

Ya. V. Ivanova, V. I. Zubkov
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

NUMERICAL CALCULATION OF TRANSPARENCY COEFFICIENT FOR A DOPED HETEROSTRUCTURE WITH QUANTUM WELL BY METHOD OF INTERNAL PROBLEM

The numerical method of determining the transparency coefficient for a heterostructure with a single quantum well, based on solving the problem for the quantum box inner region, is developed. The analysis of calculations has allowed interpreting the data of temperature admittance spectra for samples with quantum well $\text{In}_{0.29}\text{Ga}_{0.71}\text{As}/\text{GaAs}$. The effect of resonant tunneling has been revealed, arising in the upper region of the quantum well, which presents a two-barrier structure due to identical doping of quantum well cladding layers. The calculations correlate well with the experimental data. At the increase of applied reverse bias the probability of carriers resonant tunneling from the quantum well drops sharply because of the symmetry violation of potential barriers and the corresponding drop in their transparency coefficient.

Quantum well, potential barriers, transparency coefficient, resonant tunneling, admittance spectroscopy, charge carrier emission

УДК 519.6 + 530.1

Х. Х. Муминов
Академия наук Республики Таджикистан

Ф. Ш. Шокиров
Физико-технический институт им. С. У. Умарова АН РТ

Динамика взаимодействия топологических солитонов в обращенном времени

Приведены результаты численного моделирования взаимодействия топологических солитонов (2 + 1)-мерной $O(3)$ нелинейной сигма-модели в обращенном времени. На первом этапе разработаны модели взаимодействий топологических вихрей, где в зависимости от динамических параметров наблюдаются процессы их распада на локализованные возмущения и поэтапной аннигиляции. Также рассмотрены модели поэтапной аннигиляции топологических вихрей при их взаимодействии с 180-градусными доменными границами. На основе полученных моделей разработаны начальные условия для проведения численного моделирования процессов взаимодействия в обращенном времени. Получены модели, описывающие полное восстановление исходного топологического поля взаимодействующих солитонов при объединении локализованных возмущений и волн излучений. Также получены модели, описывающие процессы формирования топологических вихрей в плоскости доменной границы и их последующей эмиссии. Таким образом, подтверждено свойство Т-инвариантности исследуемой теоретико-полевой модели. Численные расчеты проведены в расслоенном пространстве на основе методов теории конечных разностных схем с использованием свойств стереографической проекции. Эксперименты проведены при различных значениях индекса Хопфа топологических вихрей. Предложен комплексный программный модуль, реализующий специальный алгоритм численного расчета эволюции взаимодействия пространственно-временных топологических структур в обращенном времени.

Сигма-модель, разностная схема, расслоенное пространство, Т-инвариантность, топологический солитон, численное моделирование

Наиболее общей характеристикой физических законов является их симметрия, соответствующая законам сохранения, при этом понятие симметрии имеет более широкий и глубокий смысл, чем, например, в обычной геометрии [1]. Рассмотрим

свойство Т-инвариантности (2 + 1)-мерной суперсимметричной $O(3)$ нелинейной сигма-модели (НСМ). Предложенная впервые на рубеже 50–60-х гг. XX в. для эффективного описания природы безмассовых возбуждений теория НСМ при-

меняется как надежный теоретический базис для проведения исследований в упрощенных условиях. Как было впервые отмечено А. М. Поляковым [2], существует глубоко коренящаяся аналогия между четырехмерными теориями Янга–Миллса и двумерными НСМ. Таким образом, НСМ являются теоретическими лабораториями для апробации методов и подходов, разработанных для задач реальной физики [3].

Исследование свойств Т-симметрии физических явлений имеет важное значение в прикладных задачах (см., например, [4]–[12]), в т. ч. в медицинской визуализации, эхоимпульсном контроле, разработке нанофотонных устройств, переключаемых узкополосных оптических изоляторов, а также в подводной акустике и исследовании экстремальных волн. В [4] сообщается о первых экспериментах, показывающих обратимость многократно рассеянных акустических волн. Обнаружено, что при моделировании процессов в обращенном времени ($t' \rightarrow -t$) волны сходятся к их источнику и восстанавливают исходную форму. В [5] метод обращения времени (ОВ) применен для восстановления сильно локализованных возмущений (экстремальных волн) дисперсионных сред в рамках нелинейного уравнения Шредингера. Показано, что сильно локализованные нелинейные волны могут быть экспериментально восстановлены методом ОВ и в других нелинейных дисперсионных средах, управляемых нелинейным уравнением Шредингера, таких как оптика, плазма и конденсат Бозе–Эйнштейна. Метод воспроизведения нечувствительных к дисперсии интерферограмм Хонга–У–Манделы на основе свойств Т-симметрии квантовой механики предложен в [6]. В [7] предложена квазидвумерная схема двухслойной системы фермионов погруженной в конденсат Бозе–Эйнштейна для реализации Т-инвариантных топологических сверхтекучих сред. Результаты указанной работы показывают, что экспериментальную реализацию топологической сверхтекучей жидкости с Т-симметрией можно провести в холодной атомной системе. Важные с практической точки зрения результаты для разработки нелинейных изоляторов, метаповерхностей и других нанофотонных устройств представлены в [8]. Работы [9], [10] посвящены исследованиям определенных величин (индикаторов аномалий), определяющих аномалию Т-инвариантных топологически упорядоченных состояний. Аномалия в данном случае имеет смысл невозможности ре-

лизации вышеуказанных состояний в строго двумерных системах. Интересные исследования в области разработки так называемых фотонных устройств для использования в квантовых материалах и процессорах проведены в [11]. Также следует отметить [12], где авторы описывают метод разработки высокочувствительных датчиков для регистрации процессов физики высоких энергий вне рамок стандартной модели.

Приведенный обзор работ отражает лишь часть теоретических исследований и практических экспериментов, проводимых на основе Т-инвариантных свойств физических процессов. Не упомянуты применения методов ОВ в моделировании сейсмологических и геофизических процессов, в неразрушающем контроле твердых материалов [13], исследовании высокотемпературных сверхпроводников и т. д. Свойства Т-инвариантности $O(3)$ НСМ исследуются рассмотрением процессов взаимодействия, распада и аннигиляции ее топологических решений. Поскольку операция ОВ ($t' \rightarrow -t$) является транспонированием начальных и конечных состояний системы, его действие не приводит к новым характеристикам исследуемых квазичастиц – топологических солитонов (ТС). Напомним, что плотность функции Лагранжа и гамильтониан исследуемой $O(3)$ НСМ в стандартной (изоспиновой) параметризации можно записать в следующем виде (см., например, [14–18]):

$$\mathcal{L} = g \left[\partial_\mu s_a \partial^\mu s_a - (1 - s_3^2) \right], \quad (1)$$

$$\mathcal{H} = g \left[(\partial_0 s_a)^2 + (\partial_1 s_a)^2 + (\partial_2 s_a)^2 + 1 - s_3^2 \right], \quad (2)$$

где $g = 1/2$; $\mu = 0, 1, 2$; $a = 1, 2, 3$; s_1, s_2, s_3 – координаты единичного изовектора (триплета реальных скалярных полей)

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3)$$

В данном случае наложено ограничение $\mathbf{S}^2 = 1$ и длина изовектора (3) является постоянной величиной; $\theta(t)$ и $\varphi(t)$ – углы Эйлера (рис. 1, а). $O(N)$ НСМ в двумерном пространстве-времени – это теория n -полей σ^i ($i = 1, \dots, n$), определенных на единичной сфере [3]. Таким образом, n -поле исследуемой модели (1) описывается движением точки на блоховской сфере

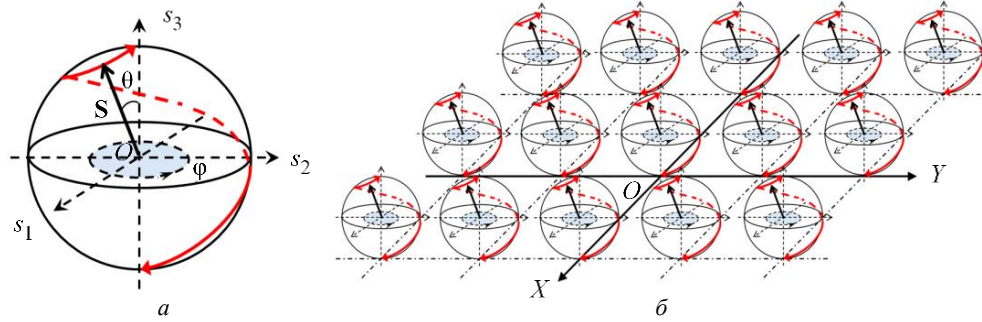


Рис. 1

$S^2 = SU(2)/U(1) = SO(3)/SO(2)$, (4)
 эквивалентной движению конца изовектора \mathbf{S} (рис. 1, *a*). При этом существует взаимно однозначное соответствие между сферой S^2 и фактор-группами $SU(2)/U(1)$ (специальной унитарной группы $SU(2)$ по унитарной группе $U(1)$) и $SO(3)/SO(2)$ (специальной ортогональной группы $SO(3)$ по группе $SO(2)$).

Первое слагаемое в (1) является известной функцией Лагранжа HCM для изотропного случая [16], [18]. Исследование проведено в рамках анизотропной $O(3)$ HCM, где анизотропия выбрана в направлении s_3 -компоненты. Таким образом, состояния исследуемой модели (1) с нулевой энергией (вакуумные состояния) описываются в расслоенном пространстве (рис. 1, *б*) изовектором $\mathbf{S}(0, 0, \pm 1)$. Симметрией модели является $O(3)$ – симметрия динамики изовектора в сфере (4).

Функция Лагранжа $O(3)$ HCM не зависит явно от времени и содержит только четные степени производных, поэтому применение операции Т не должно привести к изменению уравнения движения. Следовательно, каждое физическое состояние, полученное в рамках $O(3)$ HCM в момент времени t , при ОВ ($t' \rightarrow -t$) переходит в Т-инвариантное состояние с обращенными направлениями скоростей. Течение времени t направлено на реализацию процессов, обладающих наибольшей вероятностью, но физические законы не запрещают осуществление также маловероятных процессов.

Таким образом, свойство Т-инвариантности $O(3)$ HCM допускает существование последнего состояния, а также обращенного во времени движения. На примере построения численных моделей взаимодействия квазичастиц – топологических вихрей и доменных границ (ДГ) в ОВ ($t' \rightarrow -t$) непосредственно подтверждено свойство Т-симметрии исследуемой сигма-модели.

Разработан комплекс компьютерных программ на основе специального алгоритма моделирования процессов взаимодействия частицеподобных решений нелинейных уравнений теоретико-полевых моделей в ОВ.

В [19] в рамках $O(3)$ HCM были получены модели двухсолитонных взаимодействий топологических солитонов-вихрей (ТС) следующего вида [20]:

$$\theta(t) = 2\text{arctg}\left(\frac{R}{r}\right)^{Q_t}; \quad \varphi(t) = Q_t\chi - \omega\tau; \quad (5)$$

$$R^2 = x^2 + y^2; \quad \cos\chi = \frac{x}{r}; \quad \sin\chi = \frac{y}{r},$$

где Q_t – топологический заряд [1]–[3], [20]–[22] (степень отображения, индекс Хопфа); χ – угловой параметр; R – радиус локализации солитона; ω – частота вращения изовектора \mathbf{S} в пространстве сферы S^2 ; r – вариационный параметр; τ – шаг по времени.

На рис. 2 приведены иллюстрации плотности энергии (*a*), изовекторной структуры (*б*) и ее проекции на плоскость L (*в*) для ТС (5) $O(3)$ HCM, обладающих топологическими зарядами $Q_t = 1 \dots 4$. Все иллюстрации приведены в безразмерных величинах, так как в данных экспериментах используемые уравнения $O(3)$ HCM носят универсальный характер, безотносительно от приложений к различным областям физики. Следует также заметить, что при математическом моделировании именно безразмерные величины могут выявить комплексный характер и общие свойства исследуемых процессов. В проведенных экспериментах единственной физически измеряемой величиной является задаваемая преобразованиями Лоренца скорость движения солитонов ($\mathbf{v}(t_0)$). В данном случае, например, для задач квантовой теории поля можно использовать планковские единицы измерения, а для задач других областей

физики целесообразно использование соответствующих производных систем единиц. Таким образом, разработанные методы исследования и полученные модели могут быть использованы специалистами области, например, элементарных частиц или других областей физики и на основе расчетных данных вычислены конкретные величины.

При $Q_t = 1$ (скирмион [16]) плотность энергии (DH) (2) вихря (5) сосредоточена в центральной части области моделирования $L[1001 \times 1001]$. При $Q_t \geq 2$ DH топологических вихрей (5) сосредоточена в кольцеобразной форме (рис. 2, а), которая является доменной границей между противоположными направлениями поля ($\pm s_3$). Увеличение значений Q_t приводит к сужению ширины данной доменной границы и увеличению плотности ее энергии. Из рис. 2, б видно, что для каждого случая $Q_t = 1 \dots 4$ в изовекторной структуре ТС (5) наблюдаются вихревые структуры – так

называемые локальные завихренности поля [22], количество которых равно значению Q_t . В центральной части ТС (а также в центрах вихревых структур) векторы изотопического спина \mathbf{S} сонаправлены с положительным направлением оси Z : $s_3 \rightarrow 1$. На краях области моделирования расслоенного пространства (рис. 1, б) изовекторы направлены в противоположную сторону: $s_3 \rightarrow -1$. Переход между данными состояниями происходит прецессией изовектора \mathbf{S} . Таким образом, ТС (5) являются топологическими возмущениями поля, соединяющими вакуумные состояния $\theta(t) = 0, \pi$ (рис. 1, а).

Для численных экспериментов использованы ТС (5), обладающие значениями индекса Хопфа $Q_t = 1 \dots 4$. В данном случае для координат единичного изовектора \mathbf{S} справедливы следующие выражения:

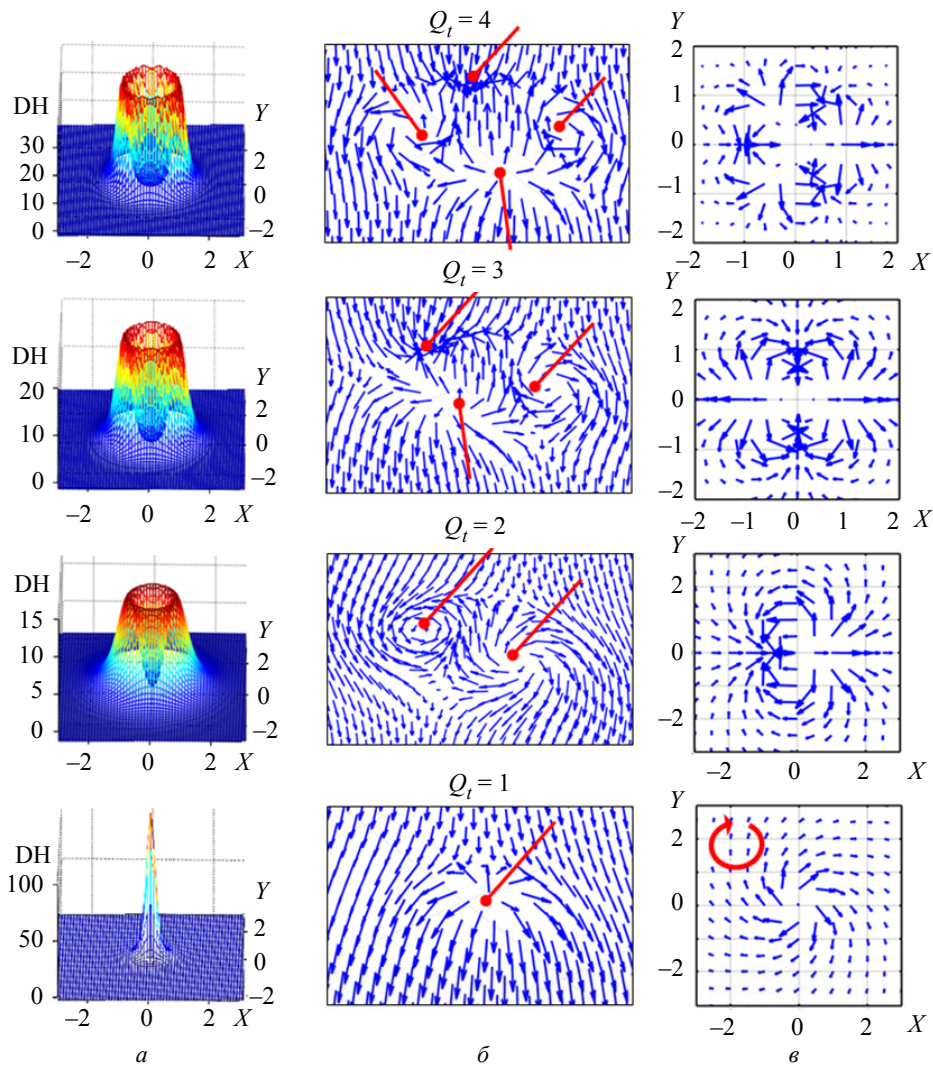


Рис. 2

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{Q_t=1} &= \lambda_1^+ \begin{pmatrix} \xi_1^1 \cos \tau + \xi_1^2 \sin \tau \\ \xi_1^2 \cos \tau - \xi_1^1 \sin \tau \\ \lambda_q^- \end{pmatrix}; \\ \mathbf{S}_{Q_t=2} &= \lambda_2^+ \begin{pmatrix} \xi_2^1 \cos \tau - \xi_2^2 \sin \tau \\ \xi_2^2 \cos \tau - \xi_2^1 \sin \tau \\ \lambda_q^- \end{pmatrix}; \\ \mathbf{S}_{Q_t=3} &= \lambda_3^+ \begin{pmatrix} \xi_3^1 \cos \tau - \xi_3^2 \sin \tau \\ -\xi_3^2 \cos \tau - \xi_3^1 \sin \tau \\ \lambda_q^- \end{pmatrix}; \\ \mathbf{S}_{Q_t=4} &= \lambda_4^+ \begin{pmatrix} \xi_4^1 \cos \tau + \xi_4^2 \sin \tau \\ \xi_4^2 \cos \tau - \xi_4^1 \sin \tau \\ \lambda_q^- \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_q^+ &= 2(1+r^2q)^{-1}; \quad \lambda_q^- = 2^{-1}(1-r^2q), \quad q=1\dots 4, \\ \xi_1^1 &= x; \quad \xi_1^2 = y; \quad \xi_2^1 = x^2 - y^2; \quad \xi_2^2 = 2xy; \\ \xi_3^1 &= x^3 - 3xy^2; \quad \xi_3^2 = y^3 - 3x^2y; \\ \xi_4^1 &= x^4 - 6x^2y^2 + y^4; \quad \xi_4^2 = 4x^3y - 4xy^3. \end{aligned}$$

В [19] были получены модели распада взаимодействующих ТС (2 + 1)-мерной O(3) НСМ на локализованные возмущения, выявлено свойство сохранения суммы топологического заряда и предложен метод определения топологического заряда локализованных возмущений. В [23] исследована изоспиновая динамика решений (5) и определены условия проявления дальнедействующих сил при их взаимодействии, а также полной аннигиляции поэтапным излучением энергии. В [23] было показано, что при столкновении ТС (5) с ТС следующего вида:

$$\begin{aligned} \theta(t) &= 2 \arctg\left(\frac{R}{r}\right)^{Q_t}, \quad \varphi(t) = Q_t \chi - \omega t, \\ R^2 &= x^2 + y^2, \quad \cos \chi = -\frac{x}{r}, \quad \sin \chi = \frac{y}{r} \end{aligned} \quad (6)$$

(отличающегося знаком косинуса углового параметра χ) наблюдается процесс их поэтапной аннигиляции. При этом в каждом этапе излучается энергия, эквивалентная единице топологического заряда ($Q_t=1$), в виде пары линейных волн воз-

мущений (с $Q_t=1/2$), распространяющихся аналогично предыдущему случаю со скоростью $c=1$. Как было показано в [23], условием поэтапной аннигиляции ТС вида (5) является сонаправленность ($\mathbf{S}(\uparrow\uparrow)$) и синхронное скоррелированное движение (\mathbf{S}_{cor}) изовекторов \mathbf{S} (3) взаимодействующих ТС в области столкновения: $\mathbf{S}(\uparrow\uparrow) \cap \mathbf{S}_{\text{cor}}$. При этом поэтапная аннигиляция происходит при любых скоростях движения ТС. Заметим также, что условием дальнедействия двухсолитонных взаимодействий ТС вида (5) является $\mathbf{S}(\uparrow\downarrow) \cap \mathbf{S}_{\text{cor}}$ [23].

В [24] в рамках O(3) НСМ были получены модели взаимодействия топологических вихрей (5) с известными топологическими решениями уравнения синус-Гордона в виде ДГ

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} = e^{B_1 w/k_1(x-x_0) + B_2 w/k_2(y-y_0)}, \quad \varphi(t) = \epsilon. \quad (7)$$

Заметим, что решение (7) при $\epsilon=0, \pi$ и $\epsilon = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ описывает динамику так называемых нееловских (N) и блоховских (B) ДГ соответственно:

$$\mathbf{S}_{N(0,\pi)} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} \pm 2e^x \\ 0 \\ 1 - e^{2x} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}_{B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 2e^x \\ 1 - e^{2x} \end{pmatrix},$$

где $\Lambda = 1 + e^{2x}$. В данном случае изоспиновые параметры s_i ($s_i s_i = 1$, $i=1, 2, 3$) соответствуют координатам единичного изовектора (4). В [24] было проведено численное исследование моделей двухсолитонных взаимодействий топологических решений вида (5) и (6) (при $\epsilon=0$). Результаты каждой серии ($Q_t=1\dots 6$; $\epsilon=0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$) экспериментов в [24] можно охарактеризовать единым образом – поэтапным распадом топологических вихрей (5) на локализованные возмущения с половинными ($Q_t=1/2$) значениями топологического заряда. В каждом этапе процессов распада наблюдается излучение энергии топологического вихря, эквивалентное единичному топологическому заряду ($Q_t=1$), в виде двух локализованных возмущений, движущихся вдоль плоскости ДС со скоростью $c=1$ (скорость света в вакууме).

Как было отмечено ранее, метод ОВ может быть применен к каждому явлению, описываемому уравнениями, которые содержат только производные четного порядка по времени. Для каждого решения $z(r, t)$ существует второе решение вида $z(r, -t)$, так как совпадают их вторые производные. Другое ограничение для настоящего подхода требует, чтобы среда была недиссипативной. Для реализации данного условия необходимо восстановить излучение энергии. В рассматриваемых экспериментах в моделях с ОВ восстанавливаются волны излучений в рамках области моделирования $L(x, y)$. Но восстановление волн, поглощенных граничными условиями (En_{los}), не было предусмотрено, так как они эквивалентны пренебрежительно малой части общей энергии исследуемых моделей: $En_{los} \in (10^{-3}, 10^{-2})$.

Таким образом, рассмотрена задача построения моделей, описывающих обратную по времени (Т-инвариантную) эволюцию процессов (двухсолитонного) лобового столкновения, распада и аннигиляции ТС вида (5)–(7). Использован подход приближения разностных схем [25] с применением алгоритма и численной схемы, которые были предложены в [17] для моделирования стационарного ТС (5) в рамках $O(3)$ НСМ. Результаты экспериментов подтверждают свойство Т-инвариантности $O(3)$ НСМ. Разработанные алгоритмы, численные схемы и компьютерные коды объединены в пакет прикладных программ, позволяющих проведение исследований Т-инвариантных свойств $(2 + 1)$ -мерных теоретико-полевых моделей класса $O(3)$ НСМ.

Далее приведены полученные при ОВ модели, где структура их исходных состояний восстанавливается с достаточно высокой степенью точности.

Взаимодействие и распад ТС в обращенном времени. Как было показано в предыдущих исследованиях (см., например, [18], [19], [26]), при моделировании двухсолитонных лобовых столкновений ТС (5), движущихся с относительно малыми скоростями, наблюдаются процессы их столкновения и взаимного отражения. Но при увеличении скорости движения взаимодействующих вихрей происходит их распад на локализованные возмущения (ЛВ), разлетающиеся в стороны от точки столкновения. При этом ЛВ также обладают топологическими

зарядами: $Q_t(\text{ЛВ}) < Q_t(\text{ТС})$. Общим свойством процессов распада ТС на ЛВ является сохранение суммы значений Q_t [18], [19]: $\sum Q_t(\text{ЛВ}) \equiv \equiv Q_t(\text{ТС}_1) + Q_t(\text{ТС}_2)$.

На рис. 3, а приведен один из примеров реализации численной модели лобового столкновения ТС (5), обладающих равными значениями $Q_t = 3$ и движущихся во встречных направлениях со скоростью $v(t_0) \approx \pm 0.287$. При меньших значениях $v(t_0)$ энергия взаимодействующих ТС не является достаточной для осуществления процессов их распада. На рис. 3, а описан процесс лобового столкновения и распада данных вихрей на ЛВ, которые также обладают топологическим зарядом: $Q_t = 1$ (два ЛВ) и $Q_t = 2$ (два ЛВ). На всех иллюстрациях данного типа отображены значения плотности энергии вихрей – ДН и ее контурной проекции на двумерную область моделирования $L(2002 \times 1001)$. В данном случае ТС (5) являются абсолютно идентичными квазичастицами и обладают свойством киральности [18], поэтому взаимодействие и разлет ЛВ происходят по симметричным траекториям.

На втором этапе экспериментов конечные состояния (в случае рис. 3, а: $t'_{0 \pm \tau} = 38.4 \pm \tau$) полученной модели распада ТС были использованы в качестве начальных данных для проведения исследований в ОВ ($t' \rightarrow -t$). На рис. 3, б приведены иллюстрации, описывающие результаты численного моделирования процессов распада ТС (5), описанных на рис. 3, а в ОВ. При $t' \geq 14.4$ ЛВ движутся в направлении центра области столкновения, где объединяются и формируют единое возмущение поля. Далее наблюдается разделение сформированного единого возмущения поля на два ТС ($t' \approx 23.4$), движущихся в $\pm x$ -направлениях ($t' \rightarrow 38.4$).

Данные иллюстрации показывают, что полученная в ОВ модель процессов столкновения и распада ТС (5) (рис. 3, б) с достаточно высокой точностью является симметричной по отношению к исходной модели (рис. 3, а). При этом в случае рис. 3, б наблюдается незначительная потеря энергии системы относительно исходной модели (рис. 3, а): $En_{los} \approx 1.12\%$.

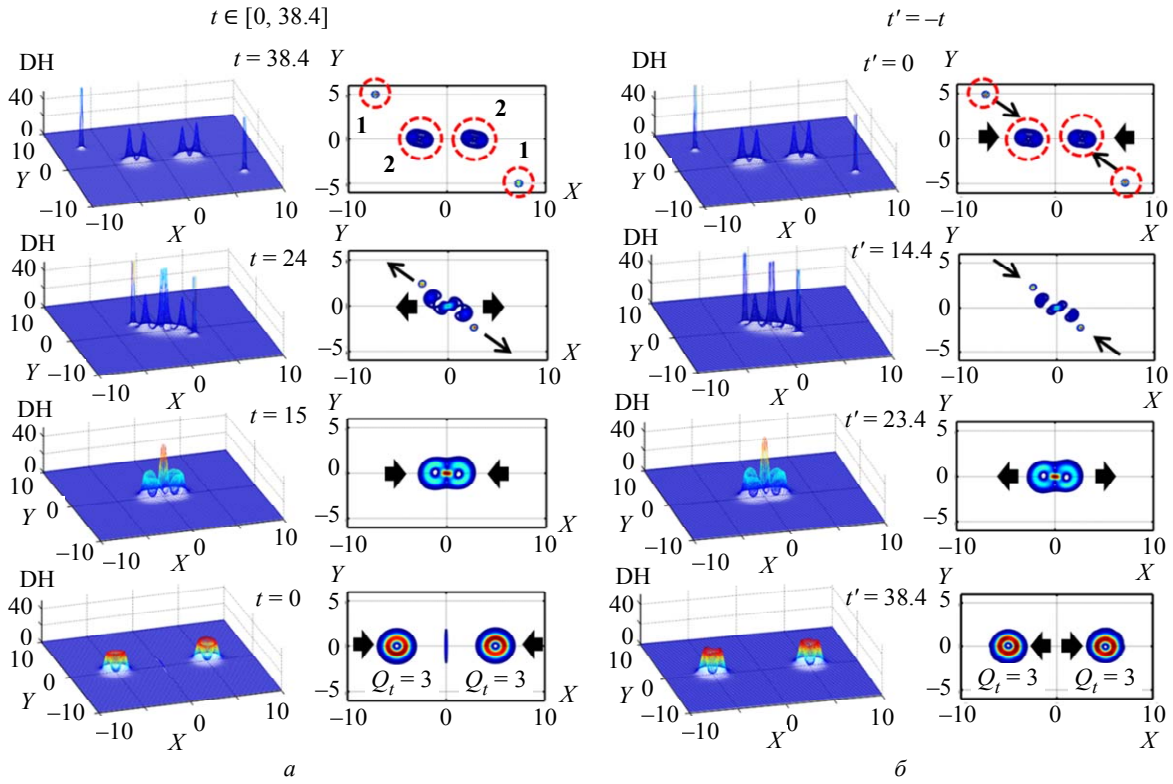


Рис. 3

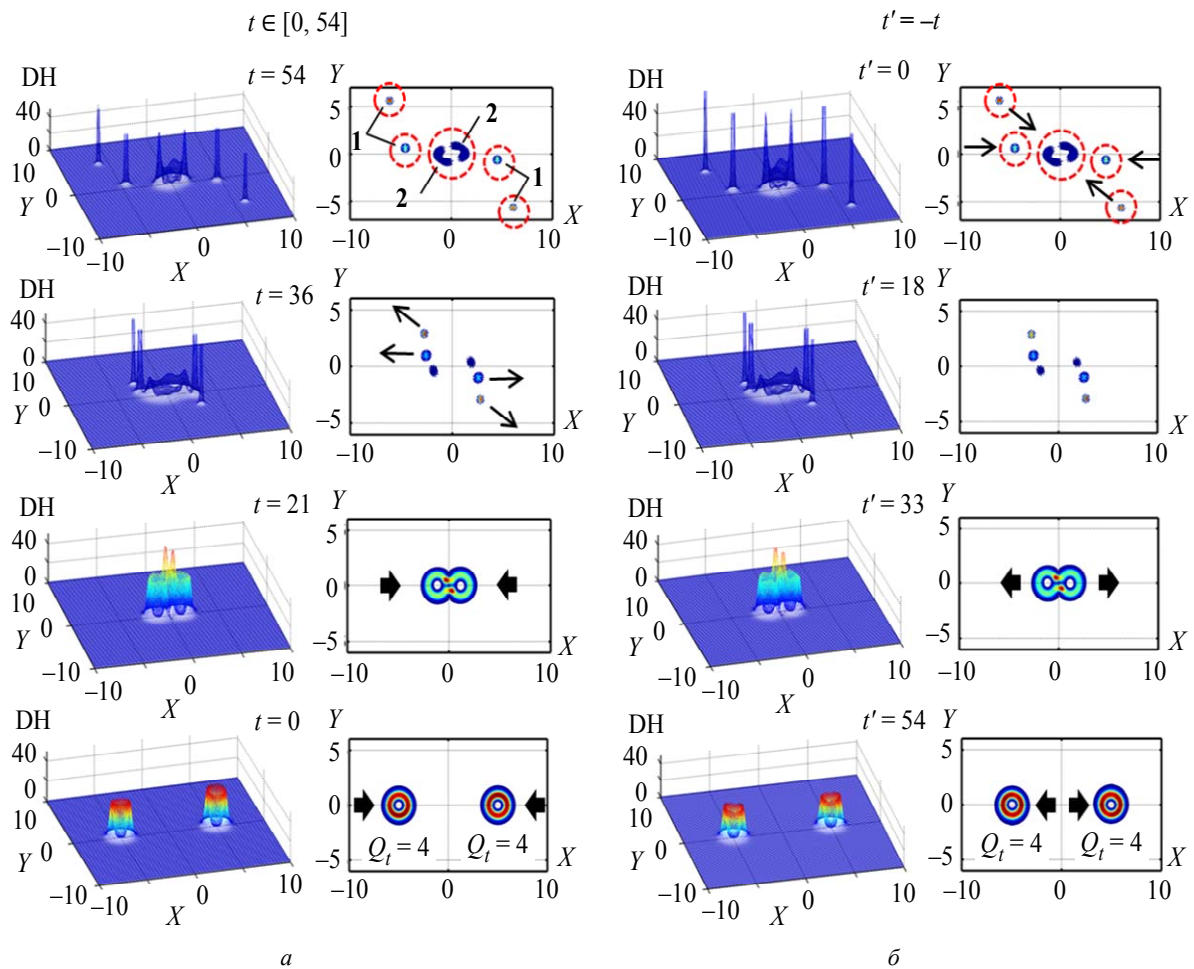


Рис. 4

На рис. 4, *a* приведена аналогичная предыдущему примеру модель лобового столкновения ТС (5) с $Q_t = 4$ при $v(t_0) \approx \pm 0.196$. Наблюдается распад обеих ТС при столкновении на 3 пары ЛВ: с $Q_t = 1$ (4 ЛВ) и $Q_t = 2$ (2 ЛВ). Аналогично предыдущему случаю было проведено моделирование данного процесса в ОБ: $t'_{0\pm\tau} = 54 \pm \tau$ (рис. 4, *б*). В данном случае также наблюдается объединение 6 отдельных ЛВ в единое возмущение поля с последующим формированием двух ТС, которые, отделяясь, начинают движение в $\pm x$ -направлениях.

Данные иллюстрации показывают, что полученная в ОБ модель столкновения и распада ТС (5) (рис. 4, *б*) также с достаточно высокой точностью является симметричной по отношению к исходной модели (рис. 4, *a*). При этом потеря общей энергии системы на излучение равна $En_{\text{los}} \approx 0.91\%$.

Поэтапная аннигиляция ТС в обращенном времени. На рис. 5 приведены результаты исследований свойств Т-инвариантности процессов взаимодействия ТС (5) и (6) с $Q_t = 3$ и движущихся во встречных направлениях со скоростью $v(t_0) \approx \pm 0.196$. На рис. 5, *a* приведена модель лобового столкновения и аннигиляции данных вихрей, полученная в сетке $L[2002 \times 3001]$.

На всех иллюстрациях данного типа отображены значения ДН взаимодействующих ТС и ее контурной проекции на двумерную область L . В данном случае наблюдается поэтапная аннигиляция ТС периодическим излучением энергии в виде 3 пар локализованных волн возмущений.

На втором этапе экспериментов конечные состояния (в случае рис. 5, *a*: $t'_{0\pm\tau} = 31.2 \pm \tau$) полученной модели использованы в качестве начальных данных для проведения исследований процессов аннигиляции ТС в ОБ ($t' \rightarrow -t$).

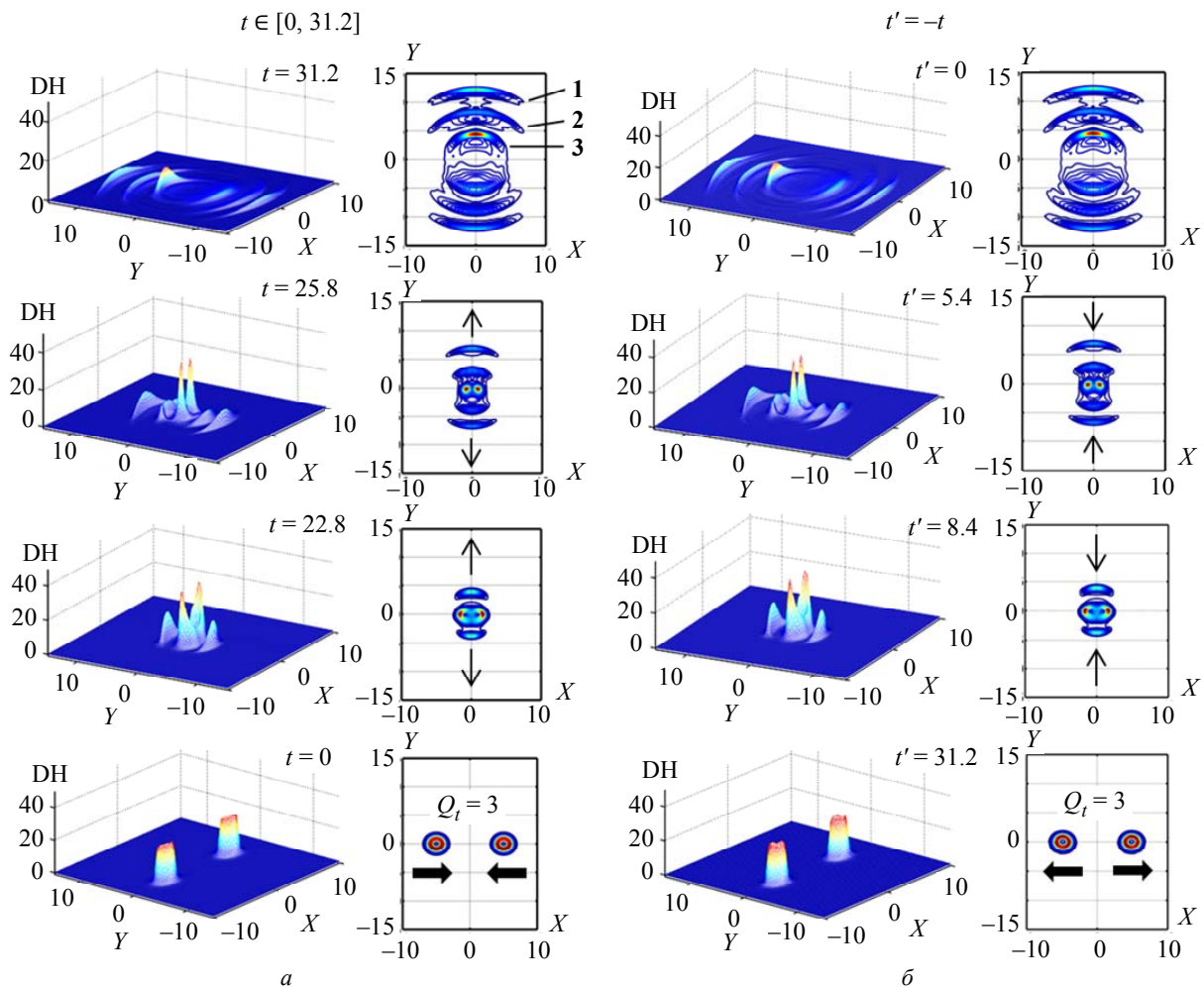


Рис. 5

На рис. 5, б приведены иллюстрации полученных результатов. При $t' \approx 5.4$ первая пара волн фронтальной части, взаимодействуя, формирует хорошо локализованное связанное состояние в виде двух ТС, каждый из которых обладает $Q_t = 1$. Аналогичный процесс происходит при $t' \approx 8.4$ и $t' \approx 12.6$, таким образом, значения топологических зарядов обоих ТС восстанавливаются до исходных $Q_t = 3$. Далее сформированные ТС отделяются и начинают движение в $\pm x$ -направлениях. Данные иллюстрации показывают, что полученная в ОВ модель процессов столкновения и аннигиляции ТС (5) и (6) (рис. 5, б) явля-

ется Т-симметричной по отношению к исходной модели (рис. 5, а). При этом в случае рис. 5, б эволюция системы происходит практически без потери энергии: $E_{\text{loss}} \rightarrow 0$.

На рис. 6, а приведена аналогичная предыдущему примеру модель лобового столкновения и поэтапной аннигиляции ТС (5) и (6) в случае $Q_t = 4$ ($v(t_0) \approx \pm 0.196$). Процесс поэтапной аннигиляции обоих ТС сопровождается излучением волн возмущений в 4 периода. Аналогично предыдущему случаю было проведено моделирование данного процесса в ОВ: $t'_{0 \pm \tau} = 31.5 \pm \tau$ (рис. 5, б).

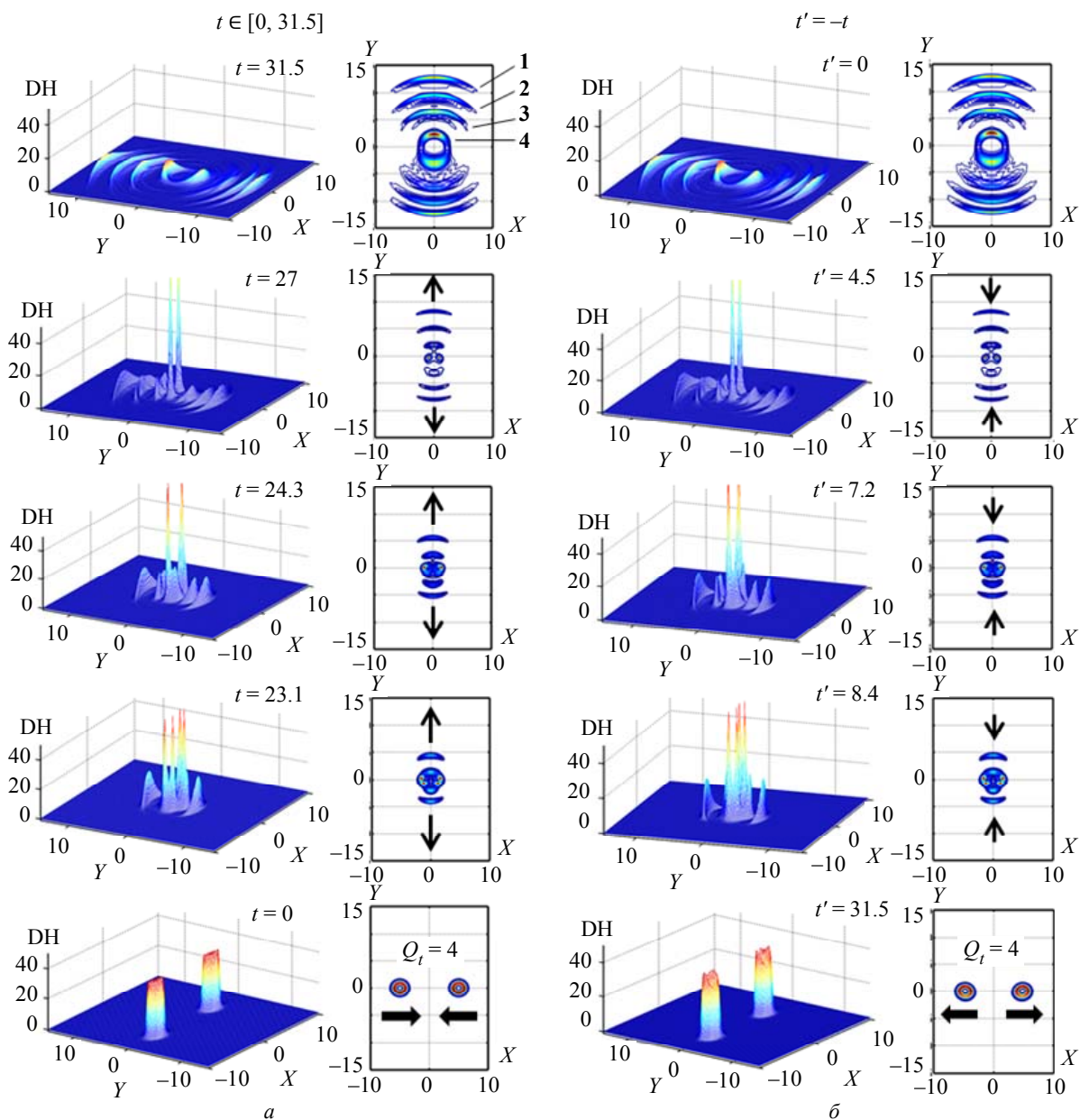


Рис. 6

В данном случае также наблюдается концентрация волн излучений в области столкновения и поэтапное формирование двух ТС с $Q_t = 4$, которые, отделяясь, начинают движение в $\pm x$ -направлениях. Таким образом, полученная в ОВ модель также с достаточно высокой точностью является Т-симметричной по отношению к исходной модели (рис. 6, а). При этом потеря энергии системы взаимодействующих ТС в обоих случаях незначительна $E_{\text{loss}} \rightarrow 0$.

Взаимодействие ТС с ДГ в обращенном времени. Как было указано ранее, в предыдущих исследованиях (см., например, [24]) были получены модели распада топологических вихрей (5) в плоскости ДГ вида (7). На рис. 7 приведены результаты ДН и E_n численных экспериментов для случаев: а - $Q_t = -1$; б - $Q_t = -2$; в - $Q_t = -3$. Как было указано ранее, ТС при взаимодействии с ДГ распадается на Q_t -пары локализованных возмущений, движущихся вдоль плоскости ДГ. На втором этапе экспериментов аналогично предыдущим случаям процесс взаимодействия ТС и ДГ был смоделирован в ОВ ($t' \rightarrow -t$). Таким

образом, были получены модели, описывающие формирование ТС вида (5) в плоскости ДГ с последующей их эмиссией ДГ (рис. 8).

На рис. 8, а приведена эволюция системы (ДН и E_n), состоящей из двух локализованных возмущений, расположенных в плоскости ДГ в конечном расстоянии друг от друга. Данная система при $t' = 0$ эквивалентна состоянию модели, приведенной на рис. 6, а при $t = 50.7$. В результате серии численных экспериментов была получена модель, описывающая процессы формирования в плоскости ДГ (7) топологического возмущения при объединении двух локализованных возмущений. Анализ изоспиновой структуры сформированного топологического возмущения показывает ее полную идентичность с изоспиновой структурой топологического вихря (5) при $Q_t = -1$. При этом сформированный топологический вихрь обладает достаточной энергией для отделения от ДС (рис. 8, а, при $t' \rightarrow 60$).

На рис. 8, б и в приведены аналогичные эксперименты по формированию на плоскости ДС (7) топологических вихрей (5) в случаях $Q_t = -2$

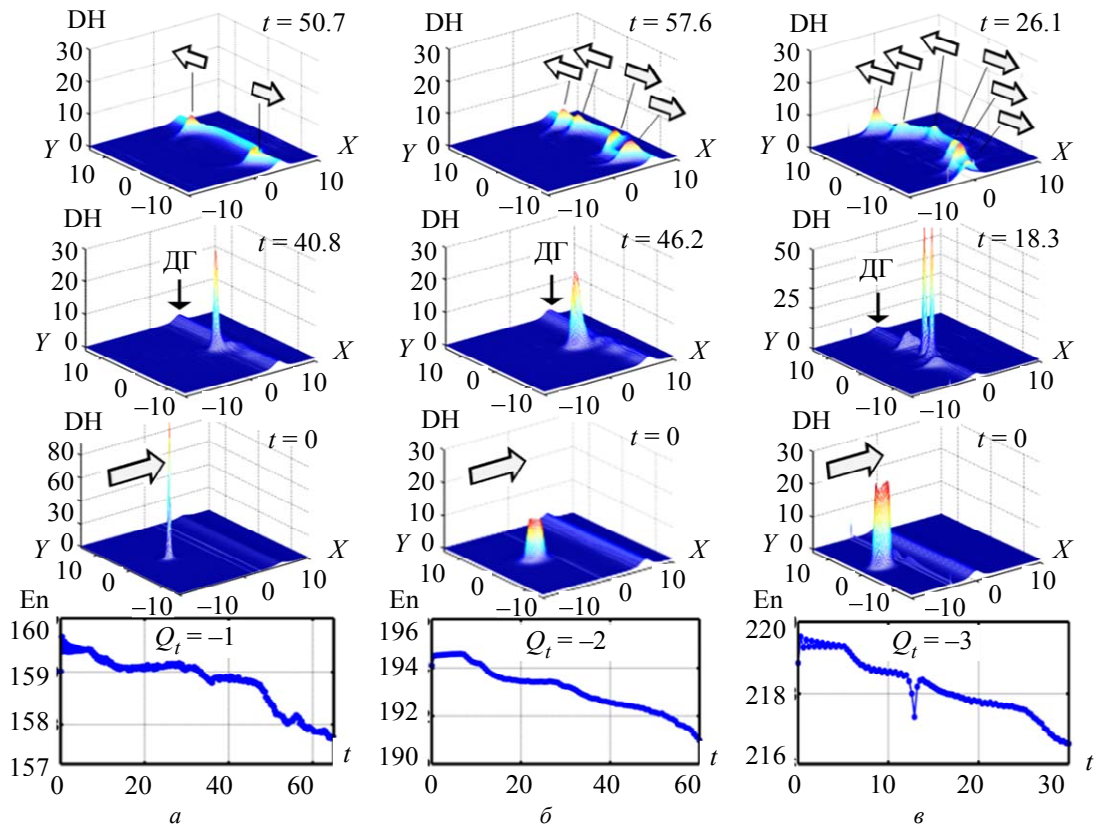


Рис. 7

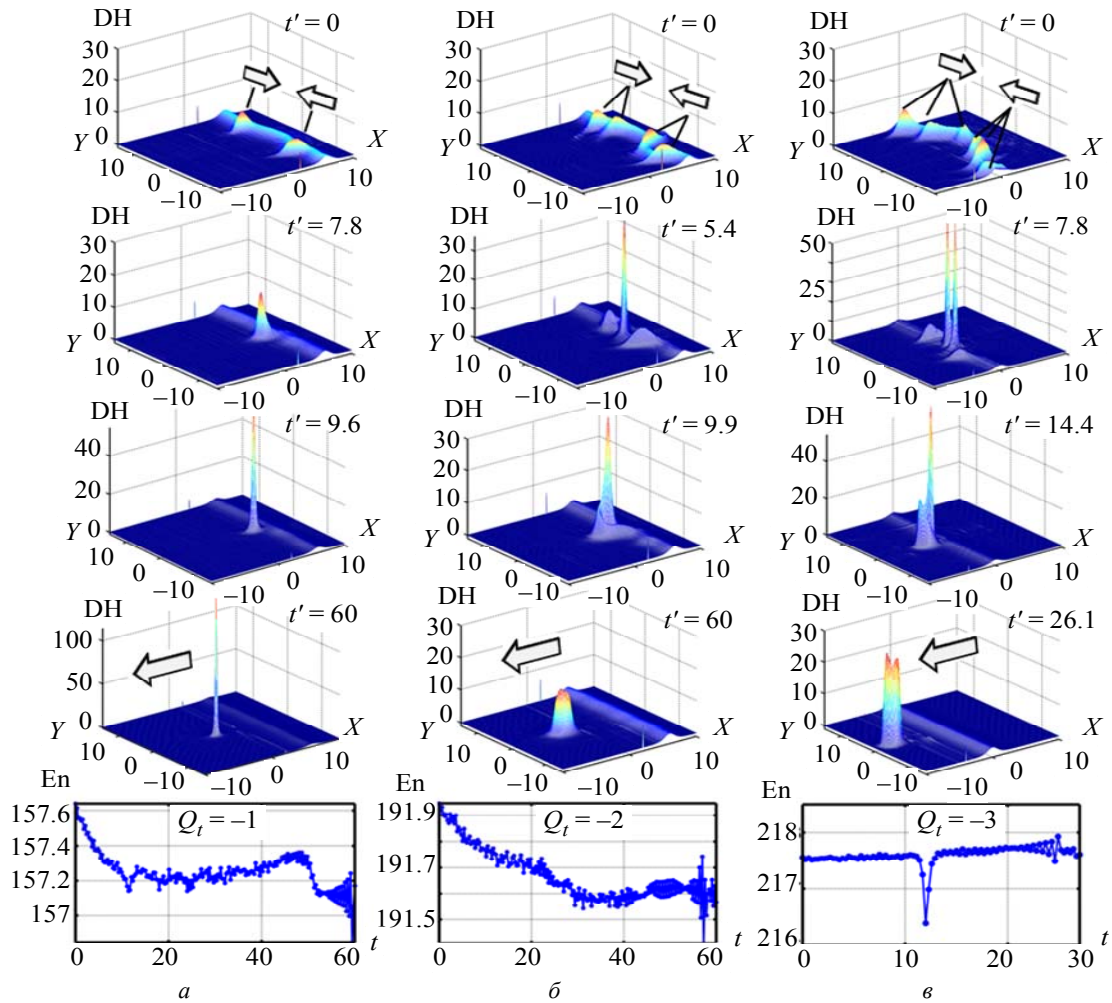


Рис. 8

и $Q_t = -3$. Как видно из данных иллюстраций, в обоих случаях с достаточно высокой точностью наблюдается проявление свойства Т-инвариантности системы взаимодействующих топологических полей (5) и (7). Потеря энергии для систем, полученных обращением времени, незначительна: $En_{\text{los}}(Q_t) \rightarrow 0$.

Исследуемые топологические солитоны являются квазичастицами и представляют собой пространственные распределения спинов (направления намагниченности), которые нельзя непрерывным преобразованием перевести в однородное (вакуумное) состояние, соответствующее основному состоянию поля. Следует также отметить, что полученные модели не являются точными аналогами результатов практических экспериментов, так как объекты приведенных исследований являются двумерными. Соответственно, полученные результаты могут в некоторой степени отличаться от результатов практических экспериментов [18].

Заметим также, что в экспериментах по взаимодействию ТС в обычном времени (t) наблюдается сброс лишней энергии в виде линейных волн излучений (до формирования точного решения), которые поглощаются специальными граничными условиями на краях $L(x, y)$. Далее при моделировании данного процесса в ОВ ($t' \rightarrow -t$) происходит эволюция численной системы, состоящей из волн возмущений, максимально приближенных к их аналитическому виду. Таким образом, свойство Т-симметрии исследуемых моделей соблюдается с достаточно высокой точностью: $En_{\text{los}} \rightarrow 0$.

Таким образом, рассмотрены свойства Т-инвариантности суперсимметричной $O(3)$ НСМ на примере процессов взаимодействия, распада и аннигиляции ее топологических солитонных решений. Исследование проведено методами численного моделирования на основе стандартных разностных уравнений и специально разработанных

ного алгоритма с применением свойств стереографической проекции. Для эволюционных моделей лобовых столкновений и поэтапной аннигиляции топологических вихрей применена операция обращения времени ($t' \rightarrow -t$). Получены модели, описывающие процесс объединения волн излучений и формирования исходного состояния взаимодействующих топологических вихрей. Подтверждено свойство Т-инвариантности исследуемой $(2 + 1)$ -мерной $O(3)$ НСМ и показана ее точность в описании нелинейной динамики

локализованных топологических возмущений. Разработан пакет компьютерных программ, позволяющий провести исследование эволюции взаимодействующих локализованных решений теоретико-полевых моделей в обращенном времени.

Полученные результаты показывают, что разработанный метод исследования позволяет экспериментально восстановить исходное состояние поля как одиночных, так и взаимодействующих локализованных решений нелинейных сред управляемых НСМ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Marion J. B. *Physics and the Physical Universe*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1971. 712 p.
2. Polyakov A. M. Interaction of Goldstone particles in two dimensions. Applications to ferromagnets and massive Yang-Mills fields // *Phys. Lett.* 1975. Vol. 59B, № 1. P. 79–81.
3. Двумерные сигма-модели. Модели непертурбативных эффектов квантовой хромодинамики / А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман // *ФЗЧАЯ*. 1986. Т. 17, № 3. С. 472–545.
4. Derode A., Roux Ph., Fink M. Robust Acoustic Time Reversal with High-Order Multiple Scattering // *Phys. Review Lett.* 1995. Vol. 75, № 23. P. 4206–4210.
5. Chabchoub A., Fink M. Time-Reversal Generation of Rogue Waves // *Phys. Review Lett.* 2014. Vol. 112. P. 124101-1–124101-5.
6. Classical realization of dispersion cancellation by time-reversal method / K. Ogawa, Sh. Tamate, T. Nakaniishi, H. Kobayashi, M. Kitano // *Phys. Review A*. 2015. Vol. 91. P. 013846-1–013846-6.
7. Melkaer J. M., Wu Z., Braun G. M. Time-reversal-invariant topological superfluids in Bose-Fermi mixtures // *Phys. Review A*. 2017. Vol. 96. P. 033605-1–033605-6.
8. Sounas D. L., Alu A. Time-Reversal Symmetry Bounds on the Electromagnetic Response of Asymmetric Structures // *Phys. Review Lett.* 2017. Vol. 118. P. 154302-1–154302-6.
9. Wang Ch., Levin M. Anomaly Indicators for Time-Reversal Symmetric Topological Orders // *Phys. Review Lett.* 2017. Vol. 119. P. 136801-1–136801-5.
10. Tachikawa Y., Yonekura K. Derivation of the Time-Reversal Anomaly for $(2+1)$ -Dimensional Topological Phases // *Phys. Review Lett.* 2017. Vol. 119. P. 111603-1–111603-5.
11. Photons and polaritons in a broken-time-reversal nonplanar resonator / J. Ningyuan, N. Schine, A. Georgakopoulos, A. Ryou, A. Sommer, J. Simon // *Phys. Review A*. 2018. Vol. 97. P. 013802-1–013802-10.
12. Kozyryev I., Hutzler N. R. Precision Measurement of Time-Reversal Symmetry Violation with Laser-Cooled Polyatomic Molecules // *Phys. Review Lett.* 2017. Vol. 119. P. 133002-1–133002-6.
13. Leutenegger T., Dual J. Detection of defects in cylindrical structures using a time reverse method and a finite-difference approach // *Ultrasonics*. 2002. Vol. 40. P. 721–725.
14. Huang R. *Quantum Field Theory. From Operators to Path Integrals*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998. 426 p.
15. Peskin M. E., Schroeder D. V. *An Introduction to Quantum Field Theory*. San Francisco: Addison-Wesley Publ., 1995. 842 p.
16. Kudryavtsev A., Piette B., Zakrzewski W. Skyrmions and domain walls in $(2+1)$ -dimensions // *Nonlinearity*. 1998. Vol. 11. P. 783–795.
17. Муминов Х. Х. Многомерные динамические топологические солитоны в нелинейной анизотропной сигма-модели // *ДАН РТ*. 2002. Т. 45, № 10. С. 28–36.
18. Муминов Х. Х., Шокиров Ф. Ш. Математическое моделирование нелинейных динамических систем квантовой теории поля. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017. 375 с.
19. Муминов Х. Х., Шокиров Ф. Ш. Взаимодействие и распад двумерных топологических солитонов $O(3)$ векторной нелинейной сигма-модели // *ДАН РТ*. 2011. Т. 54, № 2. С. 110–114.
20. Белавин А. А., Поляков А. М. Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика // *Письма в ЖЭТФ*. 1975. Т. 22, № 10. С. 503–506.
21. Кудряшов Н. А. Методы нелинейной математической физики. М.: МИФИ, 2008. 352 с.
22. Ковалев С. А. Вихревая структура магнитных солитонов // *Физика низких температур*. 2017. Т. 43, № 2. С. 334–346.
23. Муминов Х. Х., Шокиров Ф. Ш. Изоспиновая динамика топологических вихрей // *ДАН РТ*. 2016. Т. 59, № 7–8. С. 320–326.
24. Муминов Х. Х., Шокиров Ф. Ш. Динамика взаимодействия топологических вихрей с доменной стенкой в $(2+1)$ -мерной нелинейной сигма-модели // *ДАН РТ*. 2015. Т. 58, № 4. С. 302–308.
25. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
26. Муминов Х. Х., Шокиров Ф. Ш. Динамика взаимодействий двумерных топологических солитонов в $O(3)$ нелинейной векторной сигма-модели // *ДАН РТ*. 2010. Т. 53, № 9. С. 679–684.

Kh. Kh. Muminov

Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan Saint

F. Sh. Shokirov S

Physical-Technical Institute of AS RT. U. Umarov

DYNAMICS OF INTERACTION OF TOPOLOGICAL SOLITONS IN REVERSED TIME

The results of numerical simulation of the interaction of topological solitons of (2+1)-dimensional $O(3)$ non-linear sigma model in reversed time are presented. At the first stage, models of interactions of topological vortices are developed, where, depending on the dynamic parameters, processes of their decay into localized perturbations and phased annihilation are observed. Also, models for the phased annihilation of topological vortices during their interaction with 180-degree domain walls are considered. On the basis of the models obtained, initial conditions for numerical simulation of interaction processes in reversed time are developed. The models describing the complete restoration of the initial topological field of interacting solitons at the combining of localized perturbations and radiation waves are obtained. Also, models are obtained that describe the formation of topological vortices in the plane of the domain wall and their subsequent emission. Thus, the T-invariance property of the field-theoretic model under study is confirmed. Numerical calculations were carried out in a stratified space on the basis of the finite difference schemes theory methods, using the properties of a stereo-graphic projection. The experiments were carried out for different values of the Hopf index of topological vortices. A complex program module is proposed that implements a special algorithm for the numerical calculation of the evolution of the space-time topological structures interaction in reversed time.

Sigma model, difference scheme, stratified space, T-invariance, topological soliton, numerical simulation
