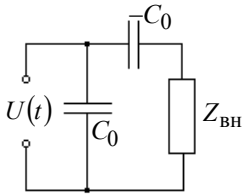


Рис. 2

После этого схема-аналог (рис. 1) полностью приведена к электрической стороне и имеет вид, представленный на рис. 2. Входной электрический импеданс этой схемы может быть записан в следующем виде:

$$Z_{вх} = \frac{1}{j\omega C_0} \left( -\frac{1}{j\omega C_0} + \frac{Z_M}{k_U^2} \right) = \frac{1}{j\omega C_0} \left( j\beta^2 \frac{Z_K}{x} + 1 \right).$$

Заметим, что выражение для  $Z_{вх}$  представлено с учетом того, что  $\frac{k_U^2}{\omega C_0} = \frac{\beta^2}{x} Z_K$ , где

$$\beta^2 = \frac{e_{33}^2}{\epsilon_0 \epsilon_{33}^u c_{33}^D}$$

– квадрат коэффициента электромеханической связи;  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м – электрическая постоянная;  $\epsilon_{33}^u$  – диэлектрическая проницаемость пьезокерамики при постоянной деформации.

Для дальнейшего решения задачи целесообразно ввести безразмерную частоту  $\gamma = \omega / \omega_0$ , где под  $\omega_0$  следует понимать «антирезонансную» частоту. В этом случае получим, что  $x = \gamma \pi$ . Учитывая понятие безразмерной частоты, выражения для  $Z_M$  и  $Z_{вх}$  можно записать в виде

$$Z_M(\gamma) = Z_K \frac{Z_K \sin \gamma \pi - jZ_B \cos \gamma \pi}{Z_B \sin \gamma \pi + j2Z_K(1 - \cos \gamma \pi)};$$

$$Z_{вх}(\gamma) = \frac{1}{\omega_0 C_0} \left( -j \left( j\beta^2 \frac{Z_K}{\gamma \pi} \frac{1}{Z_M(\gamma)} + 1 \right) \frac{1}{\gamma} \right).$$

Представленные выражения применялись для расчета частотных характеристик входного элек-

трического импеданса  $Z_{вх}(\gamma)$ . При этом использовалась нормировка к величине  $\frac{1}{\omega_0 C_0}$  для различных значений квадрата коэффициента электромеханической связи  $\beta^2$ . Внимание было уделено определению характеристик  $|Z_{вх}(\gamma)|$ ,  $\text{Im}(Z_{вх}(\gamma))$ ,  $\text{Re}(Z_{вх}(\gamma))$ . Расчет осуществлялся с шагом по частоте  $\Delta \gamma \pi = 0.001 \pi$ . Далее приведены некоторые результаты расчетных исследований.

**Результаты исследований, связанные с определением  $|Z_{вх}(\gamma)|$**  (табл. 1). Диапазон изменения квадрата коэффициента электромеханической связи изменялся от 0.005 до 0.17. В табл. 1 приведены значения следующих параметров:  $x_p / \pi$  и  $x_{ap} / \pi$  – относительные частоты резонанса и антирезонанса;  $|Z_{вх.p}(\gamma)|$  и  $|Z_{вх.ap}(\gamma)|$  – модули входных электрических импедансов на резонансной и антирезонансной частотах;  $\frac{|Z_{вх.ap}(\gamma)|}{|Z_{вх.p}(\gamma)|}$  – отношение модулей входных элек-

трических импедансов на частотах антирезонанса и резонанса, т. е. перепад частотной характеристики. Представленные данные подтверждают известные данные и, кроме того, позволяют дать им численную оценку. Так, например, можно отметить, что резонансная частота монотонно понижается с ростом  $\beta^2$ . Например, при  $\beta^2 = 0.005$  значение параметра  $x_p / \pi$  ниже единицы на 1.4 %, а при  $\beta^2 = 0.17$  – ниже на 7.7 %, т. е. более чем в 5 раз. Антирезонансная частота также понижается с ростом  $\beta^2$ , но уменьшается по сравнению с единицей от 1.1 до 0.3 %. Значение параметра  $|Z_{вх.p}(\gamma)|$  уменьшается с ростом  $\beta^2$ , а  $|Z_{вх.ap}(\gamma)|$  растет с ростом  $\beta^2$ . Хотя частота антирезонанса и отличается от  $x_{ap} / \pi = 1$ , но эти отличия для разных значений  $\beta^2$  малы по сравнению с 1. Во многих случаях можно считать, что на антирезонансе  $x_{ap} / \pi = 1$ . В то же время частота резонанса может достаточно сильно отличаться от  $k l = \pi$ , и это не дает оснований считать ее универсальной базой отсчета. Последний столбец табл. 1 характеризует отношение модулей входного электрического импеданса на частотах антире-

Таблица 1

Значение коэффициента электромеханической связи ( $\beta^2$ )	Расчетные значения параметров				
	$\frac{x_p}{\pi}$	$ Z_{вх.р}(\gamma) $	$\frac{x_{ap}}{\pi}$	$ Z_{вх.ап}(\gamma) $	$\frac{ Z_{вх.р}(\gamma) }{ Z_{вх.ап}(\gamma) }$
0.170	0.923	0.221	1.003	4.521	20.457
0.090	0.957	0.379	1.005	2.64	6.966
0.0625	0.966	0.488	1.007	2.049	4.199
0.040	0.975	0.622	1.009	1.609	2.426
0.010	0.984	0.894	1.012	1.119	1.252
0.005	0.986	0.952	1.012	1.051	1.104

зонанса и резонанса, т. е. глубину перепада частотной характеристики на указанных частотах. Так, например, при  $\beta^2 = 0.17$  имеем

$$\frac{|Z_{вх. ап}(\gamma)|}{|Z_{вх. р}(\gamma)|} \approx 20.46; \text{ при } \beta^2 = 0.005 \text{ это отношение}$$

имеет уже значение  $\frac{|Z_{вх. ап}(\gamma)|}{|Z_{вх. р}(\gamma)|} \approx 1.10$ . Приведенные цифры свидетельствуют о том, что при

больших значениях  $\beta^2$  область «резонанс-антирезонанс» резко выделяется на графике  $|Z_{вх}(\gamma)|$ . Напротив, при небольших значениях  $\beta^2$  (например,  $\beta^2 = 0.005$ )  $|Z_{вх.р}(\gamma)|$  примерно равно  $|Z_{вх.ап}(\gamma)|$  и область «резонанс-антирезонанс» на графике  $|Z_{вх}(\gamma)|$  практически не различается.

На рис. 3 представлена зависимость протяженности по частоте области «резонанс-антирезонанс» для принятого в данной работе диапазона значений квадрата коэффициента электромеханической связи пьезоматериала ( $\beta^2$ ). По оси абсцисс отложены значения  $\beta^2$ , а по оси ординат – значения параметра  $\Delta$ , который определяется как  $\Delta = \frac{x_{ap} - x_p}{\pi}$ . Из рис. 3 можно видеть,

что в диапазоне изменения  $\beta^2$  от 0.005 до 0.17 протяженность  $\Delta$  увеличивается примерно в 3 раза, достигая значения  $\Delta \approx 0.08$ .

Еще раз вернемся к обоснованию терминов «частота резонанса» и «частота антирезонанса» в данной задаче. На основании данных, приведенных в табл. 1, рассмотрим отклонения величины  $x/\pi$  от 1 для частот, которые здесь принимаем за резо-

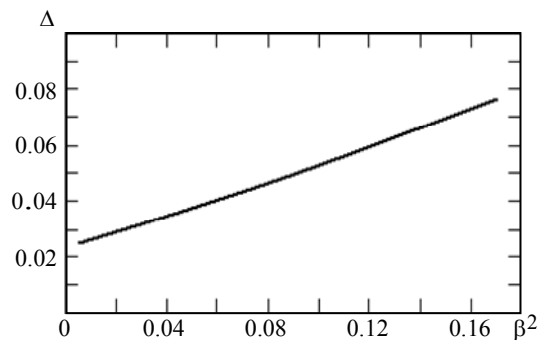


Рис. 3

нансную и антирезонансную соответственно. Составим табл. 2 для рассматриваемых отклонений.

Из табл. 2 можно видеть, что для больших значений квадрата коэффициента электромеханической связи отклонения  $x/\pi$  от 1 для резонанса во много раз превышают отклонения для антирезонанса. Так, например, для  $\beta^2 = 0.17$  имеем, соответственно, величины  $-0.077$  и  $0.003$ , которые по модулю отличаются примерно в 25 раз. И только при весьма малых значениях  $\beta^2$  ( $\beta^2 \leq 0.005$ ) эти величины почти равны друг другу по модулю. Отклонение величины  $x/\pi$  от 1 для частоты антирезонанса в рамках табл. 2 составляет 0.3–1.2 %, чем практически можно пренебречь и считать, что частота антирезонанса соответствует скорости звука  $c_3^D$ .

Таблица 2

Значение коэффициента электромеханической связи ( $\beta^2$ )	Величина отклонения $x/\pi$ от 1	
	Резонанс	Антирезонанс
0.17	-0.077	0.003
0.09	-0.043	0.005
0.0625	-0.034	0.007
0.04	-0.025	0.009
0.01	-0.016	0.012
0.005	-0.014	0.012

**Результаты исследований, связанные с определением  $\text{Im}(Z_{\text{вх}}(\gamma))$ .** Ранее было показано, что частоты резонанса и антирезонанса зависят от квадрата коэффициента электромеханической связи пьезоматериала. В связи с этим интересно отметить одно обстоятельство, относящееся к характеристике  $\text{Im}(Z_{\text{вх}}(\gamma))$ . Если рассматривать частотную зависимость характеристики  $\text{Im}(Z_{\text{вх}}(\gamma))$ , то оказывается, что ее максимум (для  $\beta^2$  из диапазона  $0.01 \leq \beta^2 \leq 0.17$ ) находится на частоте  $0.984\pi$ . При этом минимум  $\text{Im}(Z_{\text{вх}}(\gamma))$  находится на частоте  $1.015\pi$ . Это свидетельствует о том, что частоты максимума и минимума реактивной составляющей не зависят от  $\beta^2$ . Слабая зависимость от  $\beta^2$  проявляется лишь при очень малых значениях  $\beta^2$  ( $\beta^2 \leq 0.01$ ), которые практического значения не имеют.

**Результаты исследований, связанные с определением  $\text{Re}(Z_{\text{вх}}(\gamma))$ .** Исследование данной характеристики позволяет лишь отметить, что она имеет типичную форму узкорезонансной кривой, которая не имеет каких-либо особенностей. Ее максимум достигается при  $x = \pi$ .

**Сравнение результатов, полученных при решении двух различных задач.** Ранее упоминалось, что частоты резонанса и антирезонанса определялись как частоты локальных минимума и максимума на графике входного электрического импеданса соответственно. Фактически это связано с полным электрическим током, проходящим через преобразователь. В более ранней работе [9] частота резонанса определялась как частота, при которой колебательная скорость грани пьезопластины, излучающей в водную среду, достигает максимума. Это соответствует условию равенства нулю реактивной составляющей скорости (т. е. тока, который в схеме-аналоге протекает через сопротивление излучения).

Две указанные задачи отличаются друг от друга. Этим вызван интерес авторов к сравнению полученных результатов. Сравнительное исследование

показало, что в диапазоне изменения  $\beta^2$  от 0.05 до 0.17 значения резонансных частот, полученных по методике, описанной в [9] (по максимуму колебательной скорости), оказываются выше, чем при их определении путем расчета входного электрического импеданса преобразователя. При этом для достаточно большого значения  $\beta^2 = 0.17$  разность частот равна  $0.003\pi$ . С уменьшением  $\beta^2$  разность частот увеличивается и при  $\beta^2 = 0.01$  равна  $0.012\pi$ .

Таким образом, можно утверждать, что частоты резонанса и антирезонанса зависят от конкретной задачи, для решения которой предназначается рассматриваемый ПЭП (определение  $|Z_{\text{вх}}(\gamma)|$  или максимальной колебательной скорости на излучающей грани). Частоты резонанса оказываются тем ниже, чем выше значение  $\beta^2$ . Тем не менее разность частот резонанса для двух упомянутых задач не столь велика. Частоты антирезонанса в задаче, связанной с определением  $|Z_{\text{вх.р}}(\gamma)|$ , были более упорядочены, чем в случае задачи, подразумевающей определение максимальной колебательной скорости грани пластины.

Указанные обстоятельства не являются причиной отказа от применения термина «антирезонанс», хотя бы и условно, так как значения  $x_{\text{ар}}$  по существу группируются вблизи  $x_{\text{ар}}/\pi = 1$ .

Стоит также отметить, что в работе существенное внимание было уделено изучению влияния квадрата коэффициента электромеханической связи на частоты резонанса и антирезонанса, приведены формулы, позволяющие заинтересованному читателю определить необходимые варианты решения задачи для различных пьезоматериалов.

Исследование выполнено в рамках государственной работы «Проведение научно-исследовательских работ (фундаментальных научных исследований, прикладных научных исследований и экспериментальных разработок)» базовой части государственного задания Минобрнауки России. Код проекта: 8.6743.2017/8.9.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ультразвуковые преобразователи / под ред. Е. Кикучи; пер. с англ. М.: Мир, 1972. 424 с.

2. Пьезокерамические преобразователи: справ. / В. В. Ганопольский, Б. А. Касаткин, Ф. Ф. Легуша и др.; под ред. С. И. Пугачева. Л.: Судостроение, 1984. 256 с.

3. Ультразвуковые преобразователи для неразрушающего контроля / под общ. ред. И. Н. Ермолова. М.: Машиностроение, 1986. 280 с.

4. Домаркас В. И., Кажис Р.-И. Ю. Контрольно-измерительные пьезоэлектрические преобразователи. Вильнюс: Минтис, 1974. 256 с.

5. Wolfgang Sachse, Nelson N. Hsu. Chap. 4: Ultrasonic Transducers for Materials Testing and Their Characterization Physical Acoustics / ed. by Warren P. Mason and R. N. Thurston. 1979. Vol. 14. P. 277–406.

6. Ultrasonic Instruments and Devices II – Reference for Modern Instrumentation, Techniques, and Technology. Chap. 2: Fabrication and characterization of transducers / ed. by R. N. Thurston, Allan D. Pierce and Emmanuel P. Papadakis, Emmanuel P. Papadakis, Clyde G. Oakley,

Alan R. Selfridge, Bruce Maxfield // Physical Acoustics. 1999. Vol. 24. P. 43–134.

7. Milan D. Radmanovich, Dragan D. Mancic. Designing and modeling of the power ultrasonic transducers. A series of extraordinary and unique books recommended by MPI. University of Nis: Faculty of Electronics, 2004. 198 p.

8. Коновалов С. И., Кузьменко А. Г. Особенности импульсных режимов работы электроакустических пьезоэлектрических преобразователей. СПб.: Политехника, 2014. 294 с.

9. Коновалов С. И., Кузьменко А. Г. К вопросу о частотах резонанса и антирезонанса пластинчатого пьезокерамического преобразователя // Дефектоскопия. 2017. № 11. С. 50–54.

S. I. Konovalov, A. G. Kuz'menko  
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

## DETERMINATION OF RESONANCE AND ANTIRESONANCE FREQUENCIES FOR PLATE-TYPE TRANSDUCERS MADE OF PIEZOCERAMICS, ON THE BASE OF ITS INPUT ELECTRIC IMPEDANCE FREQUENCY RESPONSE

*In this work a piezoceramic plate loaded with water medium at one side and unloaded at opposite side is considered. On the base of frequency response calculations of input electric impedance, resonance and antiresonance frequencies are determined. The meaning of these terms is discussed. The results of calculations of the values of the said frequencies are presented for several values of electromechanical coupling factor squared. It is pointed out the possibility of another approach to determination of resonance and antiresonance frequencies in dependence on physical quantity which is determining in the use of the transducer. In this work such quantity is the input electrical impedance determining the total current through the transducer. Another possible approach consists in consideration of mechanical quantity – vibrational speed on the working face (at the output of the transducer), that in the analogous scheme is the «current» through the radiation impedance. Some comparative results are presented for both approaches. It is noted that the results have differences, but these differences are small enough.*

**Input electric impedance, piezoelectric plate, resonance frequency, antiresonance frequency, electromechanical coupling factor, water medium**

УДК 681.2.089

А. В. Царёва

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Алгоритмы измерительных систем для исследования фазовой структуры походки человека

*Описан алгоритм идентификации фаз шага, на основании которого реализован виртуальный инструмент в среде графического программирования. Показаны гистограммы распределения сигналов от датчиков, в соответствии с которыми создан виртуальный инструмент, реализованный на основании правила квартилей. Определен момент наименее устойчивого положения человека при ходьбе. Данный алгоритм идентификации фаз необходим при сравнительном анализе «портретов» шагов человека с заболеваниями опорно-двигательного аппарата и человека, не имеющего патологий двигательных функций. Создан виртуальный инструмент для реализации фильтрации сигналов в соответствии с алгоритмом фильтра Калмана. По результатам экспериментов выведена формула для масштабирующего преобразования, в которой используются измерения, полученные в статическом режиме, что позволяет нормировать сигнал линейного ускорения по соответствующей оси с учетом расположения датчика и соответствующих ориентаций осей.*

**Кинематика движений, медицинская диагностика, фазы шага, алгоритмы обработки перемещений**

В настоящий момент в медицинской диагностике опорно-двигательного аппарата не существует адекватных средств измерений состояния

двигательной системы пациента. При диагностике заболеваний опорно-двигательного аппарата важной проблемой является выявление динамики