

14. Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для вузов. 10-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1986.

15. Мешковский Е. О., Курмашев А. Д. Построение математической модели четырехколесного мобильного робота с двумя дифференциальными привод-

ными блоками // Инновации и инвестиции. 2020. № 2. С. 113–118.

16. Кояин Н. В., Мальцева О. П., Удут Л. С. Оптимизация контуров регулирования систем электропривода по типовым методикам // Изв. Томского политехн. ун-та. Инжиниринг георесурсов. 2005. № 7. С. 120–125.

E. O. Meshkovskiy, V. Ya. Frolov, A. D. Kurmashev
Saint Petersburg polytechnic university of Peter the Great

NONLINEAR INTERCONNECTED CONTROL OF ELECTRIC DRIVES OF FOUR-WHEEL MOBILE ROBOT

The task of constructing an interconnected control system for the electric drive subsystem of a four-wheel mobile robot with two differential drive units when moving along a given program path is considered. During the synthesis of the control system, the asymmetry of the location of the rotary blocks was taken into account. The scalable structure of the resulting control system allows to control the trajectory movement and contour speed of mobile robots with more than two differential rotary blocks. The modular structure of the control system expands the scope of application by replacing individual regulators in the control loops and controlling electric motors of any type. At the end of the article, the results of numerical experiments on the mathematical model of the wheeled robot under study are given.

Wheel robot, differential drive unit, DC motor, interconnected control, non-linear regulation, contour movement

УДК 519.812.3

П. Л. Любкин

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Разработка метода доопределения матриц парных сравнений кратных предпочтений на основе показателя согласованности

Экспертные оценки – методология, включающая в себя различные методы, позволяющие решать комплексные и плохо формализуемые задачи. Одним из наиболее распространенных и перспективных методов является метод анализа иерархий, разработанный Т. Саати. Несмотря на все его достоинства (независимость от области применения, использование парных сравнений для упрощения работы эксперта, использование человеческого опыта, удобную шкалу оценок и проверку на противоречивость мнения эксперта), метод анализа иерархий обладает рядом недостатков, к которым относится отсутствие возможности работы с неполной экспертной информацией. Для модификации метода был рассмотрен алгоритм доопределения матриц, основанный на максимизации показателя согласованности. В качестве данного показателя вместо предлагаемого Саати показателя кардинальной согласованности был предложен показатель, основанный на поиске нетранзитивности среди троек предпочтений. На основании максимизации предложенного показателя согласованности был предложен метод доопределения матриц парных сравнений кратных предпочтений, содержащих неполную экспертную информацию. Также был проведен опрос экспертов для составления матриц парных сравнений, среди которых рандомизированным методом были созданы лакуны, доопределенные впоследствии. Было проведено сравнение показателей согласованности исходных и доопределенных матриц парных сравнений.

Экспертные оценки, метод анализа иерархий, матрицы парных сравнений, показатель согласованности, доопределение матриц, кратные предпочтения

Во многих областях человеческой деятельности существуют задачи, решить которые с помо-

щью строгих математических методов с высокой степенью надежности невозможно. В некоторых

случаях они нерешаемы из-за своей сложности и комплексности, в других – из-за недостатка исходных данных, в третьих – ожидание лишь качественных оценок. Большинство таких задач и проблем связано с прогнозированием, управлением, принятием решений и оценкой [1]. Для решения подобных задач используются приемы методологии экспертного оценивания, основанной на методах нескольких смежных дисциплин: кибернетики, теории управления, менеджмента, теории вероятности и математической статистики.

Методология экспертного оценивания включает в себя множество различных, отличающихся друг от друга методов, но все они объединены общими принципами. Прежде всего эксперты делятся на рабочую и экспертную группы. Рабочая группа отвечает за организацию и проведение процедуры экспертного оценивания – экспертизы. Экспертная группа служит источником знаний, необходимых для решения поставленной задачи. Кроме того, любой метод экспертных оценок чаще всего состоит из нескольких стандартных этапов: организация рабочей группы, выбор и составление рабочей группой экспертной группы, проведение экспертизы (извлечение знаний), обработка полученной информации и повторный опрос экспертов при необходимости, получение результата [2].

Дисциплина «экспертное оценивание» включает в себя десятки различных методов: Дельфи, ELECTRE, МАИ, мозговой штурм и т. д. [3]. Каждый из них обладает своим набором достоинств и недостатков, в связи с которыми эти методы были более или менее популярны в различное время, но сейчас одним из наиболее популярных является метод анализа иерархий, разработанный Томасом Саати [4]. Как и многие другие методы, он включает в себя этапы, описанные выше, и предназначен для решения комплексных и сложно формализуемых задач и, как было показано, достаточно точно представляет экспертную информацию. Метод анализа иерархий имеет следующие особенности:

1. Использование матриц парных сравнений при проведении опроса экспертов [4]. Матрицы парных сравнений – это представление мнения эксперта в виде матрицы, каждый элемент которой отображает суждение эксперта о соответствующей паре альтернатив в численном виде.

2. Проверка согласованности мнений экспертов. Метод анализа иерархий подразумевает проверку мнения каждого эксперта на отсутствие нетранзитивности предпочтений (т. е. на отсутствие ситуации, когда $a > b$, $b > c$, а $c > a$), а также проверку группового мнения экспертов, составляющих экспертную группу, на противоречивость мнений [5].

3. Представление мнений экспертов с помощью шкалы кратности [4]. Для метода анализа иерархий была разработана шкала, основанная на психологических особенностях человека, насчитывающая 5 основных и 4 промежуточных градации, обозначающих различные степени превосходства одной альтернативы над другой – от равенства до полного превосходства. Кроме того, при использовании этой шкалы $A_{ij} = 1/A_{ji}$.

Все перечисленные особенности помогают рабочей группе организовать экспертизу и проанализировать экспертную информацию для получения решения. Как бы то ни было, метод анализа иерархий обладает рядом серьезных недостатков:

1. Сложность опроса эксперта. При наличии N альтернатив и K критериев каждый эксперт должен ответить на $(N - 1) \cdot (N - 2) \cdot K$ вопросов о степени предпочтительности одной альтернативы перед другой. При увеличении числа альтернатив или критериев оценки сложность метода возрастает чрезвычайно быстро.

2. Необходимость повторного опроса. При наличии нетранзитивности предпочтений в мнении эксперта требуется его повторный опрос. Хуже того, при наличии несогласованности мнений экспертной группы необходимо повторно опрашивать всех экспертов группы до тех пор, пока несогласованность не будет ликвидирована.

3. Отсутствие возможности работы с неполной экспертной информацией. В некоторых ситуациях эксперт может не обладать достаточной компетенцией, набором знаний и подготовленностью, чтобы точно ответить на вопрос рабочей группы: он может либо не знать точную степень превосходства одной альтернативы над другой, либо быть не в состоянии сравнить их хоть как-то. В классическом методе анализа иерархий считается, что эксперт всегда может выразить свое мнение требуемым образом.

Существуют различные шкалы, в которых эксперту может быть удобно выразить свой мнение, среди которых: факты предпочтений, балльные и кратные предпочтения. И если переход от более информативных кратных предпочтений к менее информативным очевиден и не представляет трудностей, то обратное преобразование связано с проблемой недостатка информации и требует особого подхода. Очевидно, что матрица парных сравнений, заданная в шкале кратности предпочтений, следующего вида:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & A1 & A2 & A3 \\
 A1 & 1 & 3 & 9 \\
 A2 & \frac{1}{3} & 1 & 3 \\
 A3 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1
 \end{array} \\
 (1)
 \end{array}$$

где $A1, A2$ и $A3$ – оцениваемые альтернативы, а значения в ячейках матрицы – мнения эксперта об их относительной предпочтительности, очевидным образом преобразуется в такую матрицу парных сравнений фактов предпочтений

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & A1 & A2 & A3 \\
 A1 & 0.5 & 1 & 1 \\
 A2 & 0 & 0.5 & 1 \\
 A3 & 0 & 0 & 0.5
 \end{array} \\
 (2)
 \end{array}$$

в которой представлены мнения того же эксперта, но в ином виде (1 – альтернатива лучше, 0 – альтернатива хуже, 0.5 – альтернативы равнозначны). Такой переход очевиден и не представляет никаких трудностей, переход же от матрицы (2) к матрице (1) представляется нетривиальной задачей. Кроме того, возможна ситуация, при которой эксперт ввиду недостатка информации или собственных знаний не может поставить конкретную оценку при сравнении двух альтернатив, а может только сказать, что одна лучше другой, т. е. получается матрица вида

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & A1 & A2 & A3 \\
 A1 & 1 & \text{лучше} & 9 \\
 A2 & \text{хуже} & 1 & 3 \\
 A3 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1
 \end{array}
 \end{array}$$

Таким образом, получается матрица парных сравнений смешанного типа, в которой некоторые элементы представлены в шкале кратности предпочтений, а другие – в шкале фактов предпочтений.

Чем больше альтернатив требуется сравнить, тем выше вероятность того, что эксперт будет не в состоянии сравнить две альтернативы между собой, и тем сложнее будет преобразовать всю матрицу к требуемому для последующей обработки виду.

В некоторых случаях эксперт вообще не может никаким образом установить относительную важность альтернатив. Тогда полученная матрица парных сравнений будет иметь так называемые информационные лакуны (пары альтернатив, в которых эксперт не может установить относительную предпочтительность), а ее вид в таком случае будет следующим:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & A1 & A2 & A3 \\
 A1 & 1 & & 9 \\
 A2 & & 1 & 3 \\
 A3 & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1
 \end{array}
 \end{array}$$

Матрица такого вида не предназначена для обработки методом анализа иерархий. Кроме того, несмотря на то что в данном примере восстановить необходимые значения не представляет труда, очевидно, что при увеличении числа альтернатив и количества лакун доопределение значений матрицы становится нетривиальной задачей.

Для решения задачи доопределения матрицы парных сравнений кратности предпочтений необходима мера, по которой можно судить о том, что выбранная пара значений $(a_{ij}; a_{ji})$, $a_{ij} = 1/a_{ji}$ – лучшая из всего набора. В качестве такой меры выбрана согласованность (отсутствие внутренних противоречий и нетранзитивности предпочтений) матрицы парных сравнений. Для каждой тройки элементов в идеально согласованной матрице кратности предпочтений верно следующее равенство [5], [6]:

$$a_{ij}a_{jk} = a_{ik}. \tag{3}$$

Оптимизируя доопределяемую матрицу парных сравнений кратных предпочтений в соответствии с (3), получим доопределенную и, насколько это возможно, согласованную матрицу парных сравнений кратных предпочтений, показателем согласованности которой может быть

$$C = \sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \ln^2(a_{ij}a_{jk}a_{ki}). \tag{4}$$

Эксперт		Матрица							
		Исходная		С 1 лакуной		С 2 лакунами		С 3 лакунами	
		С	КС	С	КС	С	КС	С	КС
1	K1	0.9	0.65	0.9	0.65	0.9	0.65	0.9	0.65
	K2	0.88	0.55	0.88	0.56	0.89	0.57	0.92	0.7
	K3	0.84	0.54	0.88	0.66	0.89	0.68	0.92	0.76
2	K1	0.97	0.91	0.97	0.93	0.98	0.94	0.98	0.94
	K2	0.97	0.91	0.97	0.92	0.98	0.95	0.98	0.95
	K3	0.95	0.87	0.95	0.87	0.96	0.89	0.96	0.89
3	K1	0.96	0.86	0.97	0.9	0.97	0.9	0.98	0.9
	K2	0.97	0.91	0.97	0.92	0.97	0.92	0.97	0.92
	K3	0.95	0.81	0.96	0.84	0.96	0.85	0.97	0.87
4	K1	0.97	0.91	0.98	0.93	0.98	0.94	0.98	0.95
	K2	0.98	0.92	0.98	0.92	0.99	0.95	0.99	0.95
	K3	0.95	0.86	0.95	0.86	0.95	0.88	0.95	0.88
5	K1	0.92	0.76	0.94	0.84	0.94	0.84	0.95	0.87
	K2	0.95	0.8	0.96	0.83	0.96	0.83	0.97	0.88
	K3	0.96	0.87	0.96	0.87	0.98	0.92	0.98	0.93
6	K1	0.95	1	0.95	1	0.95	1	0.95	1
	K2	0.98	0.9	0.98	0.91	0.98	0.92	0.98	0.92
	K3	0.98	0.95	0.98	0.97	0.98	0.97	0.98	0.97
7	K1	0.98	0.81	0.99	0.89	0.99	0.92	0.99	0.92
	K2	0.96	0.81	0.97	0.84	0.98	0.91	0.98	0.9
	K3	0.95	0.7	0.97	0.79	0.97	0.79	0.97	0.82
8	K1	0.95	0.76	0.96	0.79	0.97	0.82	0.97	0.88
	K2	0.96	0.8	0.97	0.82	0.97	0.82	0.97	0.83
	K3	0.98	0.9	0.98	0.9	0.98	0.92	0.99	0.95
9	K1	0.97	0.9	0.97	0.91	0.97	0.91	0.97	0.91
	K2	0.97	0.94	0.97	0.94	0.98	0.94	0.98	0.96
	K3	0.96	0.81	0.97	0.86	0.97	0.86	0.98	0.9
10	K1	0.93	0.79	0.95	0.85	0.95	0.85	0.95	0.86
	K2	0.97	0.89	0.98	0.91	0.98	0.91	0.98	0.91
	K3	0.98	0.95	0.98	0.97	0.98	0.98	0.98	0.98
11	K1	0.97	0.92	0.97	0.92	0.99	0.95	0.99	0.95
	K2	0.93	0.81	0.93	0.81	0.93	0.82	0.94	0.84
	K3	0.97	0.89	0.98	0.94	0.98	0.94	0.98	0.94
12	K1	0.96	0.9	0.98	0.93	0.98	0.93	0.98	0.95
	K2	0.97	0.88	0.99	0.96	0.99	0.97	0.99	0.98
	K3	0.94	0.79	0.94	0.79	0.94	0.81	0.96	0.85
13	K1	0.97	0.92	0.97	0.92	0.98	0.93	0.99	0.97
	K2	0.94	0.85	0.95	0.85	0.95	0.86	0.95	0.86
	K3	0.98	0.94	0.98	0.94	0.98	0.95	0.98	0.95
14	K1	0.96	0.9	0.97	0.92	0.97	0.92	0.97	0.93
	K2	0.96	0.89	0.96	0.9	0.96	0.9	0.97	0.92
	K3	0.95	0.76	0.96	0.79	0.97	0.82	0.97	0.88

Соответственно, для дополнения лакун в матрице парных сравнений можно использовать следующее выражение:

$$\frac{dC}{da_{xy}} = \frac{d \left(\sum_{i=1}^{N-2} \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{k=j+1}^N \ln^2(a_{ij} a_{jk} a_{ki}) \right)}{da_{xy}} = \frac{2 \ln \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq m, n}}^N a_{xy} a_{xk} a_{ky} \right)}{a_{xy}} = 0.$$

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_M \in X$ – номера строк, содержащих требующие доопределения элементы, а $y_1, y_2, \dots, y_M \in Y$ – номера их столбцов, где M –

количество лакун. Тогда можем составить систему подобных уравнений:

$$a_{x_i y_i}^{N-2} \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq x_i \\ k \neq y_i}}^N (a_{x_i k} a_{k y_i}) = 1, i = 1 \dots M. \quad (5)$$

Решив (5), найдем все необходимые для доопределения элементы.

Для проверки описанного метода были опрошены 14 экспертов, каждому из которых необходимо было провести попарное сравнение шести альтернатив по трем критериям. Результаты опроса были сведены в матрицы парных сравнений кратных предпочтений. Алгоритм проверки метода состоял из следующих этапов:

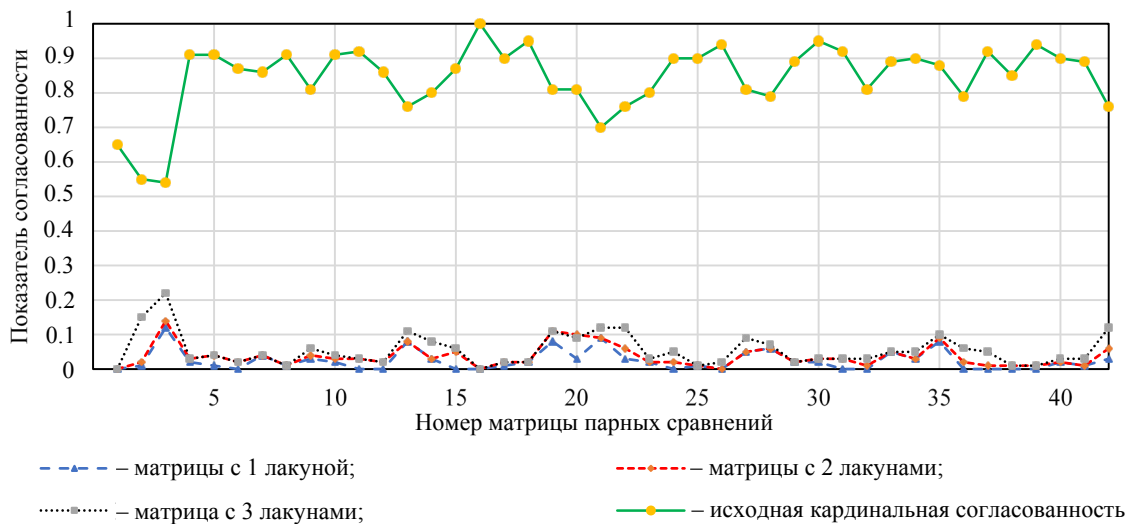


Рис. 1

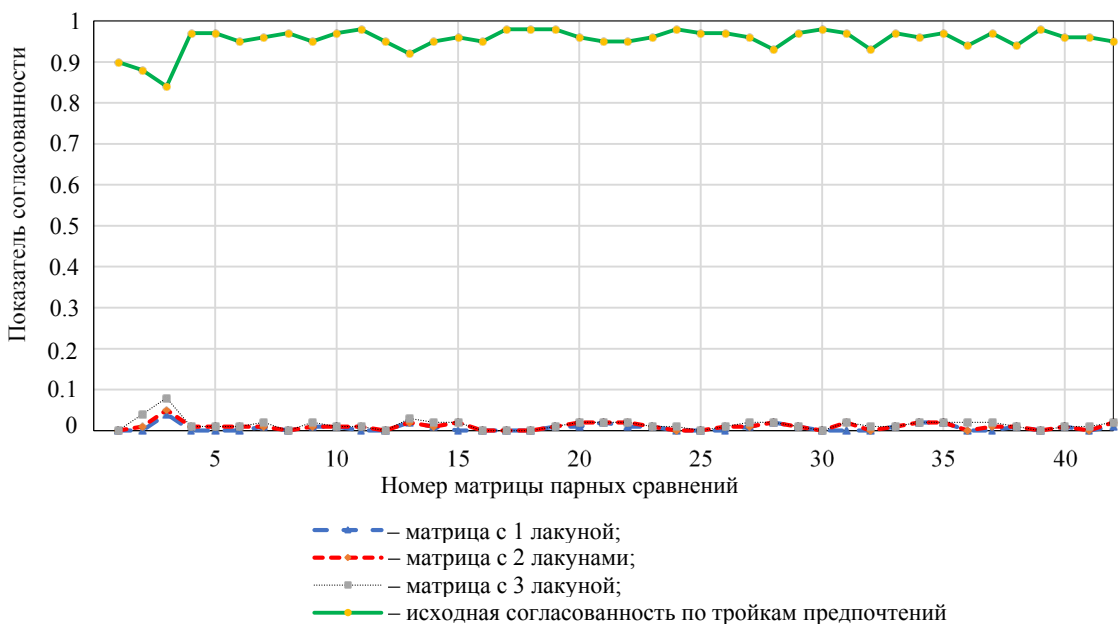


Рис. 2

1. Расчет показателей кардинальной согласованности и согласованности по (4) для каждой матрицы.

2. Выбор в каждой матрице последовательно 1, 2 и 3 пары элементов $(a_{ij}; a_{ji})$, $j \neq i$, которые считались неизвестными для алгоритма доопределения матрицы.

3. Доопределение каждой из 151 получившихся неполных матриц.

4. Расчет показателей кардинальной согласованности и согласованности по (4) для каждой доопределенной матрицы.

5. Анализ результатов на основе сравнения показателей согласованности исходной и доопределенных матриц.

Результаты проверки метода приведены в таблицу, из которой видно, что результаты работы алгоритма доопределения матриц не вносят дополнительную несогласованность в неполные матрицы, но часто исправляют существующие.

На рис. 1 и 2 представлены отклонения результатов доопределения матриц парных сравнений с одной, двумя и тремя лакунами по отношению к

исходной. На рис. 1 представлены отклонения кардинальной согласованности, предложенной Саати в качестве непротиворечивости мнений экспертов. На рис. 2 представлены отклонения согласованности по тройкам предпочтений. Как видно из графиков, отклонения от исходных значений тем выше, чем ниже мера согласованности исходной матрицы, что обусловлено выбором в качестве основы метода доопределения максимизации показателя согласованности по тройкам предпочтений.

Таким образом, был представлен алгоритм доопределения матриц парных сравнений кратных предпочтений на основе показателя согласованности по тройкам предпочтений. Было показано, что его применение не приводит к рассогласованности матрицы парных сравнений, а в некоторых случаях и улучшает меру согласованности. Более того, при применении данного алгоритма к матрицам с показателем кардинальной согласованности $КС \geq 0.8$ отклонение от исходного значения составляет не более 0.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Орлов А. И. Организационно-экономическое моделирование: учебник: в 3 ч. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2009. Ч. 2: Экспертные оценки, 2011.

2. Миркин Б. Г. Проблема группового выбора. М.: Наука: Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974.

3. Бурков Е. А., Назаренко Н. А., Падерно П. И. Основы квалиметрии: учеб. пособие // СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2013.

4. Саати Т. Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий / пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь, 1989.

5. Saaty T. L. Relative measurement and its generalization in decision making: why pairwise comparisons are central in mathematics for the measurement of intangible factors – The Analytic Hierarchy/Network Process // RACSAM. 2008. Vol. 102, № 2. P. 251–318.

6. Shunsuke S., Tsuneshir O., Motomasa D. Properties of a positive reciprocal matrix and their application to AHP // J. of the Operations Research Society of Japan. 1998. Vol. 41, № 3. P. 404–414.

P. L. Lyubkin

Saint Petersburg Electrotechnical University

DEVELOPMENT OF A METHOD FOR THE COMPLETION OF MATRICES OF PAIRED COMPARISONS OF MULTIPLE PREFERENCES BASED ON THE CONSISTENCY INDEX

Expert evaluation is a methodology that includes various methods to solve complex and poorly formalized problems. One of the most common and promising methods is the analytical hierarchy process developed by T. Saati. Despite such advantages as independence from the application area, simplification an expert work by pairwise comparison matrices usage, basing on human experience, a convenient rating scale and the inconsistency of expert opinion control, the analytical hierarchy process has several disadvantages. One of them is the lack of the ability to interact with incomplete expert information. To modify the AHP an algorithm of matrix completion based on maximizing the consistency index is considered. As an indicator of consistency, not the index of cardinal consistency proposed by Saati, but based on the search for non-transitivity among the triples of preferences one was taken. Based on the maximization of the proposed index of consistency, a method of completion matrices of pairwise comparisons of ordinal preferences containing incomplete expert information was considered. Also, a survey of experts was conducted and matrices of pairwise comparisons were obtained. Then, by using randomized method, matrices were transformed into incomplete ones and completed by the method given. A comparison of the consistency indices of the initial and transformed matrices of pairwise comparisons was made.

Expert evaluation, analytical hierarchy process, pairwise comparison matrices, consistency index, matrices completion, ordinal preferences