

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вернер М. Основы кодирования: учеб. для вузов. М.: Техносфера, 2004. 288 с.
2. Золотарев В. В., Овечкин Г. В. Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы: справ. М.: Горячая линия–Телеком, 2004. 126 с.
3. Питерсон Р., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки. М.: Мир, 1976. 595 с.
4. Реконфигурируемые мультиконвейерные вычислительные структуры / И. А. Каляев, И. И. Левин, Е. А. Семерников, В. И. Шмойлов; ЮНЦ РАН. Ростов н/Д, 2008. 393 с.
5. Код Хэмминга. Пример работы алгоритма. URL: <https://habrahabr.ru/post/140611/>.

A. N. Mursaev, E. O. Steblina
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

HIGH-PERFORMANCE, COST-EFFECTIVE HAMMING CODEC

The information transmission via open channels is without undoubtedly requires the use of interference protection means. One of the effective means of such protection is error protection encoding. The example of relatively simple and interference-resistant encoding is Hamming encoding. To ensure high speed and reliability of transmission hardware-implemented modules of encryption and decryption of transmitted data are used – Hamming codecs. The article presents development of Hamming codec architecture based on multi-way bit organization. Architecture ensures cost reduction, higher performance and easy reconfiguration for various versions of code.

Error correcting codes, hardware implementation

УДК 004.946

И Вэньлун

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Топологический подход к геометрическому моделированию формы листьев растений

Рассматриваются топологические методы и алгебраические средства, применяемые в аспектно-ориентированном подходе к решению задач компьютерного моделирования формы листьев растений с учетом экофизиологических факторов. Поскольку топологическая структура формы листа может рассматриваться как инвариант в процессе его роста, для получения полноценной геометрической модели информация, описывающая форму листа, сначала разделяется на топологическую и геометрическую части; затем применяются метод n-Gmaps и алгебраическая структура «моноид» для построения топологической модели формы листа; наконец, применяются встроенные отображения топологических блоков на соответствующие вершины формы листа. Методы, использованные в данной статье, способствуют повышению абстрагирования модели формы листа растения для возможности ее повторного использования, а комбинаторные топологические операции могут сократить ошибки в процессе округления в ходе численных расчетов геометрического моделирования, тем самым повышая точность моделирования.

Геометрическое моделирование, концептуализация топологии, метод n-Gmaps, моноиды, геометрическая форма листьев растений

В реальном трехмерном пространстве форма роста листа растения в значительной степени влияет на эффективность фотосинтеза, происходящего у него внутри [1]. Для того чтобы количественно регулировать действие такой физиологи-

ческой функции, исследователи стали активно изучать законы морфогенеза растений [2], [3]. Однако фитометрические системы (ФМС) с традиционным ручным управлением датчиками зависят от погодных условий, так что нелегко до-

биться сопровождающей фитометрии в процессе морфогенеза роста растений. Виртуализация и визуализация процесса роста растения могут предоставить эффективные исследовательские инструменты в оптимизации его морфологического строения. В связи с этим в данной статье будет рассмотрено использование сред виртуальных инструментов (VI-сред) для решения задачи моделирования роста листа растений.

Цель статьи – представить аспектно-ориентированные решения обратной задачи компьютерного моделирования формы листьев растений в предметной области экофизиологии растений.

Внимание концентрируется на семантике и прагматике тополого-комбинаторных моделей и так называемых мягких алгоритмов в условиях нехватки эмпирических данных о витасистемах.

Постановка задачи. Методы и средства виртуального проектирования систем автоматизированного проектирования (САПР) успешно используются в ходе дизайна и производства промышленной продукции. Например, в CAD/CAM-системах при обработке механических деталей обычно используется конструктивная блочная геометрия (Constructive Solid Geometry, CSG) [4], основными процедурами которой являются: создание базисных геометрических блоков (таких, как цилиндры, конусы и кубы), а затем на множестве этих геометрических блоков вводятся бинарные операции (объединение, пересечение, разность) и генерация более сложных геометрических форм. Метод CSG (так как его операции могут быть описаны как бинарное дерево) выгоден с точки зрения программирования, но в нем сложно представить изоморфную информацию о двух соседних гранях геометрических тел, так что

сращивание таких двух геометрических объектов требует введения ручных операций. Кроме того, морфогенез растения рассматривается в качестве одного из биологических феноменов. В виртуальном проектировании его формы существует значительное отличие от промышленной продукции, которое заключается в том, что форма растения динамически меняется под влиянием экофизиологических факторов, влияющих на рост растения. С помощью упомянутого метода CSG можно создать только статическую модель формы в определенный момент роста растения. Хотя в процессе роста растения его форма меняется (например, происходит расширение площади листа и изгиб листа, но топологические отношения между вершинами, выбранными по краям листа, не меняются). Учитывая этот топологический инвариант, не зависящий от ограничений состояния евклидова пространства (модель которого может быть применена при моделировании одинаковых геометрических структур), в данной статье предлагается топологический метод геометрического моделирования формы листа.

Концептуализация топологической структуры листа. Моделирование не означает копирование системы естественного мира целиком. Требуется с помощью метода абстракции «захватить» ее важные характеристики, чтобы поведение этой системы и ее модели было релевантным. В процессе измерения параметров формы листа, как правило, можно легко получить параметрические значения максимальной длины и ширины листа (рис. 1, а). Здесь 2 линейных сегмента P_1P_2 и P_3P_4 являются максимальной длиной и шириной листа поливного риса соответственно. На рис. 1, б показана топологическая структура абстрагиро-

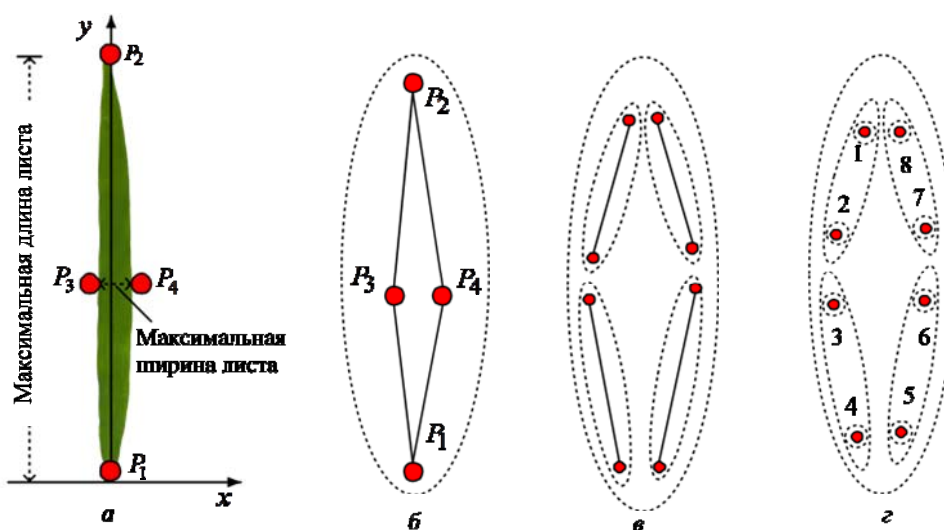


Рис. 1

ванных отношений между вершинами по краям листа, которая состоит из топологической грани $P_1P_2P_3P_4$. На рис. 1, *в* и *г* изображены топологические отношения, которые, в свою очередь, являются топологическими структурами разбиения предыдущей топологии, состоящие из четырех топологических ребер и восьми топологических вершин соответственно. На рис. 1, *г* топологические вершины пронумерованы для осуществления запроса к любой из вершин.

Посредством анализа в ходе разбиения топологии листа поливного риса можно предложить топологическую концепцию формы листа. Она описывается набором унарных и бинарных отношений, созданных на множестве некоторых вершин, как изложено в определении 1.

Определение 1. Концептуализация топологической структуры листа состоит в ее представлении двумя кортежами: $\zeta = (S, \tau)$, где S – множество минимальных единиц, на которые можно разбить топологическую структуру листа, а τ – топологические отношения, определенные на множестве S , т. е. $\tau \subseteq 2^S$.

В указанном определении изложена топологическая концепция формы листа, который показан на рис. 1, *а*. Она может быть также визуализирована как бинарное дерево с частично упорядоченным множеством, как показано на рис. 2.

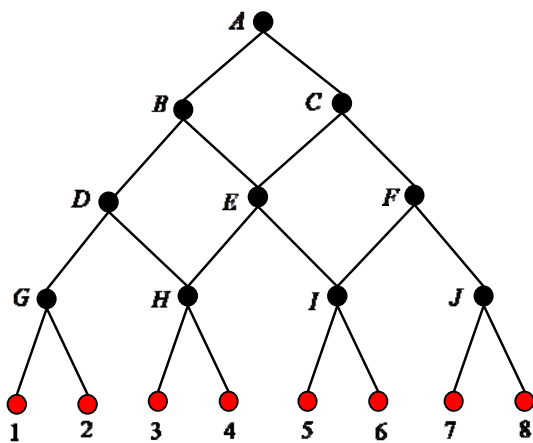


Рис. 2

Топологическая структура формы листа состоит из отношений, построенных на множестве $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Каждый элемент множества представляет собой минимальный блок, на который разбивается топологическая структура формы листа, как показано на рис. 1, *г*. Конечные узлы древовидной структуры – унарные отношения, определенные на множестве, а промежуточные узлы – бинарные отношения, которые

состоят из унарных отношений и их комбинации, а именно: $G = \langle\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle\rangle$; $H = \langle\langle 3 \rangle, \langle 4 \rangle\rangle$; $I = \langle\langle 5 \rangle, \langle 6 \rangle\rangle$; $J = \langle\langle 7 \rangle, \langle 8 \rangle\rangle$; $D = \langle G, H \rangle$; $E = \langle H, I \rangle$; $F = \langle I, J \rangle$; $B = \langle D, E \rangle$; $C = \langle E, F \rangle$; $A = \langle B, C \rangle$. В результате получен набор топологических отношений этого листа: $\tau = \{\langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 4 \rangle, \langle 5 \rangle, \langle 6 \rangle, \langle 7 \rangle, \langle 8 \rangle, G, H, I, J, D, E, F, B, C, A\}$.

В ходе концептуализации топологической структуры формы листа можно выделить 3 группы вопросов, которые необходимо решить:

1) описание топологических отношений τ является слишком конкретным: с увеличением элементов множества S количество топологических отношений, установленных на этом множестве, растет в геометрической прогрессии – тем самым, представляется сложным перечислить все топологические отношения;

2) представление топологии на двоичном дереве с частично упорядоченным множеством не является универсальным: так как даны различные порядки комбинации элементов множества S , то можно получить разные представления двоичного дерева;

3) интерпретация данных наблюдений: как показано на рис. 1, *а* и *б*, форма листа абстрагирована в топологическую структуру без учета ее геометрической информации.

Описание топологических концепций на основе унифицированной формы. Как известно, концепция имеет коннотацию и денотацию двух основных признаков. Первый отражает смысл вещей, а определение является логическим методом, уясняющим коннотацию концепции; последний отмечает диапазон объектов, описанных концепцией, а разграничение является логическим методом, определяющим денотацию концепции. Указанные выше первая и вторая проблемы возникают из-за определения денотации топологических концепций формы листа. Для того чтобы решить эти две проблемы, может быть использована коннотация топологической концепции.

Метод n -Gmaps. На основе теории комбинаторных отображений (combinatorial maps) П. Линхардт создал метод полуреберного представления, который называется n -мерными обобщенными отображениями [5]–[7], т. е. когда топологическое ребро состоит из двух полуребер. Этот метод не только имеет строгие математические определения для описания топологических блоков объекта и ограничения их комбинаций, но и приводит однородные описания (homogeneous description) топологических структур во всех мерных пространствах.

Определение 2 [5]. Допустим, что d относится к элементу множества S и перестановка (permutation) α является отображением из d в элемент из S , а именно $\alpha : S \rightarrow S$. Если $d \in S$ и удовлетворено условие $\alpha \circ \alpha(d) = d$, то перестановка α называется *инволюцией* (involution); если $d \in S$ и удовлетворено условие $\alpha(d) = d$, то d называется фиксированной точкой инволюции α .

В этом определении П. Линхардт называет d «дротиком» (dart), сущность которого – это тип указателя на структуру данных, а α – тип бинарного отношения. Например, пусть дано множество $S = \{1, 2\}$ и две перестановки α_0 и α_1 , определенные на S . Если α_0 – инволюция, а α_1 – фиксированная точка, то можно получить результат, действующий для каждого элемента множества S , как показано на рис. 3.

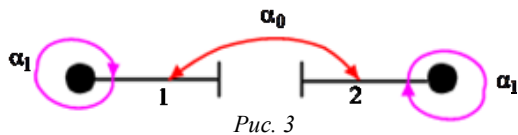


Рис. 3

Как видно, после действия инволюций α_0 и α_1 на множество S 2 полуребра комбинировались в целое ребро, а именно $\alpha_0 \circ \alpha_0(1) = 1$, $\alpha_0 \circ \alpha_0(2) = 2$, $\alpha_1(1) = 1$, $\alpha_1(2) = 2$, $\alpha_1(1) = 1$ и $\alpha_1(2) = 2$. Хотя здесь инволюция α_1 не внесла вклад, но можно использовать ее, чтобы запросить границу топологической структуры в комбинации двух топологических структур.

Определение 3 [5]. n -мерные обобщенные отображения (n – dimensional Generalized Maps, n -Gmaps) являются $(n+2)$ -кортежами: $G =$

$(S, \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, где $n \geq 0$, и $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ являются инволюциями, определенными на непустом конечном множестве S , а также эти инволюции удовлетворяют двум следующим ограничивающим условиям:

- (i) комбинационное условие: $\alpha_i \circ \alpha_j$ является инволюцией, только если $0 \leq i \leq i+2 \leq j$;
- (ii) граничное условие: когда $k \geq n$, $\forall d \in S$, $\alpha_k(d) = d$.

Применение метода n -Gmaps в топологическом моделировании формы листьев растений. Концептуализация топологии двумерной формы листа представляет собой отношения, которые составляются на множестве топологических вершин, где n в методе n -Gmaps равняется двум. На рис. 1, 2 приведен пример множества $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Согласно определению 3 $G = (S, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$, как показано на рис. 4.

Когда $n = 0$, нуль-мерные топологические блоки являются восемью независимыми дротиками (рис. 4, а); когда $n = 1$, инволюция α_0 комбинирует 2 соседних дротика, чтобы получить топологические ребра (рис. 4, б); когда $n = 2$, с помощью операции инволюции α_1 эти ребра комбинируются в топологическую грань (рис. 4, в). В геометрическом моделировании формы листа растения нужно использовать только встроенные отображения, для того чтобы встроить геометрические вершины евклидова пространства в соответствующие топологические блоки (рис. 5).

Встроенные отображения $F = f_2 \circ f_1 \circ f_0$ обычно являются линейными функциями, которые определяются во взаимно-однозначных отобра-

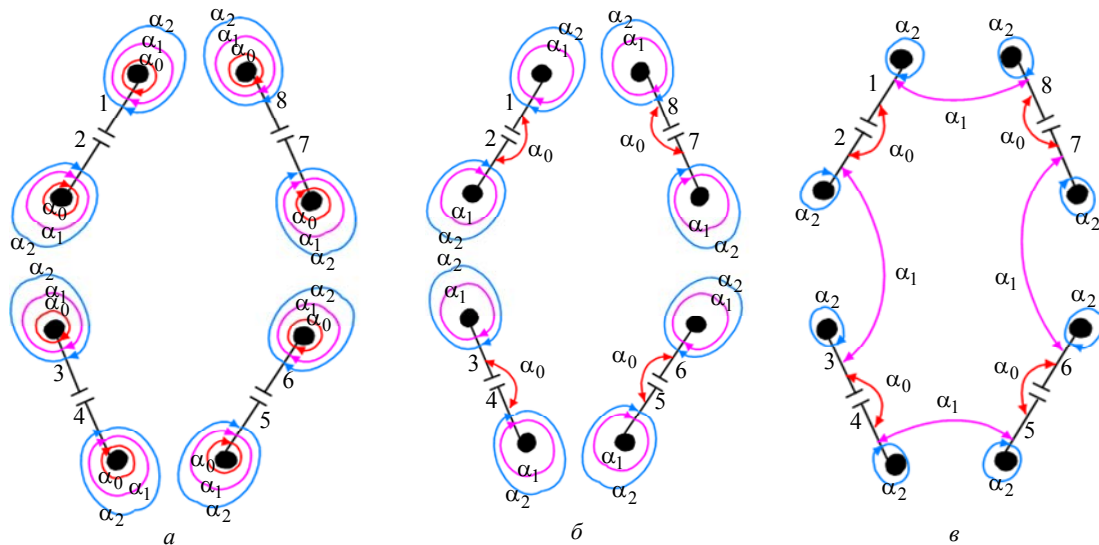


Рис. 4

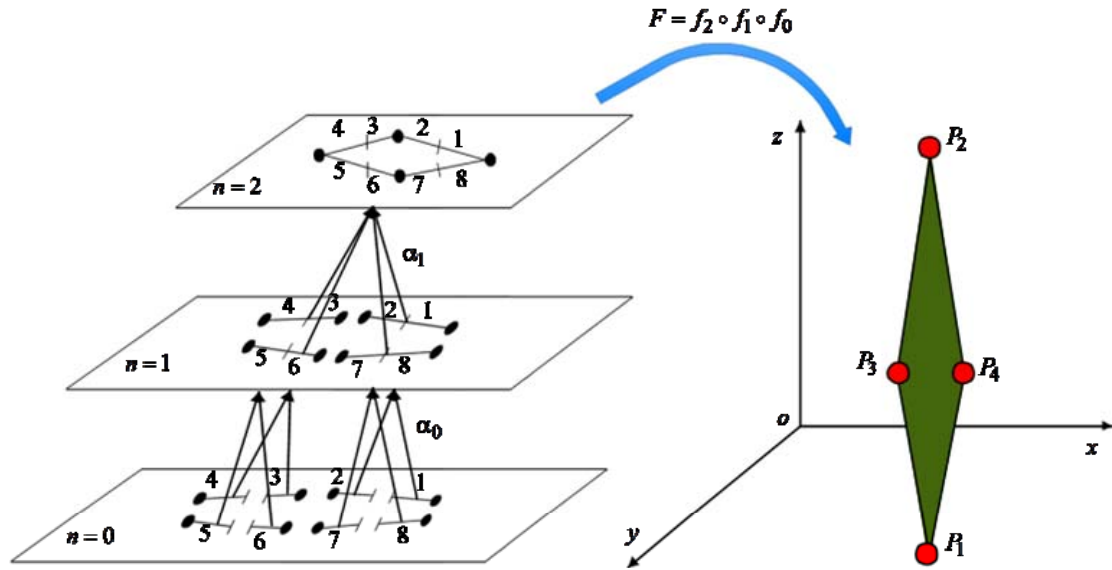


Рис. 5

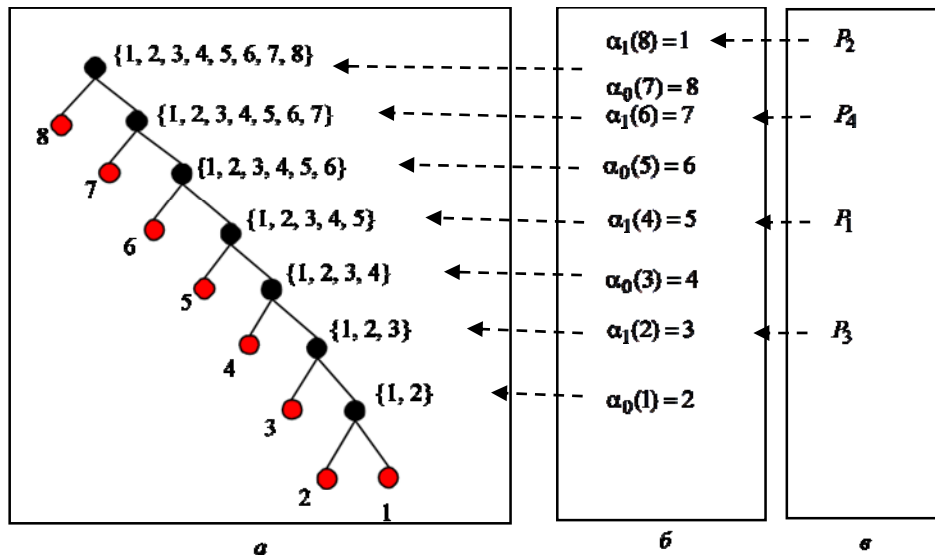


Рис. 6

жениях между топологическими и геометрическими блоками. Отображение f_0 устанавливает соответствие топологических вершин $\langle \alpha_1 \circ \alpha_2 \rangle$ (d) на геометрические вершины P_1, P_2, P_3 и P_4 ; f_1 устанавливает соответствие топологических ребер $\langle \alpha_0 \circ \alpha_2 \rangle$ (d) на геометрические ребра P_1P_3, P_3P_2, P_2P_4 и P_4P_1 ; f_2 устанавливает соответствие топологической грани $\langle \alpha_0 \circ \alpha_1 \rangle$ (d) на геометрическую грань $P_1P_2P_3P_4$.

Все приведенные комбинации с алгебраической точки зрения представляют собой топологический метод геометрического моделирования формы растения для формирования рекурсии в целях реализации функционального программирования, в котором широко используется абстрактный тип данных «моноид».

Моноид (monoid) является полугруппой, содержащей единицу, и записан как $\langle S, \circ, e \rangle$, где S – непустое множество; $\circ$ – бинарная операция, определенная над S ; e – единица [8]. Он удовлетворяет следующим аксиомам:

- (i) замыкание: $S \times S \rightarrow S$;
- (ii) ассоциативность: если $\forall a, b, c \in S$, то $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- (iii) наличие единицы: $\exists e \in S$ и $\forall a \in S$ $a \circ e = e \circ a = a$.

Теорема. n -Gmaps является алгебраической структурой – конечным моноидом.

Доказательство. Так как n -Gmaps может состоять из его конечных под- n -Gmaps, их комбинаторные операции удовлетворяют аксиоме замыкания; комбинация двух n -Gmaps является бинарной операцией, и они удовлетворяют аксиоме ассоциатив-

ности; их аксиоме наличия единицы удовлетворяют n -Gmaps, не содержащие в себе какой-либо дротик.

Используем моноиды при повторном изображении топологической структуры листа, показанной на рис. 2. Как показано на рис. 6, *а*, каждый узел дерева рекурсии является моноидом, а его конечные узлы – дротиками. На рис. 6, *б* показаны операции, которые были использованы при генерировании множеств дровиков для промежуточных узлов. На рис. 6, *в* показаны вершины листа, которые являются встроенными геометрическими вершинами в соответствующих топологических блоках.

Благодаря тому, что на рис. 6, *а* описана топологическая структура при применении моноидов, которые способствуют их рекурсивной реализации в функциональном программировании, можно использовать метод машинного обучения, излагаемый в [9], для получения значений прогнозируемых встроенных геометрических вершин.

Геометрическое моделирование формы листьев растений может быть рассмотрено как аспектно-ориентированное исследование топологического моделирования. Форму листа можно представить как множество топологических блоков, таких, как грани, ребра и вершины. А при проведении исследований можно использовать комбина-

торные операции и встроенные отображения для создания геометрической модели формы листа.

В данной статье рассмотрены следующие задачи:

- 1) предложена концептуализация топологической структуры формы листа растения;
- 2) применен метод n -Gmaps для описания топологической структуры формы листа растения;
- 3) показана связь между методом n -Gmaps и алгебраическими структурами «моноидами».

В качестве преимуществ предложенного метода можно отметить следующее:

- 1) он основан на строгих математических теориях (комбинаторных отображениях, алгебре групп);
- 2) абстрагирование на уровне топологического моделирования выше уровня геометрического моделирования позволяет повторно использовать топологические модели формы листа.

Для создания геометрической модели листа с негладкими краями и получения более точной топологической информации о точках по краям листа, содержащим более четырех точек, требуется сочетание предложенного метода с методом интерполяции или другими методами.

Проект создан при поддержке государственного фонда естественных наук Китая NSFC (грант № 61762048, грант № 61363041).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Plant physiology and development / L. Taiz, E. Zeiger, I. M. Møller, A. Murphy // Massachusetts, USA: Sinauer Associates Inc., 2014. 761 p.
2. Тооминг Х. Г., Гуляев Б. И. Методика измерения фотосинтетически активной радиации. М.: Наука, 1967. 144 с.
3. Ross J. The radiation regime and architecture of plant stands (Tasks for Vegetation Science). Berlin/Heidelberg, Germany: Springer Science & Business Media, 2012. 420 p.
4. Goldman R. An integrated introduction to computer graphics and geometric modeling (Chapman & Hall/CRC Computer Graphics, Geometric Modeling, and Animation Series). Florida, USA: CRC Press, 2009. 574 p.
5. Lienhardt P. Topological models for boundary representation: a comparison with n -dimensional generalized maps // Computer-aided design. 1991. № 23 (1). P. 59–82.

6. Lienhardt P. N -dimensional generalized combinatorial maps and cellular quasi-manifolds // Intern. J. of Computational Geometry & Applications. 1994. № 4 (03). P. 275–324.
7. Lienhardt P. Aspects in topology-based geometric modeling Possible tools for discrete geometry? // 7th Intern. Workshop, DGCI'97 Montpellier, France, Dec. 3–5, 1997. Proc. Springer Berlin/Heidelberg, 1997. P. 33–48.
8. Steinberg B. Representation Theory of Finite Monoids. New York, USA: Springer, 2016. 317 p.
9. Применение метода опорных векторов для задачи восстановления регрессии в обработке данных листьев поливного риса / И Вэньлун, И. В. Герасимов, С. А. Кузьмин, Хэ Хоцзяо, Ян Хунюнь // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2016. № 2. С. 17–22.

Yi Wenlong
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

A TOPOLOGICAL APPROACH TO GEOMETRIC MODELING OF PLANT LEAF SHAPE

Targeting to computer modeling of leaf shape interaction with eco-physiological factors, the author constructs a geometric model for a leaf shape by means of a topological approach and an algebraic tool. The topological structure of the leaf shape could be regarded as an invariant in the course of leaf growth, so the author divides information of a leaf shape into topological and geometric parts, and then applies the method n -Gmaps and algebraic structures of monoids to build a topological model of leaf shape, and finally adds the geometric vertexes coordinates of the leaf shape to the corresponding topology units by embedded mappings to obtain the geometric model of the leaf shape. The approach introduced in the paper is conducive to improving abstraction of the leaf shape model and increasing re-utilization of the model; the combination of the topologies helps to reduce errors and rounding-off in the numerical calculation in the geometric modeling and further make the modeling more accurate.

Geometric modeling, topology conceptualization, n -Gmaps, monoids, geometric model of plant leaf shape