УДК 004.021

Д. Е. Гейер, Д. А. Соснило
Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет

Сравнительный анализ эффективности алгоритмов Кармаркара и симплекс-метода для решения задач линейного программирования

В экономике существует ряд прикладных задач, которые могут быть сведены к задачам линейного программирования, в частности в микроэкономике это – транспортная задача, задачи оптимального распределения ресурсов производства и т. д. Для их решения часто используется специальное программное обеспечение, реализующее наиболее успешные алгоритмы. Однако программные пакеты содержат разные методы, отличающиеся эффективностью решения различных классов задач.
Исследованы возможности математических пакетов MatLab, SciLab и MS Excel для решения прикладных задач линейного программирования. В разных средах реализованы алгоритмы по различным методам – двойственному симплекс-методу, методу Кармаркара и симплекс-методу. Был проведен сравнительный анализ эффективности реализуемых алгоритмов для ряда различных задач и сделаны рекомендации по применению программного обеспечения. Новым является сравнение эффективности рассмотренных методов для решения различных прикладных задач.

Методы оптимизации, симплекс, Кармаркар, экономические задачи

Целью данной работы было изучение прикладных возможностей решения задач линейного программирования в популярных математических пакетах и сравнение их эффективности:

– математический пакет MatLab для реализации двойственного симплекс-метода функцией linprog;

– математический пакет SciLab для реализации алгоритма Кармаркара функцией karmarkar;

– офисное приложение MS Excel для реализации симплекс-метода при помощи надстройки «Поиск решения».

В качестве целей исследования были поставлены задачи:

– подбор различных задач из часто используемых на практике;

– решение задач с использованием программного обеспечения;

– сравнение результатов.

Постановка задачи линейного программирования. Найти максимум функции

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i=1,...,m; m<n; \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0,\ j=1,...,n. \qquad (3)$$

Задача (1)–(3) называется канонической, а искомое решение $x^*=(x_1^*,...,x_n^*)^{\mathrm{T}}$ – оптимальным [1, с. 317].

Симплекс-метод. Множество допустимых решений задачи линейного программирования представляет собой выпуклый многоугольник в многомерном пространстве. Оптимальное решение находится в одной из угловых точек. Симплекс-метод позволяет избежать случайного перебора всех вершин в ходе поиска решения. Метод основан на принципе: вычисления начинаются с базисного, а затем проводится поиск решений, приближающих оптимальное значение целевой функции, путем изменения определенных базисных переменных [2, с. 195].

Алгоритм симплекс-метода:

• Шаг 1. Привести задачу линейного программирования к канонической форме.

• Шаг 2. Если в полученной системе m уравнений, то $k = m$ переменных принять за основные, выразить основные переменные через неосновные и найти соответствующее базисное решение. Если найденное базисное решение окажется допустимым, перейти к нему.

• Шаг 3. Выразить функцию цели через неосновные переменные допустимого базисного решения.

• Шаг 4. Из неосновных переменных, входящих в линейную форму с отрицательными (положительными) коэффициентами, выбирают ту, которой соответствует наибольший (по модулю) коэффициент, и переводят ее в основные. Переход к шагу 2.

Для удобства вычислений часто используют симплекс-таблицы.

Алгоритм Кармаркара (основная идея). Алгоритм Кармаркара принадлежит классу методов внутренней точки – текущее допустимое решение не передвигается по границе области допустимых решений, как в симплекс-методе, а движется по внутренним ее точкам, улучшая с каждой итерацией аппроксимацию оптимального решения определенной дробью и приводя к оптимальному решению с рациональными данными [3, с. 3367].

Принципиальная идея Кармаркара заключается в том, что вычисления начинаются с внутренней точки, соответствующей центру симплекса, далее в направлении проекции градиента определяется новая точка решения, которая должна быть строго внутренней, т. е. все координаты должны быть положительными [4, с. 295]. Это является достаточным условием сходимости алгоритма [5, с. 2].

Алгоритм Кармаркара:

1. Масштабирование.
2. Направление.
3. Поиск на прямой.
4. Результат.
5. Переход к новой точке.

Алгоритм определяет очередное допустимое направление в сторону оптимального решения и отступает на множитель $0 < \gamma \le 1$.

В отличие от симплекс-метода, где на практике поиск допустимого базиса нередко составляет большую часть вычислений и качество допустимого базиса существенно влияет на общий их объем, метод Кармаркара демонстрирует замечательную устойчивость по отношению к выбору начальной допустимой точки и находит ее довольно быстро.

Двойственный симплекс-метод. Для улучшения симплекс-метода можно использовать переход к двойственной задаче. В ходе решения задачи данным методом на каждом шаге происходит переход к двойственной задаче, что позволяет справляться с задачами, заданными не в канонической форме.

В ходе исследования осуществлялся поиск оптимальных значений переменных, значения целевой функции и количества итераций для получения решения.

Решение прикладных задач. ***Задача 1.*** Для изготовления продукции двух видов P_1 и P_2 используют четыре вида ресурсов S_1, S_2, S_3, S_4. Запасы ресурсов и количества единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Вид ресурса	Запас ресурса	Количество единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		P_1	P_2
S_1	18	1	3
S_2	16	2	1
S_3	5	–	1
S_4	21	3	–

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

Решение. Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим x_1 и x_2 количества единиц продукции P_1 и P_2 соответственно, запланированных к производству. Для их изготовления потребуется $x_1 + 3x_2$ единиц ресурса S_1; $2x_1 + x_2$ единиц ресурса S_2; x_2 и x_3 единиц ресурсов S_3 и S_4 соответственно. По условию задачи количество потребляемых ресурсов не должно превышать их запасы. Составим систему неравенств, описывающую данную модель:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18; \\ 2x_1 + x_2 \le 16; \\ x_2 \le 5; \\ 3x_1 \le 21. \end{cases}$$

По смыслу задачи переменные

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 .$$

Суммарная прибыль F составит $2x_1$ рублей от реализации продукции P_1 и $3x_2$ рублей от реализации продукции P_2:

$$F = 2x_1 + 3x_2 .$$

Значения x_1 и x_2 нужно подобрать так, чтобы функция при выполнении всех своих условий (ограничений) была максимальной.

Прибыль, получаемая от единицы продукции P_1 и P_2, составит 2 и 3 р. соответственно.

Результат работы *симплекс-метода в приложении MS Excel*:

x =
6.0000
4.0000
y =
24
iters = 3

Количество итераций: 3 · 4 · 2 = 24.

Уточним: приведенное значение переменной iter соответствует количеству симплекс-таблиц, полученных в ходе решения задачи. Действительное количество итераций приблизительно вычисляется как

$$\text{iter}\ n\ k,$$

где iter – количество симплекс-таблиц; *n* – количество переменных; *k* – количество ограничений. Эта формула следует из реализации алгоритма симплекс-метода. Далее количество итераций будет приведено в преобразованном в соответствии с ней виде.

Результат работы *двойственного симплекс-метода в математическом пакете MatLab*:

x =
6.0000
4.0000

y =
24
iters = 3

Также хотелось бы отметить, что переменная iters, как и в офисном приложении MS Excel, показывает количество таблиц, а не истинное количество итераций. Настоящее количество действий примерно равно iter *n k*. Следовательно, количество итераций для двойственного симплекс-метода будет примерно равно 3 · 4 · 2 = 24.

Решение *при помощи алгоритма Кармаркара в математическом пакете SciLab*:

x =
5.9999373
3.9999861
y =
23.999833
iter =
67

В данной задаче решения в приложениях MatLab и MS Excel показали лучшую скорость.

Задача 2. Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины) S_1, S_2, S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг корма каждого вида и необходимый минимум питательных веществ представлены в табл. 2.

Таблица 2

Питательное вещество (витамин)	Необходимый минимум питательных веществ	Число единиц питательных веществ в 1 кг корма	
		I	II
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6

Стоимости 1 кг кормов I и II соответственно равны 4 и 6 р. Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание каждого вида питательных веществ было бы не менее установленного предела.

Решение. Составим экономико-математическую модель задачи. Аналогично предыдущей задаче составим систему неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 9; \\ x_1 + 2x_2 \ge 8; \\ x_1 + 6x_2 \ge 12. \end{cases}$$

Общая стоимость рациона составляет $F = 4x_1 + 6x_2$.

Результат *двойственного симплекс-метода*:

x =
2.0000
3.0000
y =
26.
iters = 2

Количество итераций: 12.

Результат *алгоритма Кармакара*:

x =
2.0001197
2.9999632
y =
26.000258
iter = 67

Результат *симплекс-метода*:

x =
2.0000
3.0000

y =
26
iters = 3

Количество итераций: 18.

В данной задаче программа в приложении MatLab показала наилучший результат, найдя решение за лучшее время.

На приведенных примерах было показано сравнение работы функций решения задач линейного программирования в математических пакетах. Далее для простоты проведения сравнительного анализа будет указана лишь система неравенств задачи, без условия.

Сравнение для произвольной функции. Сначала сравним работу алгоритмов для простых функций.

Простой функцией будем считать задачу с количеством переменных, не превышающим 10, и с количеством ограничений, не превышающим количество переменных, деленное на 2.

Пример 1.

$$F = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 0x_4 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 12; \\ 7x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 12; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Результат *симплекс-метода*:

$x =$

1.2

0

0

9.6

$y =$

3.6

iter =

3

Количество итераций: 24.

Результат *алгоритма Кармаркара*:

$x =$

1.2000016

0.000002

0.0000021

9.5999829

$y =$

3.600025

Количество итераций: 74.

Результат *двойственного симплекс метода*:

$x =$

1.2000

0

0

9.6000

$y =$

3.6000

iters = 2

Количество итераций: 16.

Симплекс-метод опять показал лучший результат, чем метод Кармаркара, однако проиграл двойственному симплекс-методу в количестве выполненных программой действий

Пример 2.

$$F = -3x_1 + x_2 + 4x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ -5x_1 + x_2 + x_3 = 2; \\ -8x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Результат *симплекс-метода*:

$x =$

0

1

1

1

0

$y =$

5

Iter = 4

Количество итераций: 60.

Результат *алгоритма Кармаркара*:

$x =$

0.0000018

0.9999969

1.0000123

0.9999847

0.0000067

$y =$

5.0000404

iter =

69

Результат *двойственного симплекс-метода*:

$x =$

0

1.0000

1.0000

1.0000

0

$y =$

5

iters = 4

Количество итераций: 60.

В данном примере была взята задача с большим количеством факторов и оба симплекс метода справились с задачей лучше, чем алгоритм Кармаркара, однако видно, что у этих двух методов нет значительного преимущества в выполненных действиях.

Пример 3.

$$F = -x_4 - x_5 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_5 + x_6 = 2; \\ x_2 + x_4 + 2x_5 - x_6 = 1; \\ x_3 + x_4 - x_5 + 3x_6 = 1; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

[6, с. 42].

Решение *двойственным симплекс-методом*:

x =

0.6000
0
0
0
0.8000
0.6000

y =

–4

iters = 3

Количество итераций: 54.

Результат *симплекс-метода*:

x =

0.6000
0
0
0
0.8000
0.6000

y =

–4

iters = 5

Количество итераций: 90.

Результат *алгоритма Кармаркара*:

x =

1.9999599
0.0000033
0.0000081
0.9999708
0.0000197
0.0000136

y =

–3.9999706

Количество итераций: 69.

Увеличив количество переменных, можно отметить, что значительно увеличилось количество итераций симплекс-метода и что он показал наихудший результат. Количество итераций в методе Кармаркара колеблется в пределах 70.

В результате решения простых задач можно заключить, что симплекс-метод имеет незначительно лучшую сходимость, однако наблюдается зависимость скорости его работы от размера задачи; результат работы алгоритма Кармаркара для простых задач такой зависимости не показал.

Проверим методы для решения задач с числом переменных 30.

Пример 4.

Поставленную задачу *не удалось решить с помощью симплекс-метода*.

Результат *алгоритма Кармаркара*:

x =

0.4386057
0.0000001
0.0000002
0.0000002
0.0000002
0.1225519
0.0000003
0.0000015
0.0000003
0.0000001
0.0000001
0.0000004
0.0000002
0.3545762
0.0000002
0.111685
0.0000001
0.0000003
0.0000001
0.0000003
0.0000002
0.351005
0.0000001
0.0000003
0.0000001
0.0000002
0.0000019
0.0000001
9.404D-08
0.0000001

y =

53.004209

Количество итераций: 73.

Результат *двойственного симплекс-метода*:

x =

0.4386
0
0
0
0
0.1226

0
0
0
0
0
0
0
0.3546
0
0.1117
0
0
0
0
0
0.3510
0
0
0
0
0
0
0
0
y =
53.0037
iters = 9
Количество итераций: 1350.

Таким образом, алгоритм Кармаркара показывает неухудшающуюся сходимость для задач с большим количеством переменных, симплекс-метод не пригоден для их решения. Соответственно, для решения данного типа задач рекомендуется использовать алгоритм Кармаркара в программе SciLab.

Сравнение на специальном классе вытянутых симплексов.

Пример 5. В качестве вытянутой фигуры ограничений для функции двух переменных возьмем ромб вида

$$-2x + y \to \min;$$

$$\begin{cases} 49x - 51y \le 0; \\ -51x + 49y > 0; \\ -51x + 49y > -200; \\ -49x + 51y < 200. \end{cases}$$

Результат *симплекс-метода*:
x =
49
51
200
0
200
0
y =
–47
Количество итераций: 30.

Результат *алгоритма Кармаркара*:
x =
48.999697
50.999696
199.99936
0.0005706
200.00057
0.0006435
y =
–46.999698
Количество итераций: 73.

Поставленную задачу *не удалось решить с помощью двойственного симплекс-метода*.

Это показывает, что для данного класса задач симплекс-метод имеет лучшую сходимость.

Пример 6.

$$F = 600x_1 - 75x_6 + 500x_7 - 2x_8 \to \min;$$

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 + \frac{1}{4}x_6 - 2x_7 - \frac{1}{25}x_8 = 0; \\ 3x_1 + x_3 + \frac{1}{2}x_6 - 3x_7 - \frac{1}{50}x_8 = 0; \\ -1 + x_4 + x_8 = 0; \\ -\frac{225}{2}x_1 + x_5 - 25x_6 + 200x_7 + x_8 = 0; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0, x_5 \ge 0, x_6 \ge 0, x_7 \ge 0, x_8 \ge 0. \end{cases}$$

Решение *двойственным симплекс-методом*:
x =
0
0.0300
0
0
0
0.0400
0
1.0000
y =
–5
iters = 4
Количество итераций: 64

Симплекс-метод не смог найти решение, как и *алгоритм Кармаркара*.

Пример 7.

$$F = x_1 - x_3 \to \min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 5; \\ x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0, \ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

[6, с. 38].

Таблица 3

Задача исследования	Метод, количество итераций		
	Симплекс	**Двойственный симплекс**	**Кармаркара**
Прикладные задачи			
Задача 1	24	24	67
Задача 2	18	12	67
Простые функции			
Пример 1	24	16	74
Пример 2	60	60	69
Задачи с большим количеством переменных			
Пример 3	90	54	69
Пример 4	–	1350	73
Специальный класс вытянутых симплексов			
Пример 5	30	–	73
Пример зацикливания симплекс-метода			
Пример 6	–	64	–
Пример 7	–	–	54

Решение *алгоритмом Кармаркара:*

$x =$

2.9156263
1.4367197
0.3945329

$y =$

2.5210934

Количество итераций: 54.

Симплекс-метод в данном примере зациклился.

В ходе проведенных исследований были решены прикладные задачи линейного программирования разной степени сложности тремя методами с использованием трех программных пакетов. Были представлены результаты работы алгоритмов и сделаны выводы по использованию определенных программ для решения данных классов задач. Для решения всех рассмотренных классов задач оптимальным программным обеспечением является математический пакет SciLab; кроме того, он находится в свободном доступе и реализованный в нем алгоритм Кармаркара наиболее эффективен по надежности решения задач и количеству итераций. Однако стоит отметить, что офисное приложение MS Excel обладает наиболее удобным интерфейсом для решения задач оптимизации. Для наглядности результатов представлена табл. 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пантелеев А. О., Летова Т. А. Методы оптимизации в примерах и задачах. 2-е изд., испр. М., 2005.

2. Кочегурова, Е. А. Теория и методы оптимизации: учеб. пособие для академ. бакалавриата. М.: Юрайт, 2017. (Сер.: Университеты России).

3. Adejo B. O., Adaji H. S. On some polynomial-time algorithms for solving linear, programming problems. URL: http://www.pelagiaresearchlibrary.com/ (дата обращения 24.01.2020).

4. Venkaiah V. Ch. An efficient algorithm for linear programming. URL: https://link.springer.com/article/10.1007/BF02837852 (дата обращения 05.02.2020).

5. Goran L. Introducing interior-point methods for introductory operations research, courses and/or linear programming courses // The Open Operational Research J. 2009. № 3. P. 1–12.

6. Калихман И. Л. Сборник задач по математическому программированию. 2-е изд., доп. и перераб. М.: Высш. шк., 1975.

D. E. Geyer, D. A. Sosnilo
Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering

COMPARATIVE ANALYSIS OF EFFICIENCY OF KARMARKAR ALGORITHMS AND SIMPLEX METHOD FOR SOLVING LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

There are a number of applied problems in economics that can be reduced to linear programming problems. In particular, the problems of microeconomics, such as the transportation problem, problems of the optimal distribution of production resources, etc. To solve such problems, special software is often used that implements the most successful algorithms. However, software packages contain different methods that are effective in solving various classes of problems.

The possibilities of mathematical packages MatLab, SciLab and MS Excel for solving applied linear programming problems are investigated. In different environments, algorithms are implemented using different methods – the dual simplex method, the Karmarkar method, and the simplex method. A comparative analysis of the effectiveness of implemented algorithms for a number of different tasks was carried out and recommendations for using the software were made. New is the comparison of the effectiveness of the methods considered for solving various applied problems.

Optimization methods, simplex, Karmarkar, economic problems