

УДК 621.313

А. Г. Черных

Иркутский государственный аграрный университет им. А. А. Ежевского

## Математическая модель электромагнитного привода герметичного центробежного насоса

*С использованием понятия и единой формы дифференциальных уравнений Лагранжа для электромагнитных и механических переменных применительно к двумерной модели обобщенной электрической машины получены тождественные по виду уравнения электромеханического равновесия для экранированной асинхронной машины (ЭАМ). На примере встроенного привода центробежного герметичного насоса с ЭАМ рассмотрены уравнения электромеханического равновесия, соответствующие двум режимам работы машины. В первом случае на примере технологического трубопровода с нефтепродуктом приведены уравнения, соответствующие прямому насосному режиму работы ЭАМ в качестве экранированного асинхронного двигателя (ЭАД). Во втором случае на примере установки микроГЭС приведены уравнения, соответствующие обратному турбинному режиму работы ЭАМ в качестве экранированного асинхронного генератора (ЭАГ). Для генераторного режима работы на участке цепи с сосредоточенными параметрами, обладающими электрической емкостью, эквивалентной статическому источнику реактивной мощности (ИРМ), получены уравнения электрического равновесия во вращающейся системе координат. Результирующая система уравнений ЭАМ и ИРМ позволяет аналитически исследовать статические и динамические режимы работы ЭАГ в составе автономной энергосистемы.*

**Экранированная асинхронная машина, центробежный герметичный насос, экранированный асинхронный двигатель, экранированный асинхронный генератор, микроГЭС, автономная энергосистема, статический источник реактивной мощности, математическая модель**

Современная номенклатура серийно выпускаемых герметических машин и аппаратов различного технологического назначения в силу специфики их использования в соответствующих производственных процессах предполагает непосредственный контакт конструктивных узлов и элементов машин и аппаратов такого рода с сопутствующей процессу технологической средой. В случае агрессивной среды в классе герметических машин, относящихся к электромеханическим преобразователям (ЭМП), для исключения контакта технологической и окружающей сред часто применяются ЭМП с герметизацией по внутреннему контуру преобразователя [1]. Тогда, как правило, подвижные и неподвижные части ЭМП помещают в специальные защитные оболочки цилиндрической формы, изготовленные из проводящих немагнитных материалов, или окружают ими. В классе ЭМП индукционного типа с элементами герметизации наибольшее распространение получили экранированные асинхронные машины (ЭАМ). В конструктивном отношении ЭАМ, работающая в двигательном режиме, является составной частью так называемого электромагнитного привода. Под электромагнитным приводом в данном случае понимается способ герметичного (бессальникового) ввода энергии посредством экранированного асинхронного двигателя (ЭАД) внутрь машины и аппарата.

Для преобразования энергии посредством вращающегося магнитного поля в электромагнитных приводах в качестве рабочего органа широко применяются различные типы герметичных центробежных насосов (ГЦН). В большинстве случаев с учетом требований производственного процесса работа ГЦН как составной части электромагнитного привода требует регулирования электрических, механических и гидравлических параметров и характеристик насоса.

В силу принципа обратимости возможна работа ГЦН в обратном режиме в качестве турбины (PaTs-системы) [2]. В этом случае ЭАД насоса работает в режиме автономного экранированного асинхронного генератора (ЭАГ).

Имеющиеся публикации по ЭАМ в отечественных и зарубежных научных изданиях показывают на отсутствие в них теоретических и практических исследований, связанных с расчетом параметров данного типа ЭМП и построением математических моделей для изучения двигательного и генераторного режимов работы ЭАМ в составе электромагнитного привода.

Для математического моделирования электромеханических процессов ЭАМ в динамических режимах работы, с точки зрения синтеза модели на основе измеряемых физических величин, воспользуемся расчетной моделью двухфазной обобщенной электрической машины.

Применительно к ЭАМ ее элементарная модель содержит четыре слоя обмоток. При этом, по аналогии с обобщенной моделью двухфазной машины, на статоре слой обмотки представляется двумя катушками: одной – на магнитной оси обмотки какой-либо фазы (продольная ось –  $d_{s2}$ ), и другой – помещенной под прямым углом к первой (продольная ось –  $q_{s2}$ ). На роторе слой обмотки представляется в виде замкнутой барабанной обмотки, на которой размещены две пары щеток: одна – по магнитной оси (продольная ось –  $d_{r2}$ ), другая – под прямым углом к первой (поперечная ось –  $q_{r2}$ ). Слои, соответствующие статорной  $s_1$  и роторной  $r_1$  гильзам, также представляются в виде замкнутых барабанных обмоток с двумя парами воображаемых щеток по продольной ( $d$ ) и поперечной ( $q$ ) осям. Выбранному взаимному расположению катушек элементарной модели ЭАМ соответствует расчетная схема, представленная на рис. 1, где  $d_{s2}$  – продольная ось двухфазной обмотки статора;  $d_{s1}$  – продольная ось эквивалентной обмотки гильзы статора;  $d_{r1}$  – продольная ось эквивалентной обмотки гильзы ротора;  $d_{r2}$  – продольная ось двухфазной обмотки ротора;  $q$  – поперечная ось соответствующей обмотки.

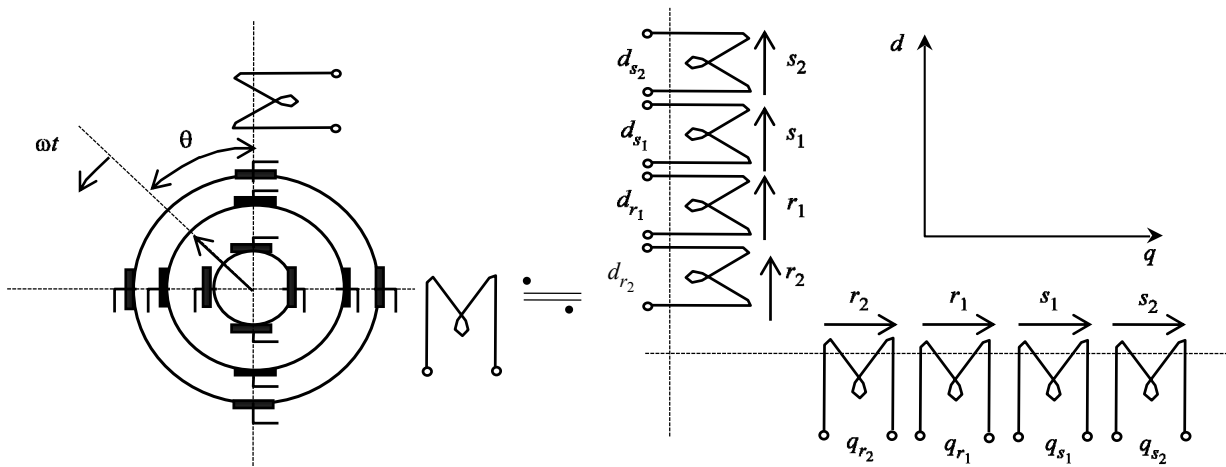


Рис. 1

Для вывода уравнений электромеханического равновесия ЭАМ применительно к принятой расчетной схеме воспользуемся динамическим уравнением Лагранжа [3].

Уравнения Лагранжа–Максвелла для ЭМС имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dL}{d\dot{q}_n} \right) - \frac{dL}{dq_n} = F_n, \tag{1}$$

где  $t$  – время;  $d$  – «бесконечно малое» приращение соответствующей переменной;  $L = T - V = L_{\text{ЭМ}} + L_{\text{Мех}}$  – силовая функция Лагранжа,  $T$ ,  $V$  – кинетическая и потенциальная энергии системы,  $L_{\text{ЭМ}} = T_{\text{ЭМ}} - V_{\text{ЭМ}}$  – лагранжиан для электромагнитной системы,  $L_{\text{Мех}} = T_{\text{Мех}} - V_{\text{Мех}}$  – лагранжиан для механической системы;  $\dot{q}_n$ ,  $q_n$  – обобщенные скорости и координаты;  $F_n$  – обобщенные сторонние и диссипативные силы.

Для расчетной модели ЭАМ (рис. 1) в качестве механических и электромагнитных переменных имеем:

1. Обобщенные координаты:

1) механическая система:  $q_1 = \theta$  – угол поворота вала ротора;

2) электромагнитная система:  $q_2$ – $q_9$  – электрические заряды в обмотках  $d_{s2}, d_{s1}, d_{r1}, d_{r2}, q_{s2}, q_{s1}, q_{r1}, q_{r2}$  соответственно.

2. Обобщенные скорости:

1) механическая система:  $dq_1/dt = d\theta/dt = \omega$  – угловая скорость вращения ротора;

2) электромагнитная система:  $dq_2/dt = i_{d_{s2}}$  – ток в обмотке  $d_{s2}$ ;  $dq_3/dt = i_{d_{s1}}$  – ток в обмотке  $d_{s1}$ ;  $dq_4/dt = i_{d_{r1}}$  – ток в обмотке  $d_{r1}$ ;  $dq_5/dt = i_{d_{r2}}$  – ток в обмотке  $d_{r2}$ ;  $dq_6/dt = i_{q_{s2}}$  – ток в обмотке  $q_{s2}$ ;  $dq_7/dt = i_{q_{s1}}$  – ток в обмотке  $q_{s1}$ ;  $dq_8/dt = i_{q_{r1}}$  – ток в обмотке  $q_{r1}$ ;  $dq_9/dt = i_{q_{r2}}$  – ток в обмотке  $q_{r2}$ .

3. Обобщенные силы:

1) механическая система:  $f_y = \sigma\theta$  – сила упругого сопротивления ротора ЭАМ, где  $\sigma$  – обобщенный коэффициент жесткости ротора ЭАМ. Принимаем  $\sigma = 0$ ;

2) электромагнитная система:  $U_{d_{s2}}, U_{d_{s1}}, U_{d_{r1}}, U_{d_{r2}}, U_{q_{s2}}, U_{q_{s1}}, U_{q_{r1}}, U_{q_{r2}}$  – напряжения на обмотках  $d_{s2}, d_{s1}, d_{r1}, d_{r2}, q_{s2}, q_{s1}, q_{r1}$  и  $q_{r2}$  соответственно.

4. Обобщенный импульс:

1) механическая система:  $P = J\omega$  – момент импульса, где  $J$  – обобщенный коэффициент инерции ротора ЭАМ;

2) электромагнитная система:  $\Psi_{d_{s2}}, \Psi_{d_{s1}}, \Psi_{d_{r1}}, \Psi_{d_{r2}}, \Psi_{q_{s2}}, \Psi_{q_{s1}}, \Psi_{q_{r1}}, \Psi_{q_{r2}}$  – потокосцепления обмоток  $d_{s2}, d_{s1}, d_{r1}, d_{r2}, q_{s2}, q_{s1}, q_{r1}$  и  $q_{r2}$  соответственно.

5. Сторонние и диссипативные силы (моменты):

1) механическая система:  $M_c$  – активный момент сопротивления на роторе ЭАМ;

2) электромагнитная система:  $R_{d_{s2}}i_{d_{s2}}, R_{d_{s1}}i_{d_{s1}}, R_{d_{r1}}i_{d_{r1}}, R_{d_{r2}}i_{d_{r2}}, R_{q_{s2}}i_{q_{s2}}, R_{q_{s1}}i_{q_{s1}}, R_{q_{r1}}i_{q_{r1}}, R_{q_{r2}}i_{q_{r2}}$  – падения напряжения в обмотках  $d_{s2}, d_{s1}, d_{r1}, d_{r2}, q_{s2}, q_{s1}, q_{r1}$  и  $q_{r2}$  соответственно.

Кинетическая энергия для механической системы равна

$$T_{\text{мех}} = \int Pd(\dot{q}_1) = \int Pd(dq_1/dt) = \int J\omega d(\omega) = \frac{J\omega^2}{2}.$$

В соответствии с рис. 1 кинетическая энергия для электромагнитной системы равна сумме кинетических энергий, запасенных в виде магнитных энергий обмоток ЭАМ.

Так как  $V_{\text{мех}} = V_{\text{эм}} = 0$ , то силовая функция Лагранжа для элементарной модели ЭАМ примет вид

$$L = T - V = T_{\text{эм}} - V_{\text{эм}} + T_{\text{мех}} - V_{\text{мех}} = T_{\text{эм}} + T_{\text{мех}}. \quad (2)$$

Учитывая, что  $L$  в (2) не зависит от обобщенных координат  $q_2$ – $q_9$  (электрических зарядов), вычитаемое в левой части выражения (1) равно нулю, т. е.

$$\frac{dL}{dq_n} = 0, \quad n = \overline{2, 9}.$$

В силу геометрической симметрии воздушного зазора элементарной модели ЭАМ (рис. 1) магнитная цепь по осям  $d$  и  $q$  симметрична. Индуктивность между произвольной парой из имеющихся восьми слоев обмоток (рис. 1) определяется магнитным потоком, соответствующим данной паре. При симметрии магнитной системы по осям  $d$  и  $q$  магнитный поток, сцепленный с парой обмоток, зависит от угла поворота ротора  $\theta$  и аналитически определяется функцией вида

$$M_{dq}(\theta) = M_{dq} \cos(\theta), \quad d \subset (d_{s2}, d_{s1}, d_{r1}, d_{r2}), \quad q \subset (q_{r2}, q_{r1}, q_{s1}, q_{s2}). \quad (3)$$

В рассматриваемой элементарной модели взаимному расположению слоев обмоток соответствуют два значения телесного угла: 0 и 90°. Тогда в соответствии с (3) трансформаторная ЭДС будет наводиться в соосных обмотках.

Принимая во внимание соотношение

$$\frac{d}{dt} M_{dq}(\theta) = \frac{d}{d\theta} M_{dq}(\theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{d\theta} [M_{dq} \cos(\theta)] \frac{d\theta}{dt} = -M_{dq} \omega \sin(\theta), \quad (4)$$

можно считать, что для произвольной пары обмоток с взаимно перемещающимися слоями, в данном случае – из-за вращения, соответствующая ЭДС вращения будет наводиться, когда взаимная индуктивность минимальна, т. е. когда обмотки взаимно перпендикулярны. Если за положительное направление вращения принять вращение против хода часовой стрелки (в направлении от оси  $q$  к оси  $d$ ), то коэффициент пропорциональности будет отрицательный ( $-M_{qd}$ ), при вращении от оси  $d$  к оси  $q$  – положительный ( $M_{dq}$ ).

В неподвижных обмотках элементарной модели ЭАМ в слоях  $d_{s2}$ ,  $d_{s1}$ ,  $q_{s1}$  и  $q_{s2}$  будут наводиться только трансформаторные ЭДС. Как следствие, будут равны нулю значения взаимных индуктивностей пар обмоток, магнитные оси которых сдвинуты друг относительно друга на угол 90°:  $d_{s2}d_{s1}$ ,  $d_{s2}q_{s1}$ ,  $d_{s2}q_{s2}$ ,  $d_{s1}d_{s2}$ ,  $d_{s1}q_{s1}$ ,  $q_{s1}q_{s2}$ ,  $q_{s1}d_{s2}$ ,  $q_{s1}q_{s2}$ ,  $q_{s1}d_{s1}$ ,  $q_{s2}d_{s2}$ ,  $q_{s2}d_{s1}$  и  $q_{s2}q_{s1}$ .

Для всех возможных пар обмоток с взаимно перемещающимися слоями, в данном случае – вращением любого из слоев  $d_{r1}$ ,  $d_{r2}$ ,  $q_{r1}$  или  $q_{r2}$  относительно самого себя и оставшихся семи слоев, в каждом из слоев будет индуцироваться трансформаторная ЭДС и одновременно генерироваться ЭДС вращения, если парные слои взаимно перемещаются.

В матричной форме записи, результирующие уравнения Лагранжа–Максвелла для элементарной модели ЭАМ, имеют вид

$$\begin{cases} \|U\| = \|Z\| \cdot \|I\|; \\ J \frac{d\omega}{dt} = \|I\| \cdot \|G\| \cdot \|I\| - M_c, \end{cases} \quad (5)$$

где  $M_c$  – момент сил сопротивления на валу ЭАМ.

Система уравнений (5) включает в себя восемь уравнений электрического и одно – механического равновесия.

С учетом (3) и (4) и выбранного условно положительного направления вращения ротора ЭАМ составляющие уравнения (1) в матричной форме записи соответственно равны

$$\|Z\| = \begin{matrix} d_{s2} \\ d_{s1} \\ d_{r1} \\ d_{r2} \\ q_{r2} \\ q_{r1} \\ q_{s1} \\ q_{s2} \end{matrix} \left\| \begin{matrix} R_{11} + L_{11}p & M_{12}p & M_{13}p & M_{14}p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{21}p & R_{22} + L_{22}p & M_{23}p & M_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_{31}p & M_{32}p & R_{33} + L_{33}p & M_{34}p & M_{34}p\theta & L_{33}p\theta & M_{32}p\theta & M_{31}p\theta \\ M_{41}p & M_{42}p & M_{43}p & R_{44} + L_{44}p & L_{44}p\theta & M_{43}p\theta & M_{42}p\theta & M_{41}p\theta \\ -M_{41}p\theta & -M_{42}p\theta & -M_{43}p\theta & -L_{44}p\theta & R_{44} + L_{44}p & M_{43}p & M_{42}p & M_{41}p \\ -M_{31}p\theta & -M_{32}p\theta & -L_{33}p\theta & -M_{34}p\theta & M_{34}p & R_{33} + L_{33}p & M_{32}p & M_{31}p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{24}p & M_{23}p & R_{22} + L_{22}p & M_{21}p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{14}p & M_{13}p & M_{12}p & R_{11} + L_{11}p \end{matrix} \right\| \quad (6)$$

– матрица полного сопротивления,  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования;

$$\|U\|^T = \left\| \begin{matrix} d_{s2} & d_{s1} & d_{r1} & d_{r2} & q_{r2} & q_{r1} & q_{s1} & q_{s2} \\ U_{d_{s2}} & U_{d_{s1}} & U_{d_{r1}} & U_{d_{r2}} & U_{q_{r2}} & U_{q_{r1}} & U_{q_{s1}} & U_{q_{s2}} \end{matrix} \right\| \quad (7)$$

– матрица входных напряжений, включающая двухфазную систему напряжений, приложенных к паре катушек статорного слоя обмотки;

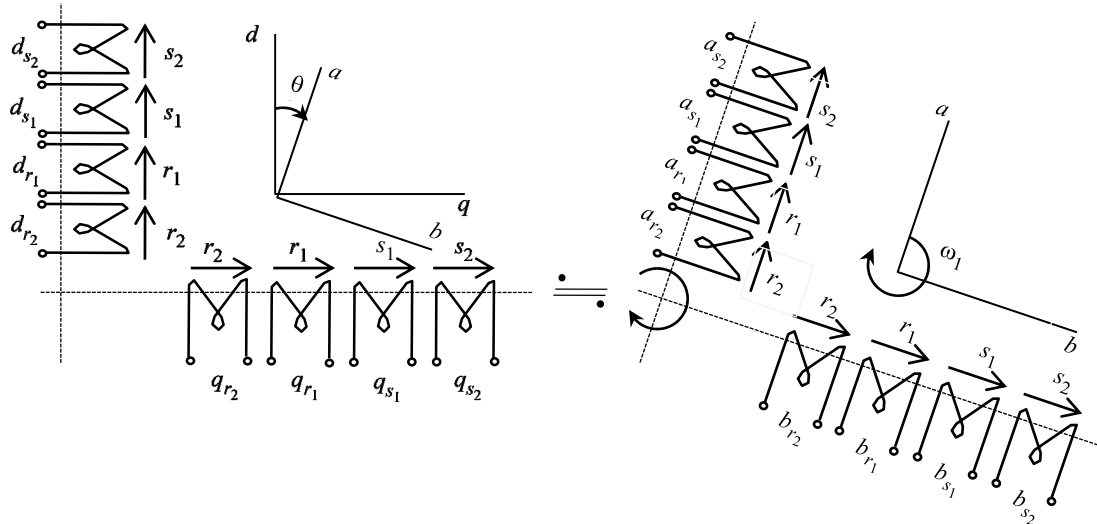


Рис. 2

$$\|I\|^T = \begin{vmatrix} d_{s_2} & d_{s_1} & d_{r_1} & d_{r_2} & q_{r_2} & q_{r_1} & q_{s_1} & q_{s_2} \\ i_{d_{s_2}} & i_{d_{s_1}} & i_{d_{r_1}} & i_{d_{r_2}} & i_{q_{r_2}} & i_{q_{r_1}} & i_{q_{s_1}} & i_{q_{s_2}} \end{vmatrix} \quad (8)$$

– матрица токов в соответствующих обмотках;

$$\|G\| = \begin{vmatrix} d_{s_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{s_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{r_1} & 0 & 0 & 0 & M_{43} & L_{33} & M_{23} & M_{13} \\ d_{r_2} & 0 & 0 & 0 & L_{44} & M_{34} & M_{24} & M_{14} \\ q_{r_2} & -M_{14} & -M_{24} & -M_{34} & -L_{44} & 0 & 0 & 0 \\ q_{r_1} & -M_{13} & -M_{23} & -L_{33} & -M_{43} & 0 & 0 & 0 \\ q_{s_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{s_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \|L\| = \begin{vmatrix} d_{s_2} & L_{11} & M_{21} & M_{31} & M_{41} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{s_1} & M_{12} & L_{22} & M_{32} & M_{42} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{r_1} & M_{13} & M_{23} & L_{33} & M_{43} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{r_2} & M_{14} & M_{24} & M_{34} & L_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_{r_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{44} & M_{34} & M_{24} & M_{14} \\ q_{r_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{43} & L_{33} & M_{23} & M_{13} \\ q_{s_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{42} & M_{32} & L_{22} & M_{12} \\ q_{s_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{41} & M_{31} & M_{21} & L_{11} \end{vmatrix},$$

где  $\|G\|$  – матрица момента;  $\|L\|$  – матрица индуктивностей.

Электромагнитный момент определится выражением

$$M = M_{14} \left( i_{d_{r_2}} i_{q_{s_2}} - i_{q_{r_2}} i_{d_{s_2}} \right) + M_{13} \left( i_{d_{r_1}} i_{q_{s_2}} - i_{q_{r_1}} i_{d_{s_2}} \right) + M_{23} \left( i_{d_{r_1}} i_{q_{s_1}} - i_{q_{r_1}} i_{d_{s_1}} \right) + M_{24} \left( i_{d_{r_2}} i_{q_{s_1}} - i_{q_{r_2}} i_{d_{s_1}} \right).$$

Приведенные уравнения электромеханического равновесия получены в терминах электрических величин (напряжений, токов) и электрических параметров (активных сопротивлений, индуктивностей), введенных применительно к технике анализа и расчета электрических цепей синусоидального тока с сосредоточенными параметрами. Очевидно, что описание физических процессов, лежащих в основе работы данного типа электромеханического преобразователя, в том числе с использованием приведенных ранее вариационных принципов, не полно с точки зрения формальности выбранной техники анализа работы рассматриваемого электромеханического преобразователя и его расчетной модели. В частности, в приведенной модели математически не формализовано физическое явление, связанное с созданием вращающегося магнитного поля применительно к неявнополюсным электрическим машинам индукционного типа, к которым относится ЭАМ. Необходимо учесть принцип обратимости электрической машины и для выбранной техники анализа работы ЭАМ формализовать его математически при составлении соответствующей расчетной модели. Для режима работы ЭАМ в качестве экранированного асинхронного генератора (ЭАГ) в составе автономного источника электроэнергии необходимо преобразовать полученную ранее математическую модель таким образом, чтобы с ее помощью можно было определять мгновенные значения выходных параметров электроэнергии на статоре генератора, включая частоту выходного напряжения.

Запишем уравнения электромеханического равновесия ЭАМ таким образом, чтобы электрические величины, в них входящие, не были в явном виде функциями времени  $t$ .

Введем ортогональный базис  $(a, b)$  с координатными осями  $a_{s_2}, a_{s_1}, a_{r_1}, a_{r_2}, b_{r_2}, b_{r_1}, b_{s_1}$  и  $b_{s_2}$ , вращающимися относительно системы неподвижных осей (рис. 2) с угловой частотой  $\omega_1$ .

В ортогональном неподвижном базисе  $(d, q)$  составляющие произвольного вектора связаны с составляющими данного вектора в ортогональном базисе  $(a, b)$ , вращающемся с произвольной скоростью  $\omega_1$  с помощью матрицы преобразования  $\|C\|$  вида

$$\|C\| = \begin{matrix} & a_{s_2} & a_{s_1} & a_{r_1} & a_{r_2} & b_{r_2} & b_{r_1} & b_{s_1} & b_{s_2} \\ \begin{matrix} d_{s_2} \\ d_{s_1} \\ d_{r_1} \\ d_{r_2} \\ q_{r_2} \\ q_{r_1} \\ q_{s_1} \\ q_{s_2} \end{matrix} & \left\| \begin{matrix} \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_1 & 0 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \theta_1 & 0 & 0 & \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta_1 \end{matrix} \right\| & \end{matrix}, \quad (9)$$

где  $\theta_1 = \omega_1 t$  – угловое положение вращающихся осей базиса  $(a, b)$  относительно неподвижных осей базиса  $(d, q)$  для момента времени  $t$ ;  $\theta_{10}$  – величина  $\theta_1$  для начального момента времени.

Положим, что величина  $\omega_1$  равна угловой частоте напряжения источника питания подключенного к статору ЭАМ. Тогда, по аналогии с матрицей (7), входное напряжение в осях статора равно

$$\|U\|^T = \left\| \begin{matrix} d_{s_2} & d_{s_1} & d_{r_1} & d_{r_2} & q_{r_2} & q_{r_1} & q_{s_1} & q_{s_2} \\ U_{md_{s_2}} \cos(\theta_1 + \theta_{10}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_{mq_{s_2}} \sin(\theta_1 + \theta_{10}) \end{matrix} \right\|, \quad (10)$$

где  $U_{md_{s_2}}$  и  $U_{mq_{s_2}}$  – амплитудные значения входного напряжения в базисе  $(d, q)$  для соответствующих осей, удовлетворяющие соотношению  $U_{md_{s_2}} = U_{mq_{s_2}} = U_m$ .

Введем обозначения:  $\|C\|^T$  – матрица, транспонированная матрице  $\|C\|$ ;  $(\|U\|^T)^T = \|U\|$  – исходная матрица входных напряжений;  $\|U_{a,b}\|$  – матрица входных напряжений в базисе  $(a, b)$ .

С учетом введенных обозначений матрица  $\|U_{a,b}\|$  определится выражением  $\|U_{a,b}\| = \|C\|^T \cdot \|U\|$ .

$$\|U_{a,b}\| = \begin{matrix} & d_{s_2} & d_{s_1} & d_{r_1} & d_{r_2} & q_{r_2} & q_{r_1} & q_{s_1} & q_{s_2} \\ \begin{matrix} a_{s_2} \\ a_{s_1} \\ a_{r_1} \\ a_{r_2} \\ b_{r_2} \\ b_{r_1} \\ b_{s_1} \\ b_{s_2} \end{matrix} & \left\| \begin{matrix} \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta_1 \\ 0 & \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta_1 & 0 & 0 & \sin \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta_1 & 0 \\ -\sin \theta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \theta_1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} d_{s_2} \\ d_{s_1} \\ d_{r_1} \\ d_{r_2} \\ q_{r_2} \\ q_{r_1} \\ q_{s_1} \\ q_{s_2} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} U_m \cos(\theta_1 + \theta_{10}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_m \sin(\theta_1 + \theta_{10}) \end{matrix} \right\| & \end{matrix} = \begin{matrix} & a_{s_2} \\ & a_{s_1} \\ & a_{r_1} \\ & a_{r_2} \\ & b_{r_2} \\ & b_{r_1} \\ & b_{s_1} \\ & b_{s_2} \end{matrix} \left\| \begin{matrix} U_m \cos(\theta_{10}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_m \sin(\theta_{10}) \end{matrix} \right\|. \quad (11)$$

Уравнение электрического равновесия в базисе  $(a, b)$  в матричной форме записи имеет вид

$$\|U_{a, b}\| = \|Z_{a, b}\| \cdot \|I_{a, b}\|, \quad (12)$$

где  $\|Z_{a, b}\|$  – матрица полных сопротивлений в базисе  $(a, b)$ ;  $\|I_{a, b}\|$  – матрица токов в базисе  $(a, b)$  в соответствующих обмотках. По аналогии с (8) запишем матрицу  $\|I_{a, b}\|$  в виде

$$\|I_{a, b}\|^T = \begin{bmatrix} a_{s2} & a_{s1} & a_{r1} & a_{r2} & b_{r2} & b_{r1} & b_{s1} & b_{s2} \\ i_{a_{s2}} & i_{a_{s1}} & i_{a_{r1}} & i_{a_{r2}} & i_{q_{r2}} & i_{q_{r1}} & i_{q_{s1}} & i_{q_{s2}} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Матрица полных сопротивлений в базисе  $(a, b)$  определяется выражением

$$\|Z_{a, b}\| = \|C\|^T \cdot \|Z\| \cdot \|C\| + \|C\|^T \cdot \|L\| \cdot \left\| \frac{dC}{d\theta_1} \right\| p\theta_1. \quad (14)$$

Принимая во внимание (9), (10), (13) и (14), уравнение (12) с учетом (11) примет вид

$$\begin{matrix} U_{m_s} \cos(\theta_{10}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{m_s} \sin(\theta_{10}) \end{matrix} \begin{bmatrix} R_{11}+L_{11}p & M_{12}p & M_{13}p & M_{14}p & -p\theta_1 M_{41} & -p\theta_1 M_{31} & -p\theta_1 M_{21} & -p\theta_1 L_{11} \\ M_{21}p & R_{22}+L_{22}p & M_{23}p & M_{24}p & -p\theta_1 M_{42} & -p\theta_1 M_{32} & -p\theta_1 L_{22} & -p\theta_1 M_{12} \\ M_{31}p & M_{32}p & R_{33}+L_{33}p & M_{34}p & -p\theta_s M_{43} & -p\theta_s L_{33} & -p\theta_s M_{23} & -p\theta_s M_{13} \\ M_{41}p & M_{42}p & M_{43}p & R_{44}+L_{44}p & -p\theta_s L_{44} & -p\theta_s M_{34} & -p\theta_s M_{24} & -p\theta_s M_{14} \\ p\theta_s M_{14} & p\theta_s M_{24} & p\theta_s M_{34} & p\theta_s L_{44} & R_{44}+L_{44}p & M_{43}p & M_{42}p & M_{41}p \\ p\theta_s M_{13} & p\theta_s M_{23} & p\theta_s L_{33} & p\theta_s M_{43} & M_{34}p & R_{33}+L_{33}p & M_{32}p & M_{31}p \\ p\theta_1 M_{12} & p\theta_1 L_{22} & p\theta_1 M_{32} & p\theta_1 M_{42} & M_{24}p & M_{23}p & R_{22}+L_{22}p & M_{21}p \\ p\theta_1 L_{11} & p\theta_1 M_{21} & p\theta_1 M_{31} & p\theta_1 M_{41} & M_{14}p & M_{13}p & M_{12}p & R_{11}+L_{11}p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{a_{s2}} \\ i_{a_{s1}} \\ i_{a_{r1}} \\ i_{a_{r2}} \\ i_{b_{r2}} \\ i_{b_{r1}} \\ i_{b_{s1}} \\ i_{b_{s2}} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Система уравнений электрического равновесия ЭАМ во вращающейся системе координат (15) не учитывает в явном виде физически реализуемый режим работы машины, т. е. двигательный (ЭАД) или генераторный (ЭАГ). Для учета данного начального условия, связанного с выбором требуемого режима работы машины, рассмотрим обобщенную эквивалентную схему соединения осей машины и внешней цепи (источника) во вращающейся системе координат (рис. 3).

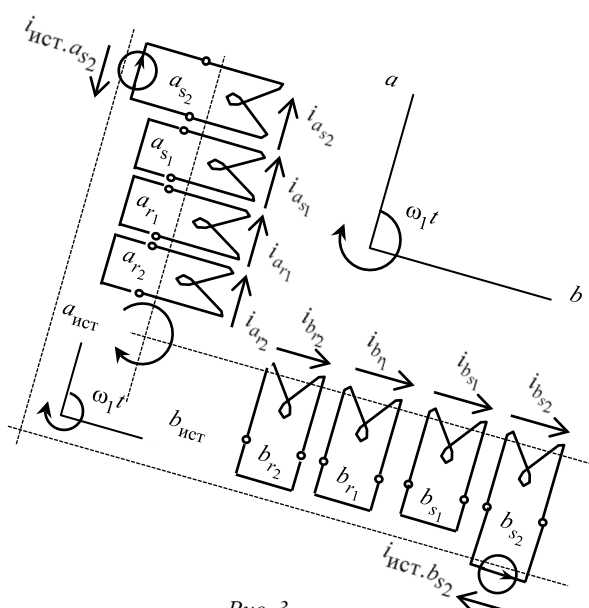


Рис. 3

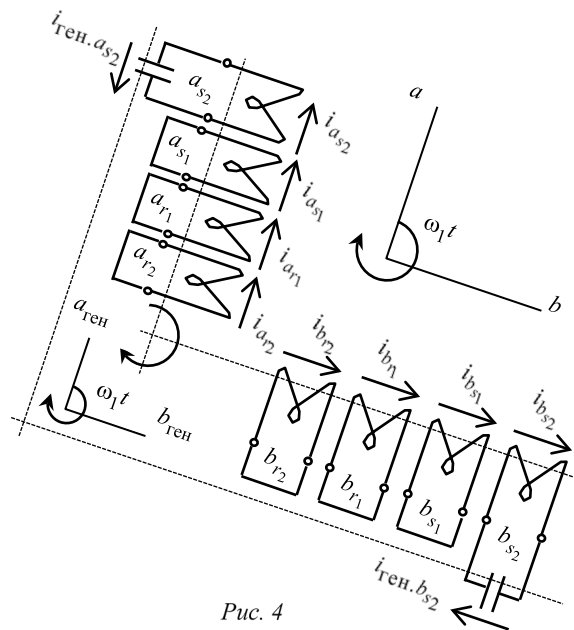


Рис. 4

На рис. 3 приняты следующие обозначения:  $(a, b)$  – ортогональный базис ЭАМ;  $(a_{\text{ист}}, b_{\text{ист}})$  – ортогональный базис внешней цепи (источника – ист.);  $i_{a_{s_2}}, i_{a_{s_1}}, i_{a_{r_1}}, i_{a_{r_2}}, i_{b_{r_2}}, i_{b_{r_1}}, i_{b_{s_1}}, i_{b_{s_2}}$  – токи в соответствующих слоях обмоток ЭАМ;  $i_{\text{ист.}a_{s_2}}, i_{\text{ист.}b_{s_2}}$  – токи в слоях  $a_{s_2}$  и  $b_{s_2}$  внешней цепи (источника).

Например, при работе ЭАМ в автономном генераторном режиме (ЭАГ– ген.) внешняя цепь должна содержать источник реактивной мощности. В случае статического источника реактивной мощности это может быть батарея конденсаторов заданной емкости, например –  $C_{\text{ген}}$ .

Для принятых на рис. 4 обозначений имеем:  $(a, b)$  – ортогональный базис ЭАГ;  $(a_{\text{ген}}, b_{\text{ген}})$  – ортогональный базис внешней цепи (батарея с  $C_{\text{ген}}$ );  $i_{\text{ген.}a_{s_2}}, i_{\text{ген.}b_{s_2}}$  – токи в осях  $a_{s_2}$  и  $b_{s_2}$  батареи.

Преобразования, связывающие электрические величины и параметры ЭАМ в базисе  $(a, b)$  с электрическими величинами и параметрами источника в базисе  $(a_{\text{ист}}, b_{\text{ист}})$ , определяются с помощью матрицы преобразования  $\|C_1\|$  и соответствующей ей транспонированной матрицы  $\|C_1\|^T$  вида

$$\|C_1\| = \begin{matrix} & a_{s_{2\Sigma}} & a_{s_{1\Sigma}} & a_{r_{1\Sigma}} & a_{r_{2\Sigma}} & b_{r_{2\Sigma}} & b_{r_{1\Sigma}} & b_{s_{1\Sigma}} & b_{s_{2\Sigma}} \\ \begin{matrix} a_{s_2} \\ a_{s_1} \\ a_{r_1} \\ a_{r_2} \\ b_{r_2} \\ b_{r_1} \\ b_{s_1} \\ b_{s_2} \\ a_{\text{ист.}s_2} \\ b_{\text{ист.}s_2} \end{matrix} & \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \right\| \end{matrix}, \quad (16)$$

$$\|C_1\|^T = \begin{matrix} & a_{s_2} & a_{s_1} & a_{r_1} & a_{r_2} & b_{r_2} & b_{r_1} & b_{s_1} & b_{s_2} & a_{\text{ист.}s_2} & b_{\text{ист.}s_2} \\ \begin{matrix} a_{s_{2\Sigma}} \\ a_{s_{1\Sigma}} \\ a_{r_{1\Sigma}} \\ a_{r_{2\Sigma}} \\ b_{r_{2\Sigma}} \\ b_{r_{1\Sigma}} \\ b_{s_{1\Sigma}} \\ b_{s_{2\Sigma}} \end{matrix} & \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{matrix} \right\| \end{matrix}; \quad (17)$$

где  $a_{s_{2\Sigma}}, a_{s_{1\Sigma}}, a_{r_{1\Sigma}}, a_{r_{2\Sigma}}, b_{r_{2\Sigma}}, b_{r_{1\Sigma}}, b_{s_{1\Sigma}}$  и  $b_{s_{2\Sigma}}$  координатные оси в базисе  $(a + a_{\text{ист}}, b + b_{\text{ист}})$ .

В матричной форме записи результирующая матрица напряжений  $\|U_{\Sigma}\|$  в базисе  $(a + a_{\text{ист}}, b + b_{\text{ист}})$  определится выражением

$$\|U_{\Sigma}\| = \|C_1\|^T \cdot \|U\|, \quad (18)$$

где  $\|U\|$  – матрица напряжений в осях  $a_{s_2}, a_{s_1}, a_{r_1}, a_{r_2}, b_{r_2}, b_{r_1}, b_{s_1}, b_{s_2}, i_{\text{ист.}a_{s_2}}$  и  $i_{\text{ист.}b_{s_2}}$ .



Положим, что матрица  $\|U\|^T$ , транспонированная матрице  $\|U\|$ , с учетом введенных ранее индексных обозначений имеет вид

$$\|U\|^T = \begin{vmatrix} a_{s_2} & a_{s_1} & a_{r_1} & a_{r_2} & b_{r_2} & b_{r_1} & b_{s_1} & b_{s_2} & a_{\text{ист. } s_2} & b_{\text{ист. } s_2} \\ U_{m_s} \cos(\theta_{10}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_{m_s} \sin(\theta_{10}) & U_{\text{ист. } a_{s_2}} & U_{\text{ист. } b_{s_2}} \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Выражение (18) с учетом матриц (16) и (19) примет вид

$$\begin{vmatrix} a_{s_{2\Sigma}} \\ a_{s_{1\Sigma}} \\ a_{r_{1\Sigma}} \\ a_{r_{2\Sigma}} \\ b_{r_{2\Sigma}} \\ b_{r_{1\Sigma}} \\ b_{s_{1\Sigma}} \\ b_{s_{2\Sigma}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{m_s} \cos(\theta_{10}) - U_{\text{ист. } a_{s_2}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{m_s} \sin(\theta_{10}) - U_{\text{ист. } b_{s_2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{s_2} & a_{s_1} & a_{r_1} & a_{r_2} & b_{r_2} & b_{r_1} & b_{s_1} & b_{s_2} & a_{\text{ист. } s_2} & b_{\text{ист. } s_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{s_2} \\ a_{s_1} \\ a_{r_1} \\ a_{r_2} \\ b_{r_2} \\ b_{r_1} \\ b_{s_1} \\ b_{s_2} \\ a_{\text{ист. } s_2} \\ b_{\text{ист. } s_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_{m_s} \cos(\theta_{10}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{m_s} \sin(\theta_{10}) \\ U_{\text{ист. } a_{s_2}} \\ U_{\text{ист. } b_{s_2}} \end{vmatrix}. \quad (20)$$

С помощью матриц  $\|C_1\|$  и  $\|C_1\|^T$  можно определить матрицу  $\|Z_\Sigma\|$ , соответствующую матрице полных сопротивлений в базисе  $(a + a_{\text{ист}}, b + b_{\text{ист}})$ , по выражению

$$\|Z_\Sigma\| = \|C_1\|^T \cdot (\|Z_{a,b}\| \cup \|Z_{\text{ист}}\|) \cdot \|C_1\|, \quad (21)$$

где  $\|Z_{a,b}\|$  – матрица полных сопротивлений в базисе  $(a, b)$ , определяемая выражением (15);  $\|Z_{\text{ист}}\|$  – матрица полных сопротивлений внешнего источника напряжения (тока);  $\|Z_{a,b}\| \cup \|Z_{\text{ист}}\|$  – объединенная матрица.

Определим матрицу  $\|Z_{\text{ист}}\|$  в осях  $i_{\text{ист } a_{s_2}}$  и  $i_{\text{ист } b_{s_2}}$  как произвольную функцию оператора  $p$ :

$$\|Z_{\text{ист}}\| = \begin{vmatrix} a_{\text{ист } s_2} & b_{\text{ист } s_2} \\ Z_{\text{ист}}(p) & 0 \\ 0 & Z_{\text{ист}}(p) \end{vmatrix}. \quad (22)$$

Множимое правой части уравнения (15) позволяет записать матрицу  $\|Z_{a,b}\|$  в виде

$$\|Z_{a,b}\| = \begin{vmatrix} a_{s_2} & a_{s_1} & a_{r_1} & a_{r_2} & b_{r_2} & b_{r_1} & b_{s_1} & b_{s_2} \\ R_{11} + L_{11}p & M_{12}p & M_{13}p & M_{14}p & -p\theta_1 M_{41} & -p\theta_1 M_{31} & -p\theta_1 M_{21} & -p\theta_1 L_{11} \\ M_{21}p & R_{22} + L_{22}p & M_{23}p & M_{24}p & -p\theta_1 M_{42} & -p\theta_1 M_{32} & -p\theta_1 L_{22} & -p\theta_1 M_{12} \\ M_{31}p & M_{32}p & R_{33} + L_{33}p & M_{34}p & -p\theta_S M_{43} & -p\theta_S L_{33} & -p\theta_S M_{23} & -p\theta_S M_{13} \\ M_{41}p & M_{42}p & M_{43}p & R_{44} + L_{44}p & -p\theta_S L_{44} & -p\theta_S M_{34} & -p\theta_S M_{24} & -p\theta_S M_{14} \\ p\theta_S M_{14} & p\theta_S M_{24} & p\theta_S M_{34} & p\theta_S L_{44} & R_{44} + L_{44}p & M_{43}p & M_{42}p & M_{41}p \\ p\theta_S M_{13} & p\theta_S M_{23} & p\theta_S L_{33} & p\theta_S M_{43} & M_{34}p & R_{33} + L_{33}p & M_{32}p & M_{31}p \\ p\theta_1 M_{12} & p\theta_1 L_{22} & p\theta_1 M_{32} & p\theta_1 M_{42} & M_{24}p & M_{23}p & R_{22} + L_{22}p & M_{21}p \\ p\theta_1 L_{11} & p\theta_1 M_{21} & p\theta_1 M_{31} & p\theta_1 M_{41} & M_{14}p & M_{13}p & M_{12}p & R_{11} + L_{11}p \end{vmatrix}. \quad (23)$$

Объединенную матрицу  $\|Z_{a,b}\| \cup \|Z_{ист}\|$  с учетом (22) и (23) определим следующим образом:

$$\|Z_{a,b}\| \cup \|Z_{ист}\| = \begin{matrix} & a_{s_2} & a_{s_1} & a_{r_1} & a_{r_2} & b_{r_2} & b_{r_1} & b_{s_1} & b_{s_2} & a_{ист.s_2} & b_{ист.s_2} \\ a_{s_2} & R_{11}+L_{11}p & M_{12}p & M_{13}p & M_{14}p & -p\theta_1 M_{41} & -p\theta_1 M_{31} & -p\theta_1 M_{21} & -p\theta_1 L_{11} & 0 & 0 \\ a_{s_1} & M_{21}p & R_{22}+L_{22}p & M_{23}p & M_{24}p & -p\theta_1 M_{42} & -p\theta_1 M_{32} & -p\theta_1 L_{22} & -p\theta_1 M_{12} & 0 & 0 \\ a_{r_1} & M_{31}p & M_{32}p & R_{33}+L_{33}p & M_{34}p & -p\theta_S M_{43} & -p\theta_S L_{33} & -p\theta_S M_{23} & -p\theta_S M_{13} & 0 & 0 \\ a_{r_2} & M_{41}p & M_{42}p & M_{43}p & R_{44}+L_{44}p & -p\theta_S L_{44} & -p\theta_S M_{34} & -p\theta_S M_{24} & -p\theta_S M_{14} & 0 & 0 \\ b_{r_2} & p\theta_S M_{14} & p\theta_S M_{24} & p\theta_S M_{34} & p\theta_S L_{44} & R_{44}+L_{44}p & M_{43}p & M_{42}p & M_{41}p & 0 & 0 \\ b_{r_1} & p\theta_S M_{13} & p\theta_S M_{23} & p\theta_S L_{33} & p\theta_S M_{43} & M_{34}p & R_{33}+L_{33}p & M_{32}p & M_{31}p & 0 & 0 \\ b_{s_1} & p\theta_1 M_{12} & p\theta_1 L_{22} & p\theta_1 M_{32} & p\theta_1 M_{42} & M_{24}p & M_{23}p & R_{22}+L_{22}p & M_{21}p & 0 & 0 \\ b_{s_2} & p\theta_1 L_{11} & p\theta_1 M_{21} & p\theta_1 M_{31} & p\theta_1 M_{41} & M_{14}p & M_{13}p & M_{12}p & R_{11}+L_{11}p & 0 & 0 \\ a_{ист.s_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{ист}(p) & 0 \\ b_{ист.s_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_{ист}(p) \end{matrix} \quad (24)$$

С учетом (16), (17) и (24) уравнение (21) примет вид

$$\|Z_{\Sigma}\| = \|C_1\|^T \cdot (\|Z_{a,b}\| \cup \|Z_{ист}\|) \cdot \|C_1\| = \begin{matrix} & a_{s_2} & a_{s_1} & a_{r_1} & a_{r_2} & b_{r_2} & b_{r_1} & b_{s_1} & b_{s_2} \\ a_{s_2} & R_{11}+L_{11}p+Z_{ист} & M_{12}p & M_{13}p & M_{14}p & -p\theta_1 M_{41} & -p\theta_1 M_{31} & -p\theta_1 M_{21} & -p\theta_1 L_{11} \\ a_{s_1} & M_{21}p & R_{22}+L_{22}p & M_{23}p & M_{24}p & -p\theta_1 M_{42} & -p\theta_1 M_{32} & -p\theta_1 L_{22} & -p\theta_1 M_{12} \\ a_{r_1} & M_{31}p & M_{32}p & R_{33}+L_{33}p & M_{34}p & -p\theta_S M_{43} & -p\theta_S L_{33} & -p\theta_S M_{23} & -p\theta_S M_{13} \\ a_{r_2} & M_{41}p & M_{42}p & M_{43}p & R_{44}+L_{44}p & -p\theta_S L_{44} & -p\theta_S M_{34} & -p\theta_S M_{24} & -p\theta_S M_{14} \\ b_{r_2} & p\theta_S M_{14} & p\theta_S M_{24} & p\theta_S M_{34} & p\theta_S L_{44} & R_{44}+L_{44}p & M_{43}p & M_{42}p & M_{41}p \\ b_{r_1} & p\theta_S M_{13} & p\theta_S M_{23} & p\theta_S L_{33} & p\theta_S M_{43} & M_{34}p & R_{33}+L_{33}p & M_{32}p & M_{31}p \\ b_{s_1} & p\theta_1 M_{12} & p\theta_1 L_{22} & p\theta_1 M_{32} & p\theta_1 M_{42} & M_{24}p & M_{23}p & R_{22}+L_{22}p & M_{21}p \\ b_{s_2} & p\theta_1 L_{11} & p\theta_1 M_{21} & p\theta_1 M_{31} & p\theta_1 M_{41} & M_{14}p & M_{13}p & M_{12}p & R_{11}+L_{11}p+Z_{ист} \end{matrix} \quad (25)$$

Примем следующие индексные обозначения для матричной формы записи токов, приведенных в соответствующей матрице  $\|I_{\Sigma}\|$  в осях  $a_{s_{2\Sigma}}, a_{s_{1\Sigma}}, a_{r_{1\Sigma}}, a_{r_{2\Sigma}}, b_{r_{2\Sigma}}, b_{r_{1\Sigma}}, b_{s_{1\Sigma}}$  и  $b_{s_{2\Sigma}}$  базиса ( $a + a_{ист}, b + b_{ист}$ ).

По аналогии с (19) запишем матрицу  $\|I_{\Sigma}\|^T$ , транспонированную матрице  $\|I_{\Sigma}\|$ :

$$\|I_{\Sigma}\|^T = \begin{matrix} a_{s_{2\Sigma}} & a_{s_{1\Sigma}} & a_{r_{1\Sigma}} & a_{r_{2\Sigma}} & b_{r_{2\Sigma}} & b_{r_{1\Sigma}} & b_{s_{1\Sigma}} & b_{s_{2\Sigma}} \\ i_{a_{s_{2\Sigma}}} & i_{a_{s_{1\Sigma}}} & i_{a_{r_{1\Sigma}}} & i_{a_{r_{2\Sigma}}} & i_{q_{r_{2\Sigma}}} & i_{q_{r_{1\Sigma}}} & i_{q_{s_{1\Sigma}}} & i_{q_{s_{2\Sigma}}} \end{matrix} \quad (26)$$

Связанная система на рис. 3, образованная электрическим соединением осей ЭАМ, т. е. осей  $a_{s_2}, a_{s_1}, a_{r_1}, a_{r_2}, b_{r_2}, b_{r_1}, b_{s_1}, b_{s_2}$  с осями  $i_{ист.a_{s_2}}, i_{ист.b_{s_2}}$  источника, и соответствующая такой системе система уравнений электрического равновесия в базисе ( $a + a_{ист}, b + b_{ист}$ ) определится уравнением

$$\|U_{\Sigma}\| = \|Z_{\Sigma}\| \cdot (\|I_{\Sigma}\|^T)^T, \quad (22)$$

где матрица  $\|U_{\Sigma}\|$  определяется правой частью уравнения (20).

Преобразовав (27) с учетом (20), (25) и (26), получим

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 U_{m_s} \cos(\theta_{10}) \\
 -U_{\text{ист.}a_{s_2}} \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 U_{m_s} \sin(\theta_{10}) - \\
 -U_{\text{ист.}b_{s_2}}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 R_{11}+L_{11}p \\
 + Z_{\text{ист}}
 \end{array} \right\| \\
 \left. \begin{array}{l}
 M_{12}p \\
 M_{21}p \\
 M_{31}p \\
 M_{41}p \\
 p\theta_s M_{14} \\
 p\theta_s M_{13} \\
 p\theta_1 M_{12} \\
 p\theta_1 L_{11}
 \end{array} \right\| \\
 \left. \begin{array}{l}
 M_{13}p \\
 M_{23}p \\
 M_{33}+L_{33}p \\
 M_{43}p \\
 p\theta_s M_{34} \\
 p\theta_s L_{33} \\
 p\theta_1 M_{32} \\
 p\theta_1 M_{31}
 \end{array} \right\| \\
 \left. \begin{array}{l}
 M_{14}p \\
 M_{24}p \\
 M_{34}p \\
 R_{44}+L_{44}p \\
 M_{43}p \\
 M_{34}p \\
 M_{24}p \\
 M_{14}p
 \end{array} \right\| \\
 \left. \begin{array}{l}
 -p\theta_1 M_{41} \\
 -p\theta_1 M_{42} \\
 -p\theta_s M_{43} \\
 -p\theta_s L_{44} \\
 R_{44}+L_{44}p \\
 M_{34}p \\
 M_{23}p \\
 M_{13}p
 \end{array} \right\| \\
 \left. \begin{array}{l}
 -p\theta_1 M_{31} \\
 -p\theta_1 M_{32} \\
 -p\theta_s L_{33} \\
 -p\theta_s M_{34} \\
 M_{43}p \\
 R_{33}+L_{33}p \\
 M_{32}p \\
 M_{13}p
 \end{array} \right\| \\
 \left. \begin{array}{l}
 -p\theta_1 M_{21} \\
 -p\theta_1 L_{22} \\
 -p\theta_s M_{23} \\
 -p\theta_s M_{24} \\
 M_{42}p \\
 M_{32}p \\
 R_{22}+L_{22}p \\
 M_{23}p
 \end{array} \right\| \\
 \left. \begin{array}{l}
 -p\theta_1 L_{11} \\
 -p\theta_1 M_{12} \\
 -p\theta_s M_{13} \\
 -p\theta_s M_{14} \\
 M_{41}p \\
 M_{31}p \\
 M_{21}p \\
 R_{11}+L_{11}p + \\
 + Z_{\text{ист}}
 \end{array} \right\| \\
 \left. \begin{array}{l}
 i_{a_{s_{2\Sigma}}} \\
 i_{a_{s_{1\Sigma}}} \\
 i_{a_{r_{1\Sigma}}} \\
 i_{a_{r_{2\Sigma}}} \\
 i_{b_{r_{2\Sigma}}} \\
 i_{b_{r_{1\Sigma}}} \\
 i_{b_{s_{1\Sigma}}} \\
 i_{b_{s_{2\Sigma}}}
 \end{array} \right\|
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (28)$$

Уравнение механического равновесия с учетом введенных ранее обозначений и уравнения для электромагнитного момента ЭАМ соответствует выражению

$$\begin{aligned}
 J \frac{d\omega}{dt} = & M_{14} \left( i_{a_{r_{2\Sigma}}} i_{b_{s_{2\Sigma}}} - i_{b_{r_{2\Sigma}}} i_{a_{s_{2\Sigma}}} \right) + M_{13} \left( i_{a_{r_{1\Sigma}}} i_{b_{s_{2\Sigma}}} - i_{b_{r_{1\Sigma}}} i_{a_{s_{2\Sigma}}} \right) + \\
 & + M_{23} \left( i_{a_{r_{1\Sigma}}} i_{b_{s_{1\Sigma}}} - i_{b_{r_{1\Sigma}}} i_{a_{s_{1\Sigma}}} \right) + M_{24} \left( i_{a_{r_{2\Sigma}}} i_{b_{s_{1\Sigma}}} - i_{b_{r_{2\Sigma}}} i_{a_{s_{1\Sigma}}} \right) - M_c.
 \end{aligned}
 \quad (29)$$

Используя (28) и (29), рассмотрим работу ЭАМ в режиме экранированного асинхронного двигателя (ЭАД) на примере технологического трубопровода (ТТ) с нефтепродуктом.

Работу ЭАД в составе ТТ с нефтепродуктом исследуем с использованием программы для ЭВМ [4].

Применив программу расчета ЭАД, предварительно определяем параметры его схемы замещения [5].

Величина расхода для ТТ с нефтепродуктом описывается дифференциальным уравнением вида

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{k_{\text{тр}} S_{\text{тр}}}{\rho D_{\text{тр}}^{4.87}} Q^{1.85} + \frac{g S_{\text{тр}}}{l_{\text{тр}}} h_1(t - \tau_{\text{тр}}) - \frac{g S_{\text{тр}}}{l_{\text{тр}}} h_2(t),$$

где  $Q$  – расход нефтепродукта на выходе трубопровода, м<sup>3</sup>/с;  $h_1$  и  $h_2$  – гидростатические давления жидкости на концах трубопровода, м;  $l_{\text{тр}}$  – длина трубопровода, м;  $D_{\text{тр}}$  – диаметр трубопровода, м;  $k_{\text{тр}}$  – коэффициент потерь на трение в трубопроводе;  $\rho$  – плотность нефтепродукта;  $\tau_{\text{тр}}$  – постоянное запаздывание по управлению, с;  $S_{\text{тр}}$  – площадь трубопровода, м<sup>2</sup>.

Использование ЭАД в составе частотно-регулируемого электропривода позволяет решить одну из задач управления в рассматриваемой технологической схеме – обеспечение заданного расхода нефтепродукта на выходе трубопровода [6].

Рассмотрим работу ЭАМ в автономном режиме в качестве ЭАГ.

Для выбранной ранее техники анализа работы ЭАМ в терминах электрических параметров, соответствующих цепям синусоидального переменного тока с сосредоточенными параметрами, в качестве ис-

точника реактивной мощности должен быть выбран участок цепи, на котором напряжение на границах данного участка пропорционально количеству зарядов на данных границах, т. е. участок цепи, обладающий электрической емкостью.

Расчетная схема элементарной модели ЭАГ во вращающейся системе координат приведена на рис. 4. Для вывода уравнений электрического равновесия, соответствующих данному режиму работы, воспользуемся системой уравнений (28) и уравнением (29).

Поскольку в основе работы ЭАГ лежит режим самовозбуждения, то применительно к рассматриваемому режиму в начальный момент времени с учетом остаточной намагниченности ротора  $U_{a_{s_2}} = U_{m_s} \cos(\theta_{10}) \neq 0$  и  $U_{b_{s_2}} = U_{m_s} \sin(\theta_{10}) \neq 0$ . По мере развития процесса самовозбуждения напряжения в цепи статора будут функциями соответствующих статорных токов, т. е.

$$U_{a_{s_2}} = f(i_{a_{s_2\Sigma}}); \quad (30)$$

$$U_{b_{s_2}} = f(i_{b_{s_2\Sigma}}), \quad (31)$$

и количественно тождественны характеристике холостого хода ЭАМ.

В (28) пара произведений вида  $Z_{\text{ист}} i_{a_{s_2\Sigma}}$  и  $Z_{\text{ист}} i_{b_{s_2\Sigma}}$   $Z_{\text{ист}}$  с физической точки зрения эквивалентна падению напряжения на внутренних сопротивлениях источника в соответствующих осях  $a_{s_2}$  и  $b_{s_2}$ . Если источник имеет бесконечную мощность (работа ЭАМ в режиме ЭАД), то очевидно, что указанная пара произведений равна нулю. В свою очередь, если ЭАМ работает в режиме ЭАГ в качестве источника электроэнергии ограниченной мощности, то целесообразно аналитически указанные слагаемые перенести в левую часть соответствующих уравнений системы (28). При этом парная сумма слагаемых системы (28) вида  $-(U_{\text{ист.}a_{s_2}} + Z_{\text{ист}} i_{a_{s_2\Sigma}})$  и  $-(U_{\text{ист.}b_{s_2}} + Z_{\text{ист}} i_{b_{s_2\Sigma}})$  в осях  $a_{s_2}$  и  $b_{s_2}$  приводит к необходимости использования в дальнейших расчетах напряжений не  $U_{\text{ист.}a_{s_2}}$  и  $U_{\text{ист.}b_{s_2}}$ , а  $U_{\text{ген.}a_{s_2}} = (U_{\text{ист.}a_{s_2}} + Z_{\text{ист}} i_{a_{s_2\Sigma}})$  и  $U_{\text{ген.}b_{s_2}} = (U_{\text{ист.}b_{s_2}} + Z_{\text{ист}} i_{b_{s_2\Sigma}})$  на батарее с  $C_{\text{ген}}$ . С физической точки зрения напряжения  $U_{\text{ист.}a_{s_2}}$  и  $U_{\text{ист.}b_{s_2}}$  представляют собой начальные значения напряжений батареи с  $C_{\text{ген}}$ . Слагаемые вида  $Z_{\text{ист}} i_{a_{s_2\Sigma}}$  и  $Z_{\text{ист}} i_{b_{s_2\Sigma}}$  эквивалентны напряжениям  $U_{C_{\text{ген}}a_{s_2}}$  и  $U_{C_{\text{ген}}b_{s_2}}$  в осях  $a_{s_2}$  и  $b_{s_2}$  на батарее с  $C_{\text{ген}}$ . Поскольку уравнения системы (28) записаны в осях  $a_{s_2}$  и  $b_{s_2}$ , вращающихся со скоростью  $p\theta_1$ , то напряжения на батарее конденсаторов емкостью  $C_{\text{ген}}$  также должны быть записаны для вращающихся осей. С учетом введенных обозначений в осях  $a_{s_2}$  и  $b_{s_2}$  напряжения  $U_{C_{\text{ген}}a_{s_2}}$  и  $U_{C_{\text{ген}}b_{s_2}}$  определяются выражениями

$$\frac{dU_{C_{\text{ген}}a_{s_2}}}{dt} = U_{C_{\text{ген}}b_{s_2}} p\theta_1 + \frac{1}{C_{\text{ген}}} i_{a_{s_2\Sigma}}; \quad (32)$$

$$\frac{dU_{C_{\text{ген}}b_{s_2}}}{dt} = -U_{C_{\text{ген}}a_{s_2}} p\theta_1 + \frac{1}{C_{\text{ген}}} i_{b_{s_2\Sigma}}. \quad (33)$$

Если принять, что начальный заряд батареи с  $C_{\text{ген}}$  равен нулю, т. е.  $U_{\text{ист.}a_{s_2}} = U_{\text{ист.}b_{s_2}} = 0$ , то с учетом (28), (30)–(33) система уравнений электрического равновесия ЭАГ имеет вид

$$\begin{cases}
 \begin{pmatrix} U_{a_{s_2}} - \\ -U_{\text{ген}a_{s_2}} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U_{b_{s_2}} - \\ -U_{\text{ген}b_{s_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11}+L_{11}p & & & & & & & & & \\ +Z_{\text{ист}} & M_{12}p & M_{13}p & M_{14}p & -p\theta_1 M_{41} & -p\theta_1 M_{31} & -p\theta_1 M_{21} & -p\theta_1 L_{11} & & \\ & M_{21}p & R_{22}+L_{22}p & M_{23}p & M_{24}p & -p\theta_1 M_{42} & -p\theta_1 M_{32} & -p\theta_1 L_{22} & -p\theta_1 M_{12} & \\ & M_{31}p & M_{32}p & R_{33}+L_{33}p & M_{34}p & -p\theta_S M_{43} & -p\theta_S L_{33} & -p\theta_S M_{23} & -p\theta_S M_{13} & \\ & M_{41}p & M_{42}p & M_{43}p & R_{44}+L_{44}p & -p\theta_S L_{44} & -p\theta_S M_{34} & -p\theta_S M_{24} & -p\theta_S M_{14} & \\ & p\theta_S M_{14} & p\theta_S M_{24} & p\theta_S M_{34} & p\theta_S L_{44} & R_{44}+L_{44}p & M_{43}p & M_{42}p & M_{41}p & \\ & p\theta_S M_{13} & p\theta_S M_{23} & p\theta_S L_{33} & p\theta_S M_{43} & M_{34}p & R_{33}+L_{33}p & M_{32}p & M_{31}p & \\ & p\theta_1 M_{12} & p\theta_1 L_{22} & p\theta_1 M_{32} & p\theta_1 M_{42} & M_{24}p & M_{23}p & R_{22}+L_{22}p & M_{21}p & \\ & p\theta_1 L_{11} & p\theta_1 M_{21} & p\theta_1 M_{31} & p\theta_1 M_{41} & M_{14}p & M_{13}p & M_{12}p & R_{11}+L_{11}p & \\ & & & & & & & & +Z_{\text{ист}} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{a_{s_{2\Sigma}}} \\ i_{a_{s_{1\Sigma}}} \\ i_{a_{r_{1\Sigma}}} \\ i_{a_{r_{2\Sigma}}} \\ i_{b_{r_{2\Sigma}}} \\ i_{b_{r_{1\Sigma}}} \\ i_{b_{s_{1\Sigma}}} \\ i_{b_{s_{2\Sigma}}} \end{pmatrix}; \quad (34)
 \end{cases}$$

$$\frac{dU_{C_{\text{ген}a_{s_2}}}}{dt} = U_{C_{\text{ген}b_{s_2}}} p\theta_1 + \frac{1}{C_{\text{ген}}} i_{a_{s_{2\Sigma}}}; \quad \frac{dU_{C_{\text{ген}b_{s_2}}}}{dt} = -U_{C_{\text{ген}a_{s_2}}} p\theta_1 + \frac{1}{C_{\text{ген}}} i_{b_{s_{2\Sigma}}};$$

$$U i_{a_{s_2}} = f(i_{a_{s_{2\Sigma}}}), \quad U b_{s_2} = f(i_{b_{s_{2\Sigma}}}).$$

С учетом системы уравнений (34) рассмотрим работу ЭАГ в качестве автономного источника электрической энергии на примере установки микроГЭС [7].

Предварительно определяем параметры схемы замещения ЭАД, применив программу расчета [5].

Для регулирования выходных параметров электроэнергии ЭАГ в составе энергоблока микроГЭС воспользуемся двухканальной схемой регулирования мощности [8]. При двухканальном регулировании мощности обеспечивается выполнение тождества

$$P_{\text{ном. ген}} - (P_{\text{ном. нагр}} + P_{\text{бал}}) = 0, \quad (35)$$

где  $P_{\text{ном. ген}}$  – номинальная мощность ЭАГ, кВт;  $P_{\text{ном. нагр}}$  – номинальная мощность нагрузки на стороне статора ЭАГ, кВт;  $P_{\text{бал}}$  – номинальная мощность балластной нагрузки на стороне статора ЭАГ, кВт.

Балластная мощность определяет максимальную возможную часть мощности, которая может быть передана в нагрузку потребителям энергии. Зная  $P_{\text{бал}}$  и мощность турбины  $P_{\text{турб}}$ , при помощи (35) для текущего значения скорости вращения турбины  $\omega_{\text{турб}}$  можно определить значение момента сопротивления  $M_c$  на ее валу, создаваемого нагрузкой ЭАГ. Таким образом, при моделировании работы ЭАГ в составе энергоблока микроГЭС необходимо учесть в уравнении механического равновесия (29), что  $M_c = M_{\text{турб}}$ , где  $M_{\text{турб}}$  – момент, развиваемый турбиной.

Из вышеизложенного можно сделать следующие выводы:

1. В терминах измеряемых физических величин и параметров применительно к цепям синусоидального тока с сосредоточенными параметрами с использованием модели двухфазной обобщенной электрической машины и динамических уравнений Лагранжа приведены уравнения электромеханического равновесия для ЭАМ в составе электромагнитного привода.

2. Получены математические модели, доказывающие принцип обратимости электрических машин на примере ЭАМ для двух режимов ее работы: двигательного в составе привода центробежного герметичного насоса и генераторного в составе энергоблока микроГЭС напорного типа.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Машины и аппараты химических производств / И. И. Чернобыльский, А. Г. Бондарь, Б. А. Гаевский и др.; под общ. ред. И. И. Чернобыльского. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1975.
2. Карелин В. Я. Кривченко Г. И. Гидроэлектрические станции: учеб. для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Энергоатомиздат, 1987.
3. Борцов Ю. А., Поляхов Н. Д., Путов В. В. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1984.
4. Св-во № 2013660633 РФ. Расчет адаптивно-модальной системы управления для промышленного технологического трубопровода и системы частотного управления герметическим электроприводом на базе экранированного асинхронного электродвигателя / А. Г. Черных, А. Г. Иванов, А. В. Бондаренко, Р. В. Давыдов; заявитель и патентообладатель Иркутская государственная сельскохозяйственная академия (RU); заявл. 16.09.2013; опубл. 12.11.2013, Реестр программ для ЭВМ.
5. Св-во № 2011610171 РФ. Расчет параметров и характеристик экранированного асинхронного электродвигателя / А. Г. Черных, А. Г. Иванов, А. В. Бондаренко, заявитель и патентообладатель Иркутская государственная сельскохозяйственная академия (RU); заявл. 22.10.2010; опубл. 11.01.2011, Реестр программ для ЭВМ.
6. Черных А. Г. Регулирование расхода жидкости в технологическом трубопроводе с помощью герметического электропривода на базе экранированного асинхронного двигателя // Материалы X Междунар. науч.-практ. конф. «Стратегические вопросы мировой науки – 2014». Польша, Перемышль: Техническая наука, 2014. Т. 35. С. 35–42.
7. Черных А. Г. Гидравлический расчет установки МикроГЭС на базе центробежного насоса с экранированным асинхронным двигателем // Изв. Санкт-Петерб. гос. аграрного ун-та. 2016. № 44. С. 261–269.
8. Черных А. Г. Расчет теплового баланса проточной части установки микроГЭС на базе центробежного насоса с экранированным асинхронным двигателем // Изв. Санкт-Петерб. гос. аграрного ун-та. 2019. № 4 (57). С. 148–157.

---

A. G. Chernykh

*Irkutsk State Agrarian University named after A. A. Ezhevsky*

### MATHEMATICAL MODEL OF ELECTROMAGNETIC DRIVE OF HERMETIC CENTRIFUGAL PUMP

*Using the concept and uniform form of Lagrange differential equations for electromagnetic and mechanical variables in relation to a two-dimensional model of a generalized electric machine, identical equations of Electromechanical equilibrium for a shielded asynchronous machine (EAM) are obtained. On the example of the built-in drive of the centrifugal hermetic pump with EAM the equations of Electromechanical equilibrium corresponding to two modes of operation of the machine are considered. In the first case, the equations corresponding to the direct pumping mode of the EAM as a shielded asynchronous motor (EAD) are given on the example of a process pipeline with oil products. In the second case, the equations corresponding to the reverse turbine mode of operation of the EAM as a shielded asynchronous generator (EAG) are given on the example of the microgcs installation. For the generator mode of operation for a section of the circuit with concentrated parameters having an electrical capacitance equivalent to a static reactive power source (IRM), the equations of electrical equilibrium in a rotating coordinate system are obtained. The resulting system of equations EAM and IRM allows analytical study of static and dynamic modes of EAG in the Autonomous power system.*

**Shielded asynchronous machine, centrifugal sealed pump, shielded asynchronous motor, shielded asynchronous generator, microelectric power plant, autonomous power system, static reactive power source, mathematical model**

---