

УДК 519.71:62-50

Нгуен Дык Фу, В. В. Путов, В. Н. Шелудько, Чу Чонг Шы  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Адаптивные электромеханические системы управления многозвенными манипуляционными роботами с упругими свойствами

*Рассматриваются адаптивные электромеханические системы управления многозвенными манипуляционными роботами с упругими свойствами как нелинейными взаимосвязанными неопределенными объектами. Синтез адаптивных электромеханических систем управления многозвенными манипуляционными роботами осуществляется на базе основного метода приближения функций. В рамках этого метода и предлагаемой в статье его упрощенной модификации, специализированной для класса лагранжевых объектов, разрабатываются методики пошагового синтеза адаптивных систем управления многозвенными манипуляционными роботами с упругими свойствами, математические модели которых представляются трех- или двухкаскадными структурами в зависимости от учета электромагнитной динамики исполнительных электроприводов в синтезе или пренебрежения ею как сингулярным возмущением. На базе разработанных методик синтезируются двух- и трехкаскадные адаптивные электромеханические системы управления четырехзвенным манипуляционным роботом с упругими свойствами и проводится сравнительный анализ их эффективности в достижении свойств динамической точности и быстродействия. Приводятся результаты компьютерных исследований эффективности подавления упругих свойств в условиях влияния электромагнитной динамики на качественные показатели переходных процессов и траекторного движения электромагнитной динамики электроприводов либо трактуемой как сингулярное возмущение, либо учитывая ее в синтезе с основным и упрощенным методами приближения функций. Показываются преимущества адаптивных систем, построенных на базе упрощенного метода приближения функций, позволяющих обеспечить показатели точности и быстродействия движения робота, сравнимые с показателями адаптивных систем, синтезированных основным методом приближения функций, но при меньших затратах вычислительных ресурсов. Численные исследования проводились в среде Matlab-Simulink на базе расчетной модели четырехзвенного манипуляционного робота компании igus.*

**Адаптивная электромеханическая система, четырехзвенный манипуляционный робот, исполнительный электропривод, основной метод приближения функций, упрощенная модификация метода приближения функций, электромагнитная динамика, сингулярное возмущение, каскадная структура, пошаговый синтез**

**Введение.** В статье рассматриваются актуальные вопросы построения адаптивных электромеханических систем управления динамическими многозвенными манипуляционными роботами с упругими свойствами в условиях неопределенности.

Первой проблемой, разрешаемой в статье, является выбор и обоснование подходящего метода синтеза. В известных аналитических (точных) методах адаптивного управления многозвенными манипуляционными роботами предполагается, что математическая модель робота линейно параметризуется относительно вектора неизвестных постоянных параметров [1], [2]. Однако такой подход является довольно сложным и громоздким в расчетах из-за необходимости точного аналити-

ческого описания математической модели объекта. Это мотивирует привлечение приближенных методов адаптивного управления, позволяющих избежать необходимости точного описания математической модели. Одним из таких приближенных подходов является так называемый метод приближения функций [3], [4]. Данный метод является более простым в синтезе, чем аналитические методы, однако синтезированные в его рамках алгоритмы управления требуют большего вычислительного ресурса для реализации в силу их высокой размерности. В статье предлагается новая упрощенная модификация метода приближения функций, специализированная для класса объектов, описываемых уравнениями Лагранжа, и

позволяющая значительно снизить размерность задачи и объем вычислений.

Другой проблемой, разрешаемой в статье, является высокая размерность задачи управления многозвенным манипуляционным роботом при объединении динамики жесткого манипулятора с динамикой, учитывающей упругие свойства его звеньев и электромагнитные процессы в исполнительных электроприводах. В начале 1990-х гг. появился подход, названный методом пошагового синтеза [5], [6], позволяющий упрощать задачи построения нелинейного и адаптивного управления сложными динамическими объектами, допускающими их представление в виде каскадной структуры, избавляя тем самым от необходимости громоздкого синтеза управления объединенной динамикой сложных объектов [7], [8]. В статье метод пошагового синтеза применяется в построении адаптивных систем управления многозвенным роботом, основываясь на представлении его математической модели в виде каскадной структуры, описывающей динамику жесткого манипулятора робота и динамику каскадно присоединенных к нему посредством упругих связей исполнительных электроприводов степеней подвижности.

Третья проблема, исследуемая в статье, связана с построением математических моделей объектов, характеризующихся разнотемповой динамикой, когда возникают задачи исследования необходимости учета или возможности пренебрежения электромагнитной динамикой исполнительных электроприводов, характеризующейся малыми параметрами. Постановка такой задачи представляется актуальной, так как на практике проектировщики многозвенных механических объектов зачастую пренебрегают электромагнитной динамикой исполнительных электроприводов, рассматривая ее как «паразитную» без достаточных обоснований и детальных исследований [9], [10]. В связи с изложенным, в статье рассмотрены вопросы разработки адаптивных электромеханических систем управления упругими многозвенными механическими объектами с исполнительными электроприводами в степенях подвижности, синтезированные как с учетом (в трехкаскадных структурах), так и без учета (в двухкаскадных структурах) электромагнитной динамики исполнительных электроприводов.

Разработанная методика двух- и трехкаскадного синтеза адаптивных электромеханических систем управления упругими многозвенными

объектами, построенных без учета и с учетом электромагнитной динамики исполнительных электроприводов, иллюстрируется детальным исследованием разработанных в статье методов синтеза на примере построения адаптивных электромеханических систем управления упругим четырехзвенным манипуляционным роботом компании igus модели robolink® RL-DCi (RL-DCi-4S-M [11] (рис. 1).

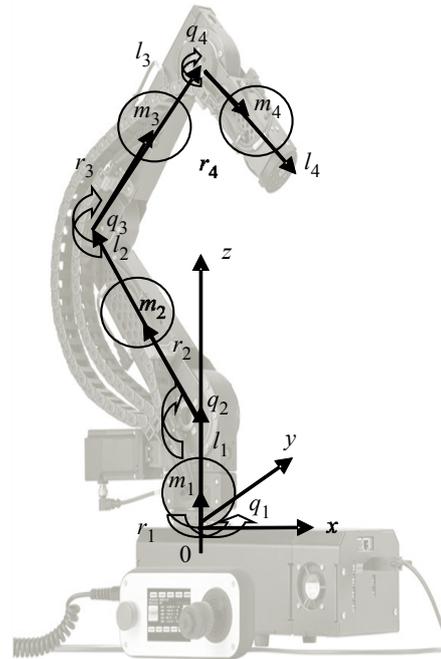


Рис. 1

**1. Двух- и трехкаскадная математические модели упругого многозвенного механического объекта и постановка задач управления.** Динамика упругого многозвенного механического объекта, объединенная с электромагнитной динамикой исполнительных электроприводов, описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = K_c(\mathbf{a} - \mathbf{q}); \\ J\ddot{\mathbf{a}} + K_b\dot{\mathbf{a}} = K_m\mathbf{I}_я - K_c(\mathbf{a} - \mathbf{q}); \\ L_я\dot{\mathbf{I}}_я + R_я\mathbf{I}_я = \mathbf{u}_я - \mathbf{e}_я; \\ \mathbf{M}_d = K_m\mathbf{I}_я; \\ \mathbf{e}_я = K_e\dot{\mathbf{q}}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mathbf{q} = \{q_i\}$ ;  $\mathbf{a} = \{a_i\}$  – векторы обобщенных координат (углов вращения сочленений) объекта и углов вращения роторов электроприводов соответственно;  $D(\mathbf{q}) = \{D_{ij}\}$  – функциональная матрица инерции объекта, симметричная и положи-

тельно определенная;  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \{C_{ij}\}$  – функциональная матрица кориолисовых и центробежных сил, зависящих от скоростей;  $\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \{G_i\}$  – функциональный вектор гравитационных сил;  $K_c = \text{diag}\{K_{c_i}\}$ ,  $J = \text{diag}\{J_i\}$ ,  $K_b = \text{diag}\{K_{b_i}\}$  – числовые матрицы, определяемые коэффициентом упругости трансмиссий, моментом инерции и вязкого трения электроприводов соответственно;  $\mathbf{u}_я = \{u_{яi}\}$  – вектор напряжений усилителей мощности электроприводов;  $\mathbf{I}_я = \{I_{яi}\}$  – вектор токов обмоток;  $L_я = \text{diag}\{L_{яi}\}$ ,  $R_я = \text{diag}\{R_{яi}\}$  – числовые матрицы индуктивностей и активных сопротивлений цепей тока электроприводов соответственно;  $K_m = \text{diag}\{K_{m_i}\}$ ,  $K_e = \text{diag}\{K_{e_i}\}$  – числовые матрицы постоянных коэффициентов, определяемых конструктивными данными электрических машин;  $\mathbf{M}_d = \{M_{d_i}\}$  – вектор электромагнитных моментов электроприводов;  $\mathbf{e}_я = \{e_{яi}\}$  – вектор ЭДС якорных обмоток двигателей;  $i, j = \overline{1, n}$ ;  $n$  – число звеньев (степеней подвижности) механического объекта.

Преобразуем математическую модель (1) объединенной динамики многозвенного упругого механического объекта в двух- и трехкаскадную структуру, построенные, соответственно, без учета ( $L_я = 0$ ) и с учетом ( $L_я > 0$ ) электромагнитной динамики исполнительных электроприводов.

В первом случае ( $L_я = 0$ ) уравнения двухкаскадной структуры имеют следующий вид:

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}; \quad (2)$$

$$J_t \ddot{\boldsymbol{\tau}} + B_t \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} = R^{-1} \mathbf{u} - R^{-1} K \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}_q(\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}), \quad (3)$$

где введены обозначения:  $\boldsymbol{\tau} = K_c(\mathbf{a} - \mathbf{q})$ ;  $J_t = JK_c^{-1}$ ;  $B_t = K_b K_c^{-1}$ ;  $K = K_e$ ;  $\mathbf{f}_q(\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}) = J\dot{\mathbf{q}} + K_b \dot{\mathbf{q}}$ .

Во втором случае ( $L_я > 0$ ) уравнения трехкаскадной структуры будут иметь вид

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}; \quad (4)$$

$$J_t \ddot{\boldsymbol{\tau}} + B_t \dot{\boldsymbol{\tau}} + \boldsymbol{\tau} = \mathbf{I} - \mathbf{f}_q(\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}); \quad (5)$$

$$L\dot{\mathbf{I}} + R\mathbf{I} + K\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}, \quad (6)$$

где  $L = L_я K_m^{-1}$ ;  $\mathbf{I} = K_m \mathbf{I}_я$ ;  $R = R_я K_m^{-1}$ .

Характеризуя класс адаптивности неопределенных объектов управления, будем полагать, что все числовые параметры матриц  $D$ ,  $C$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $L$ ,  $R$  и  $K$  постоянны, неизвестны и определены в некоторых известных интервалах, а компоненты векторов  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$ ,  $\mathbf{I}$  и  $\mathbf{u}$  доступны измерению.

Поставим задачи построения законов управления и алгоритмов адаптации для двух- (2), (3) и трехкаскадного (4)–(6) объектов, удовлетворяющих в интервальном классе адаптивности следующему целевому неравенству (цели управления):

$$|\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_d(t)| \leq \boldsymbol{\varepsilon}_m, \quad \forall t \geq T, \quad (7)$$

где  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  – числовая ошибка, характеризующая точность управления;  $\mathbf{q}_d(t)$  – программный вектор углов вращения звеньев;  $T$  – заданное время процесса управления.

## 2. Основы метода приближения функций.

Метод приближения функций [3], [4] основан на том, что любая ограниченная скалярная функция  $f(t)$  может быть аппроксимирована с произвольно заданной точностью конечными линейными комбинациями базисных функций  $\{z_i(t)\}$ ,  $i = \overline{1, \beta}$ , в виде

$$f(t) = \sum_1^{\beta} w_i z_i(t) + \varepsilon_f = \mathbf{w}^T \mathbf{z}(t) + \varepsilon_f, \quad (8)$$

где  $\mathbf{z}(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_{\beta}(t)]^T$  – вектор базисных функций;  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_{\beta}]$  – вектор весовых коэффициентов разложения (8),  $\beta$  – число членов разложения,  $\varepsilon_f$  – ошибка аппроксимации скалярной функции  $f(t)$ . При этом очевидно, что разложение любой функции времени  $f(t)$  по известным базисным функциям метода приближения функций однозначно определяется вектором неизвестных весовых коэффициентов этого разложения.

Пусть все элементы вектора матриц и векторов математической модели объекта (1) – ограниченные функции и разложимы по базисным функциям метода приближения функций.

Предположим, что все элементы некоего  $m$ -мерного функционального вектора  $\mathbf{A}$  аппроксимируются с использованием одного и того же числа разложений  $\beta$  и одного и того же вида базисных функций. Тогда  $m$ -мерный вектор-столбец  $\mathbf{A}$  можно представить следующей матричной формулой разложения:

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{A}_i\} = W_{\mathbf{A}}^T \mathbf{Z}_{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{A}};$$

$$W_A^T = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{w}_2^T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{w}_m^T \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

$$Z_A = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^T & \mathbf{z}_2^T & \dots & \mathbf{z}_m^T \end{bmatrix}^T,$$

где элементы этих матриц –  $\beta$ -мерные векторы строки – неизвестных весовых коэффициентов  $\mathbf{w}_i^T$  или известных базисных функций  $\mathbf{z}_i$ . Очевидно, что матрицы в (9) имеют следующие размеры  $W_A^T - m \times m\beta$ -мерная матрица неизвестных весовых коэффициентов;  $Z_A - m\beta$ -мерный вектор-столбец известных базовых функций;  $\epsilon_A - m$ -мерный вектор-столбец ошибок аппроксимации вектора  $A$ .

Аналогичным образом может быть описана процедура аппроксимации для  $m \times k$ -функциональной матрицы  $B$ . Пусть элементы матрицы  $B$  аппроксимируются с использованием одного и того же числа разложений ( $\beta$ ) и одного и того же вида базисных функций, тогда матрицу  $B$  можно представить в виде произведения матриц неизвестных весовых коэффициентов и известных базовых функций

$$B = \{B_{ij}\} = W_B^T Z_B + \epsilon_B, \quad (10)$$

где матрицы  $W_B^T$  и  $Z_B$  имеют следующий вид:

$$W_B^T = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{11}^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & | & \mathbf{w}_{12}^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & | \dots & \mathbf{w}_{1k}^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{w}_{21}^T & \dots & \mathbf{0} & | & \mathbf{0} & \mathbf{w}_{22}^T & \dots & \mathbf{0} & | \dots & \mathbf{0} & \mathbf{w}_{2k}^T & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & | & \dots & \dots & \ddots & \vdots & | \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{w}_{m1}^T & | & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{w}_{m2}^T & | \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{w}_{mk}^T \end{bmatrix};$$

$$Z_B = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{11}^T & \mathbf{z}_{21}^T & \dots & \mathbf{z}_{m1}^T & | & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & | \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & | & \mathbf{z}_{12}^T & \mathbf{z}_{22}^T & \dots & \mathbf{z}_{m2}^T & | \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & | & \dots & \dots & \ddots & \vdots & | \dots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & | & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & | \dots & \mathbf{z}_{1k}^T & \mathbf{z}_{2k}^T & \dots & \mathbf{z}_{mk}^T \end{bmatrix}, \quad (11)$$

элементы этих матриц –  $\beta$ -мерные векторы неизвестных весовых коэффициентов или известных базисных функций. Очевидно, что матрицы в (11) имеют следующие размеры:  $W_B^T - m \times mk\beta$ -мерная матрица неизвестных весовых параметров;  $Z_B - mk\beta \times k$ -мерная матрица известных базовых функций;  $\epsilon_B - m \times k$ -мерная матрица ошибок аппроксимации матрицы  $B$ .

Замечание 1. Из формул (8), (11) видно, что при использовании метода приближения функций размерность задачи, по сравнению с размерностью задачи с применением, например, аналитического метода [1], [2], увеличивается в  $\beta$  раз. Как показывает практика, применение метода приближения функций к синтезу управления многостепенными механическими объектами требует по условию удовлетворительно малой ошибки аппроксимации (от 0.2 до 0.05) сохранять в разложениях от 3 до 5 членов.

### 3. Построение адаптивных электромеханических систем управления двух- и трехкаскадными структурами на базе методов приближения функций и пошагового синтеза.

#### 3.1. Построение адаптивного управления для двухкаскадной структуры на основе упрощенного метода приближения функций и метода пошагового синтеза.

Шаг 1. Найти закон управления  $\tau$  в (2).

Уравнение (2) можно преобразовать следующим образом:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \tau_d + \mathbf{e}_\tau + L_1;$$

$$L_1 = [E_n - D(\mathbf{q})]\ddot{\mathbf{q}} - C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - G(\mathbf{q}); \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_\tau = \tau - \tau_d,$$

где  $E_n - n$ -мерная единичная матрица;  $\tau_d -$  виртуальный закон управления для системы (12).

Будем искать виртуальный закон управления  $\tau_d$  в виде

$$\tau_d = -K_p \mathbf{q} - K_d \dot{\mathbf{q}} + K_p \mathbf{v}(t), \quad (13)$$

где  $\mathbf{v}(t) -$  некий виртуальный закон управления,  $K_p$  и  $K_d -$  положительно определенные диагональные матрицы пропорциональной и дифференциальной отрицательных обратных связей.

Подставляя в уравнение (12) выражение (13), получим

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0 \mathbf{x}(t) + B_0 [\mathbf{e}_\tau + K_p \mathbf{v}(t) + L_1], \quad (14)$$

где

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T & \dot{\mathbf{q}}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} 0_n & E_n \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0_n \\ E_n \end{bmatrix}.$$

Шаг 2. Найти закон управления  $\mathbf{v}(t)$  в (14).

В качестве эталонной модели примем уравнение вида

$$\dot{\mathbf{x}}_d(t) = \mathbf{A}_0 \mathbf{x}_d(t) + \mathbf{B}_0 K_p \mathbf{v}_d(t), \quad (15)$$

где  $\mathbf{v}_d(t)$  – программное управление;  $\mathbf{A}_0$  – гурвица и  $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0)$  – управляемая пара.

Выберем  $\mathbf{v}_d(t)$  в виде

$$\mathbf{v}_d(t) = K_p^{-1} \left( \ddot{\mathbf{q}}_d + K_d \dot{\mathbf{q}}_d + K_p^{-1} \mathbf{q}_d \right). \quad (16)$$

Построим уравнение ошибки  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t)$  по уравнениям (14)–(16) в виде

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_0 \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_0 \left[ \mathbf{e}_\tau + K_p [\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_d(t)] + \mathbf{L}_1 \right]. \quad (17)$$

Так как все элементы функциональных матриц  $D$ ,  $C$  и  $\mathbf{G}$  ограничены, то функциональный вектор  $\mathbf{L}_1$  вида (12), составленный из суммы трех сложных функциональных векторов, допускает аппроксимацию по методу приближения функций в виде

$$\mathbf{L}_1 = W_{\mathbf{L}_1}^T \mathbf{Z}_{\mathbf{L}_1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L}_1}, \quad (18)$$

где  $W_{\mathbf{L}_1}$  –  $n\beta_{\mathbf{L}_1} \times n$ -мерная матрица неизвестных весовых коэффициентов;  $\mathbf{Z}_{\mathbf{L}_1}$  –  $n\beta_{\mathbf{L}_1}$ -мерный вектор известных базовых функций;  $\beta_{\mathbf{L}_1}$  – число базисных функций в разложении (18);  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L}_1}$  – ошибка аппроксимации функционального вектора  $\mathbf{L}_1$ .

Замечание 2. Предложение аппроксимировать сумму функциональных векторов, составляющих сложную векторную функцию  $\mathbf{L}_1$  вида (12) не почленно, а рассматривая его в задаче аппроксимации как единый функциональный вектор (18), составляет суть упрощения метода приближения функций, допустимого в задачах синтеза нелинейного и адаптивного управления лагранжевыми объектами.

Виртуальный закон управления  $\mathbf{v}(t)$  в уравнении ошибки (17) представим в виде

$$\mathbf{v}(t) = -K_p^{-1} \hat{W}_{\mathbf{L}_1}^T \mathbf{Z}_{\mathbf{L}_1} + \mathbf{v}_d(t), \quad (19)$$

где  $\hat{W}_{\mathbf{L}_1}$  – матрица текущей оценки матрицы неизвестных весовых коэффициентов  $W_{\mathbf{L}_1}$ , для которой необходимо построить алгоритм адаптации (настройки).

Тогда уравнение ошибки (17) примет следующий вид:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_0 \tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}_0 \left( \mathbf{e}_\tau + \tilde{W}_{\mathbf{L}_1}^T \mathbf{Z}_{\mathbf{L}_1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{L}_1} \right), \quad (20)$$

где  $\tilde{W}_{\mathbf{L}_1} = W_{\mathbf{L}_1} - \hat{W}_{\mathbf{L}_1}$ .

Видно, что при выборе управлений в виде (16), (19), решения системы (14) будут сближаться с решениями эталонной модели (15), если обеспечить асимптотическую устойчивость тривиального решения уравнения ошибки (20).

Шаг 3. Найти закон управления  $\mathbf{u}$  в (3).

Чтобы найти закон управления  $\mathbf{u}$ , построим эталонную модель для системы (3):

$$J_r \ddot{\boldsymbol{\tau}}_r + B_r \dot{\boldsymbol{\tau}}_r + K_r \boldsymbol{\tau}_r = J_r \ddot{\boldsymbol{\tau}}_d + B_r \dot{\boldsymbol{\tau}}_d + K_r \boldsymbol{\tau}_d, \quad (21)$$

где  $\boldsymbol{\tau}_r$  – вектор состояния эталонной модели (21);  $J_r$ ,  $B_r$ ,  $K_r$  –  $n \times n$ -мерные матрицы, выбранные так, чтобы  $\boldsymbol{\tau}_r$  стремилось к  $\boldsymbol{\tau}_d$ .

Уравнения (3) и (21) можно переписать, соответственно, следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p \mathbf{x}_p + B_p \mathbf{u} - B_p [K \dot{\mathbf{q}} + R \mathbf{f}_q(\dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})]; \quad (22)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_M = A_M \mathbf{x}_M + B_M (\boldsymbol{\tau}_d + \mathbf{f}_\tau), \quad (23)$$

где

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}^T & \dot{\boldsymbol{\tau}}^T \end{bmatrix}^T; \quad \mathbf{x}_M = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_r^T & \dot{\boldsymbol{\tau}}_r^T \end{bmatrix}^T;$$

$$\mathbf{f}_\tau = K_r^{-1} (J_r \ddot{\boldsymbol{\tau}}_d + B_r \dot{\boldsymbol{\tau}}_d);$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 0_n & E_n \\ -J_t^{-1} & -J_t^{-1} B_t \end{bmatrix}; \quad A_M = \begin{bmatrix} 0_n & E_n \\ -J_r^{-1} K_r & -J_r^{-1} B_r \end{bmatrix};$$

$$B_p = \begin{bmatrix} 0_n \\ J_t^{-1} R^{-1} \end{bmatrix}; \quad B_M = \begin{bmatrix} 0_n \\ J_r^{-1} K_r \end{bmatrix}.$$

Пусть  $\boldsymbol{\tau} = C_p \mathbf{x}_p$ ;  $\boldsymbol{\tau}_r = C_M \mathbf{x}_M$  – выходной вектор системы (22) и (23), тогда  $C_p = C_M = \begin{bmatrix} E_n & 0_n \end{bmatrix}$ . Для системы (23) считаем пару  $(A_M, B_M)$  управляемой, а пару  $(A_M, C_M)$  – наблюдаемой. Тогда для адаптивной системы с эталонной моделью желаемое управление  $\mathbf{u}$  выберем в следующем виде [4], [12]:

$$\mathbf{u} = \Theta \mathbf{x}_p + \Phi \boldsymbol{\tau}_d + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{f}_q, \mathbf{f}_\tau), \quad (24)$$

где  $\Theta$  и  $\Phi$  – матрицы, удовлетворяющие условиям  $A_p + B_p\Theta = A_M$  и  $B_p\Phi = B_M$ ;  $\mathbf{h}(\mathbf{f}_q, \mathbf{f}_\tau) = \Phi\mathbf{f}_\tau + K\dot{\mathbf{q}} + R\mathbf{f}_q$ .

Подставив (24) в (22) получим

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_M\mathbf{x}_p + B_M(\boldsymbol{\tau}_d + \mathbf{f}_\tau) + B_p(\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}).$$

Проведем процедуру аппроксимации аналогично тому, как это было сделано на шаге 2:

$$\mathbf{h} = W_{\mathbf{h}}^T \mathbf{Z}_{\mathbf{h}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{h}}; \quad \hat{\mathbf{h}} = \hat{W}_{\mathbf{h}}^T \mathbf{Z}_{\mathbf{h}},$$

где  $W_{\mathbf{h}}$  –  $n\beta_{\mathbf{h}} \times n$ -мерная матрица неизвестных весовых параметров;  $\mathbf{Z}_{\mathbf{h}}$  –  $n\beta_{\mathbf{h}}$ -мерный вектор известных базовых функций;  $\beta_{\mathbf{h}}$  – число базисных функций в разложении функционального вектора  $\mathbf{h}$ ;  $\hat{\mathbf{h}}$  – вектор оценки (настройки) вектора  $\mathbf{h}$  и  $\hat{W}_{\mathbf{h}}^T$  – матрица оценки (настройки) матрицы  $W_{\mathbf{h}}^T$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{h}}$  – вектор ошибок аппроксимации вектора  $\mathbf{h}$ . Пусть  $\mathbf{e}_M = \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_M$ , тогда уравнение ошибки  $\mathbf{e}_M$  запишем, учитывая уравнения (22), (23), в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_M &= A_M\mathbf{e}_M - B_p\tilde{W}_{\mathbf{h}}^T \mathbf{Z}_{\mathbf{h}} - B_p\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{h}}; \\ \mathbf{e}_\tau &= C_M\mathbf{e}_M; \\ \tilde{W}_{\mathbf{h}} &= W_{\mathbf{h}} - \hat{W}_{\mathbf{h}}, \end{aligned} \quad (25)$$

где пара  $(A_M, B_p)$  – управляема, а для матрицы  $\hat{W}_{\mathbf{h}}$  текущей оценки (настройки) матрицы неизвестных весовых коэффициентов  $W_{\mathbf{h}}$  необходимо построить алгоритм настройки (адаптации).

Синтез алгоритмов адаптации для  $\hat{W}_{L_1}$  и  $\hat{W}_{\mathbf{h}}$  рассмотрим, привлекая следующую функцию Ляпунова:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_M, \tilde{W}_{L_1}, \tilde{W}_{\mathbf{h}}) &= \frac{1}{2} \left[ \tilde{\mathbf{x}}^T P \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{e}_M^T P_t \mathbf{e}_M \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \text{Tr}(\tilde{W}_{L_1}^T Q_{L_1} \tilde{W}_{L_1}) + \text{Tr}(\tilde{W}_{\mathbf{h}}^T Q_{\mathbf{h}} \tilde{W}_{\mathbf{h}}) \right], \end{aligned}$$

где  $P, P_t \in \mathfrak{R}^{[2n \times 2n]}$ ,  $Q_{L_1} \in \mathfrak{R}^{n\beta_{L_1} \times n\beta_{L_1}}$ ;  $Q_{\mathbf{h}} \in \mathfrak{R}^{n\beta_{\mathbf{h}} \times n\beta_{\mathbf{h}}}$  – симметричные, положительно определенные весовые матрицы, в частности, диагональные.

Матрицы  $P, P_t$  могут быть найдены как решения соответствующих уравнений Ляпунова:

$$A_0^T P + P A_0 = -Q; \quad Q = Q^T > 0; \quad (26)$$

$$A_M^T P_t + P_t A_M = -Q_1; \quad Q_1 = Q_1^T > 0, \quad (27)$$

в которых  $Q$  и  $Q_1$  – симметричные положительно определенные произвольные матрицы, в частности,  $Q_1 = C_M^T C_M$ .

Вычисляя полную производную функции Ляпунова в силу (20) и (25) и учитывая (26) и (27), получим

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_M, \tilde{W}_{L_1}, \tilde{W}_{\mathbf{h}}) &= -\tilde{\mathbf{x}}^T Q \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{e}_\tau^T \mathbf{e}_\tau + \\ &+ \tilde{\mathbf{x}}^T P B_0 \mathbf{e}_\tau + \tilde{\mathbf{x}}^T P B_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{L_1} - \mathbf{e}_M^T P_t B_p \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{h}} - \\ &- \text{Tr} \left[ \tilde{W}_{L_1}^T (Q_{L_1} \dot{\tilde{W}}_{L_1} - \mathbf{Z}_{L_1} \tilde{\mathbf{x}}^T P B_0) \right] - \\ &- \text{Tr} \left[ \tilde{W}_{\mathbf{h}}^T (\mathbf{Z}_{\mathbf{h}} \mathbf{e}_M^T P_t B_p + Q_{\mathbf{h}} \dot{\tilde{W}}_{\mathbf{h}}) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Если принять  $B_M = B_p$ , тогда  $\mathbf{e}_M^T P_t B_p = \mathbf{e}_\tau^T$  (это следует из (22), (23) и (27)), и при выборе алгоритмов адаптации в виде

$$\dot{\tilde{W}}_{L_1}^T = Q_{L_1}^{-1} (\mathbf{Z}_{L_1} \tilde{\mathbf{x}}^T P B_0 - \sigma_{L_1} \tilde{W}_{L_1}); \quad (29)$$

$$\dot{\tilde{W}}_{\mathbf{h}} = -Q_{\mathbf{h}}^{-1} (\mathbf{Z}_{\mathbf{h}} \mathbf{e}_\tau^T + \sigma_{\mathbf{h}} \tilde{W}_{\mathbf{h}}), \quad (30)$$

уничтожающем выражения в квадратных скобках в правой части уравнения (28), получим

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{X} \Lambda_1 \mathbf{X}^T + \mathbf{X} \Lambda_2 \boldsymbol{\varepsilon}_s + \sigma_{L_1} \text{Tr}(\tilde{W}_{L_1}^T \dot{\tilde{W}}_{L_1}) + \\ &+ \sigma_{\mathbf{h}} \text{Tr}(\tilde{W}_{\mathbf{h}}^T \dot{\tilde{W}}_{\mathbf{h}}) + \sigma_f \text{Tr}(\tilde{W}_f^T \dot{\tilde{W}}_f), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}^T & \mathbf{e}_\tau^T \end{bmatrix}$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}_s^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{L_1}^T & \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{h}}^T \end{bmatrix}$ ;  $\Lambda_1 =$

$$= \begin{bmatrix} Q & -\frac{1}{2} P B_0 \\ -\frac{1}{2} (P B_0)^T & E_n \end{bmatrix}; \quad \Lambda_2 = \begin{bmatrix} P B_0 & 0_{2n \times n} \\ 0_{2n \times n} & -E_n \end{bmatrix}.$$

**3.2. Построение адаптивного управления для трехкаскадной системы на основе упрощенного метода приближения функций и метода пошагового синтеза.**

*Шаги 1 и 2.* Законы управления  $\boldsymbol{\tau}_d, \mathbf{v}_d$  и  $\mathbf{v}$  имеют вид, аналогичный виду законов, выбранных в (13), (16) и (19).

*Шаг 3.* Найти закон управления  $\mathbf{I}$  в (5).

Чтобы найти закон управления  $\mathbf{I}$  в (5), построим следующую эталонную модель системы (5), аналогичную (21):

$$J_r \ddot{\boldsymbol{\tau}}_r + B_r \dot{\boldsymbol{\tau}}_r + K_r \boldsymbol{\tau}_r = J_r \ddot{\boldsymbol{\tau}}_d + B_r \dot{\boldsymbol{\tau}}_d + K_r \boldsymbol{\tau}_d, \quad (31)$$

где  $\boldsymbol{\tau}_r$  – вектор состояния эталонной модели (31);  $J_r, B_r, K_r$  –  $n \times n$ -мерные матрицы, выбранные так, чтобы  $\boldsymbol{\tau}_r$  стремилось к  $\boldsymbol{\tau}_d$  и при этом обеспечивалась асимптотическая устойчивость линейной системы (31).

Уравнения (5) и (31) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_p \mathbf{x}_p + B_p \mathbf{I} - B_p \mathbf{f}_q; \quad (32)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_M = A_M \mathbf{x}_M + B_M (\boldsymbol{\tau}_d + \mathbf{f}_\tau), \quad (33)$$

где

$$A_p = \begin{bmatrix} 0_n & E_n \\ -J_t^{-1} & -J_t^{-1} B_t \end{bmatrix}; \quad B_p = \begin{bmatrix} 0_n \\ J_t^{-1} \end{bmatrix}.$$

Аналогично выбору управления вида (24), желаемое управление  $\mathbf{I}_d$  будем выбирать в следующем виде:

$$\mathbf{I}_d = \Theta \mathbf{x}_p + \Phi \boldsymbol{\tau}_d + \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{f}_q, \mathbf{f}_\tau), \quad (34)$$

где  $\Theta$  и  $\Phi$  – матрицы, удовлетворяющие условиям, записанным для уравнения (24).

Подставив (34) в (32), получим:

$$\dot{\mathbf{x}}_p = A_M \mathbf{x}_p + B_M (\boldsymbol{\tau}_d + \mathbf{f}_\tau) + B_p (\mathbf{I} - \mathbf{I}_d) + B_p (\hat{\mathbf{h}} - \mathbf{h}).$$

Проведем процедуру аппроксимации, аналогичную той, которая была проведена на шаге 2 в п. 3.1:

$$\mathbf{h} = W_{\mathbf{h}}^T \mathbf{Z}_{\mathbf{h}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{h}}; \quad \hat{\mathbf{h}} = \hat{W}_{\mathbf{h}}^T \mathbf{Z}_{\mathbf{h}}.$$

Тогда по уравнениям (32), (33) можно записать уравнение ошибки  $\mathbf{e}_M = \mathbf{x}_p - \mathbf{x}_M$ :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_M &= A_M \mathbf{e}_M + B_p \mathbf{e}_I - B_p \tilde{W}_{\mathbf{h}}^T \mathbf{Z}_{\mathbf{h}} - B_p \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{h}}; \\ \mathbf{e}_\tau &= C_M \mathbf{e}_M; \quad \mathbf{e}_I = \mathbf{I} - \mathbf{I}_d, \end{aligned} \quad (35)$$

где пара  $(A_M, B_p)$  – управляема, а для матрицы  $\hat{W}_{\mathbf{h}}$  необходимо построить алгоритм настройки.

*Шаг 4.* Найти закон управления  $\mathbf{u}$  в (6).

Будем искать закон управления  $\mathbf{u}$  в следующем виде:

$$\mathbf{u} = \hat{L} \dot{\mathbf{I}}_d + \hat{R} \mathbf{I} + \hat{K} \dot{\mathbf{q}} - K_c \mathbf{e}_I.$$

Введем обозначение:

$$\hat{\mathbf{f}}(\dot{\mathbf{I}}_d, \mathbf{I}, \dot{\mathbf{q}}) = \hat{L} \dot{\mathbf{I}}_d + \hat{R} \mathbf{I} + \hat{K} \dot{\mathbf{q}},$$

тогда

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{f}} - K_c \mathbf{e}_I. \quad (36)$$

Проведем процедуру аппроксимации, аналогичную процедуре, проведенной на шаге 2 в п. 3.1 с учетом замечания 1:

$$\mathbf{f} = W_{\mathbf{f}}^T \mathbf{Z}_{\mathbf{f}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{f}}; \quad \hat{\mathbf{f}} = \hat{W}_{\mathbf{f}}^T \mathbf{Z}_{\mathbf{f}},$$

где  $W_{\mathbf{f}}$  –  $n\beta_{\mathbf{f}} \times n$ -мерная матрица неизвестных весовых параметров;  $\mathbf{Z}_{\mathbf{f}}$  –  $n\beta_{\mathbf{f}}$ -мерный вектор известных базовых функций;  $\hat{\mathbf{f}}$  – вектор оценки вектора  $\mathbf{f}$  и  $\hat{W}_{\mathbf{f}}^T$  – матрица оценки матрицы  $W_{\mathbf{f}}^T$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{f}}$  – вектор ошибок аппроксимации вектора  $\mathbf{f}$ . Тогда, подставляя (36) в (6), получаем

$$L \dot{\mathbf{e}}_I + K_c \mathbf{e}_I = -\tilde{W}_{\mathbf{f}}^T \mathbf{Z}_{\mathbf{f}} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{f}}. \quad (37)$$

Алгоритмы настройки для  $\hat{W}_{L_1}$ ,  $\hat{W}_{\mathbf{h}}$  и  $\hat{W}_{\mathbf{f}}$  найдем, рассматривая следующую функцию Ляпунова:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_M, \mathbf{e}_I, \tilde{W}_{L_1}, \tilde{W}_{\mathbf{h}}, \tilde{W}_{\mathbf{f}}) &= \\ &= \frac{1}{2} \left[ \tilde{\mathbf{x}}^T P \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{e}_M^T P_t \mathbf{e}_M + \mathbf{e}_I^T L \mathbf{e}_I \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ \text{Tr}(\tilde{W}_{L_1}^T Q_{L_1} \tilde{W}_{L_1}) + \text{Tr}(\tilde{W}_{\mathbf{h}}^T Q_{\mathbf{h}} \tilde{W}_{\mathbf{h}}) + \right. \\ &\quad \left. + \text{Tr}(\tilde{W}_{\mathbf{f}}^T Q_{\mathbf{f}} \tilde{W}_{\mathbf{f}}) \right], \end{aligned} \quad (38)$$

где  $Q_{L_1} \in \mathfrak{R}^{n\beta_{L_1} \times n\beta_{L_1}}$ ;  $Q_{\mathbf{h}} \in \mathfrak{R}^{n\beta_{\mathbf{h}} \times n\beta_{\mathbf{h}}}$ ;  $Q_{\mathbf{f}} \in \mathfrak{R}^{n\beta_{\mathbf{f}} \times n\beta_{\mathbf{f}}}$  – симметричные, положительно определенные весовые матрицы.

Примем  $B_M = B_p$ , тогда  $\mathbf{e}_M^T P_t B_p = \mathbf{e}_\tau^T$  (это следует из (32), (33), (35)), матрицы  $P$  и  $P_t$  определим как в (26) и (27), тогда полная производная функции Ляпунова (38), вычисленная в силу уравнений (20), (35) и (37), будет

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_M, \mathbf{e}_I, \tilde{W}_{L_1}, \tilde{W}_{\mathbf{h}}, \tilde{W}_{\mathbf{f}}) &= -\tilde{\mathbf{x}}^T Q \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{e}_I^T K_c \mathbf{e}_I + \\ &+ \tilde{\mathbf{x}}^T P B_0 \mathbf{e}_\tau + \tilde{\mathbf{x}}^T P B_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{L_1} - \mathbf{e}_\tau^T \mathbf{e}_\tau + \mathbf{e}_\tau^T \mathbf{e}_I - \mathbf{e}_\tau^T \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{h}} - \\ &- \mathbf{e}_I^T \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{f}} - \text{Tr} \left[ \tilde{W}_{L_1}^T (Q_{L_1} \dot{\hat{W}}_{L_1} - \mathbf{Z}_{L_1} \tilde{\mathbf{x}}^T P B_0) \right] - \\ &- \text{Tr} \left[ \tilde{W}_{\mathbf{h}}^T (\mathbf{Z}_{\mathbf{h}} \mathbf{e}_M^T P_t B_p + Q_{\mathbf{h}} \dot{\hat{W}}_{\mathbf{h}}) \right] - \\ &- \text{Tr} \left[ \tilde{W}_{\mathbf{f}}^T (Q_{\mathbf{f}} \dot{\hat{W}}_{\mathbf{f}} + \mathbf{Z}_{\mathbf{f}} \mathbf{e}_I^T) \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

При выборе законов настройки в виде, обнуляющем выражения в прямоугольных скобках:

$$\dot{\hat{W}}_{L_1}^T = Q_{L_1}^{-1} (\mathbf{Z}_{L_1} \tilde{\mathbf{x}}^T P B_0 - \sigma_{L_1} \hat{W}_{L_1}); \quad (40)$$

$$\dot{\hat{W}}_{\mathbf{h}} = -Q_{\mathbf{h}}^{-1} (\mathbf{Z}_{\mathbf{h}} \mathbf{e}_\tau^T + \sigma_{\mathbf{h}} \hat{W}_{\mathbf{h}}); \quad (41)$$

$$\dot{\hat{W}}_{\mathbf{f}}^T = -Q_{\mathbf{f}}^{-1} (\mathbf{Z}_{\mathbf{f}} \mathbf{e}_I^T + \sigma_{\mathbf{f}} \hat{W}_{\mathbf{f}}), \quad (42)$$

получаем

$$\dot{V} = -\mathbf{X}\Lambda_1\mathbf{X}^T + \mathbf{X}\Lambda_2\boldsymbol{\varepsilon}_s + \sigma_{L_1}\text{Tr}(\tilde{W}_{L_1}^T\hat{W}_{L_1}) + \sigma_h\text{Tr}(\tilde{W}_h^T\hat{W}_h) + \sigma_f\text{Tr}(\tilde{W}_f^T\hat{W}_f),$$

где

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}^T & \mathbf{e}_\tau^T & \mathbf{e}_I^T \end{bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}_s^T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{L_1}^T & \boldsymbol{\varepsilon}_h^T & \boldsymbol{\varepsilon}_f^T \end{bmatrix};$$

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} Q & -\frac{1}{2}PB_0 & 0_{2n \times n} \\ -\frac{1}{2}(PB_0)^T & E_n & -\frac{1}{2}E_n \\ 0_{n \times 2n} & -\frac{1}{2}E_n & K_C \end{bmatrix};$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} PB_0 & 0_{2n \times n} & 0_{2n \times n} \\ 0_{n \times 2n} & -E_n & 0_n \\ 0_{n \times 2n} & 0_n & -E_n \end{bmatrix}.$$

Принимая законы управления в виде (13), (16), (34) и (36) и алгоритмы настройки в виде (40)–(42), при соответствующем выборе  $K_p$ ,  $K_d$ ,  $K_C$ ,  $J_r$ ,  $B_r$ ,  $K_r$ ,  $P$  и  $\sigma_{(\cdot)}$  и проведении регуляризации интегральных алгоритмов адаптации (40)–(42), можно обеспечить экспоненциальную диссипативность построенной адаптивной системы (13), (16), (34), (36), (40)–(42) по всем переменным и робастность к ограниченному адаптивному возмущению, чем достигается цель управления (7) [13].

**3.3. Построение адаптивного управления для двух- и трехкаскадной систем на базе основного метода приближения функций и пошагового синтеза.** Кратко рассмотрим процедуры построения двух- и трехкаскадной адаптивных систем, опираясь на основной метод приближения функций, для того чтобы провести их сравнительный анализ с адаптивными системами, синтезированными в предыдущих подразделах на основе упрощенной модификации основного метода.

Отличия в синтезе по основному методу упрощения функций от синтеза по его упрощенной модификации, предлагаемой в статье, заключаются только в процедурах синтеза на первом и втором шагах.

Так как все элементы матриц  $D$ ,  $C$  и  $\mathbf{G}$  ограничены, то эти матрицы, опираясь на (9) и (10), можно представить как

$$D = W_D^T Z_D + \boldsymbol{\varepsilon}_D; C = W_C^T Z_C + \boldsymbol{\varepsilon}_C;$$

$$\mathbf{G} = W_G^T \mathbf{Z}_G + \boldsymbol{\varepsilon}_G; \quad (43)$$

$$\hat{D} = \hat{W}_D^T Z_D; \hat{C} = \hat{W}_C^T Z_C; \hat{\mathbf{G}} = \hat{W}_G^T \mathbf{Z}_G,$$

где  $W_D$ ,  $W_C$ ,  $Z_D$ ,  $Z_C$ , соответственно,  $n^2\beta_D \times n$ - и  $n^2\beta_C \times n$ -матрицы весовых констант и матрицы базисных функций;  $W_G$ ,  $\mathbf{Z}_G$  – соответственно,  $n\beta_G \times n$ -матрица и  $n\beta_G \times 1$ -вектор весовых констант и вектор базисных функций;  $\beta_D$ ,  $\beta_C$ ,  $\beta_G$  – соответственно, числа разложений при приближении функций;  $\boldsymbol{\varepsilon}_{(\cdot)}$  – ошибки приближений.

Для синтеза адаптивных систем будем использовать следующие соотношения переменных [1]–[4]:

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + \Lambda \mathbf{e}; \mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda \mathbf{e}, \quad (44)$$

где  $\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d$ ;  $\mathbf{q}_d$  – программный вектор углов вращения звеньев манипулятора;  $\Lambda$  – диагональная числовая матрица с положительными коэффициентами;  $\mathbf{v}$  – вектор виртуальных задающих траекторий.

Тогда уравнения (2) и (4) будут иметь следующий (одинаковый) вид:

$$D\dot{\mathbf{s}} + C\mathbf{s} + \mathbf{G} + D\ddot{\mathbf{q}}_d - D\Lambda\dot{\mathbf{e}} + C\dot{\mathbf{q}}_d - C\Lambda\mathbf{e} = \boldsymbol{\tau}. \quad (45)$$

Используя соотношения (43) и учитывая (44), закон управления  $\boldsymbol{\tau}$  запишем в следующем виде:

$$\boldsymbol{\tau}_d = \hat{D}\dot{\mathbf{v}} + \hat{C}\mathbf{v} + \hat{\mathbf{G}} - K_d\mathbf{s} = \hat{W}_D^T Z_D \dot{\mathbf{v}} + \hat{W}_C^T Z_C \mathbf{v} + \hat{W}_G^T \mathbf{Z}_G - K_d\mathbf{s}. \quad (46)$$

Тогда (45) с учетом (46) будет иметь вид:

$$D\dot{\mathbf{s}} + C\mathbf{s} + K_d\mathbf{s} = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_d + (\hat{D} - D)\dot{\mathbf{v}} + (\hat{C} - C)\mathbf{v} + (\hat{\mathbf{G}} - \mathbf{G}) = \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_d - \tilde{W}_D^T Z_D \dot{\mathbf{v}} - \tilde{W}_C^T Z_C \mathbf{v} - \tilde{W}_G^T \mathbf{Z}_G + \boldsymbol{\varepsilon}_1, \quad (47)$$

где  $\tilde{W}_{(\cdot)}^T = W_{(\cdot)} - \hat{W}_{(\cdot)}$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_1(\boldsymbol{\varepsilon}_D, \boldsymbol{\varepsilon}_C, \boldsymbol{\varepsilon}_G, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{q}}_d)$ .

Опираясь на основной метод приближения функций [3], [4], алгоритмы настройки матриц  $\hat{W}_D$ ,  $\hat{W}_C$  и  $\hat{W}_G$  примут следующий вид:

$$\dot{\hat{W}}_D = -Q_D^{-1}(Z_D \dot{\mathbf{v}} \mathbf{s}^T + \sigma_D \hat{W}_D),$$

$$\dot{\hat{W}}_C = -Q_C^{-1}(Z_C \mathbf{v} \mathbf{s}^T + \sigma_C \hat{W}_C),$$

$$\dot{\hat{W}}_G = -Q_G^{-1}(\mathbf{Z}_G \mathbf{s}^T + \sigma_G \hat{W}_G),$$

где  $Q_D \in \mathfrak{R}^{4^2\beta_D \times 4^2\beta_D}$ ;  $Q_C \in \mathfrak{R}^{4^2\beta_C \times 4^2\beta_C}$ ;  $Q_G \in \mathfrak{R}^{4\beta_G \times 4\beta_G}$  – симметричные, положительно определенные матрицы.

Замечание 3. Адаптивные системы управления, синтезированные на базе основного и упро-

щенного методов приближения функций, не требуют расчета матрицы-регрессора. По сравнению с основным методом приближения функций, применение упрощенного метода приводит к снижению размерности матриц от  $n^2\beta \times n$  до  $n\beta \times n$ , т. е. в  $n$  раз в законе управления и алгоритмах настройки, что позволяет в  $n$  раз снизить и объем вычислений.

**3.4. Результаты компьютерного моделирования.** В качестве номинальных параметров манипуляционного робота (см. рис. 1) были выбраны следующие их средние:  $m_1 = 50$  кг;  $m_2 = 30$  кг;  $m_3 = 20$  кг;  $m_4 = 10$  кг;  $I_{x_1} = 0.1$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{y_1} = 0.1$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{z_1} = 0.1$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{x_2} = 0.07$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{y_2} = 0.07$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{z_2} = 0.07$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{x_3} = 0.05$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{y_3} = 0.05$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{z_3} = 0.05$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{x_4} = 0.03$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{y_4} = 0.03$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{z_4} = 0.03$  кг·м<sup>2</sup>;  $l_1 = 0.4$  м;  $l_2 = 1.5$  м;  $l_3 = 1.2$  м;  $l_4 = 0.6$  м;  $r_1 = 0.2$  м;  $r_2 = 0.7$  м;  $r_3 = 0.6$  м;  $r_4 = 0.3$  м;  $g = 9.8$  м/с<sup>2</sup>;  $L_{я_i} = 0.025$  Гн;  $R_{я_i} = 1$  Ом;  $K_{M_i} =$

$= 10$  Н·м/А;  $K_{b_i} = 5$  Н·м·с/рад;  $J_i = 0.02$  кг·м<sup>2</sup>;  $K_{c_i} = 100$  Н·м/рад;  $K_{e_i} = 1$  В·рад/с;  $i = \overline{1,4}$ . Были приняты также следующие числовые значения, отвечающие заданным требованиям к показателям динамической и статической точности и быстродействию переходных процессов: полином Лежандра;  $\beta = 5$ ;  $K_d = 10^3 \text{diag}(10, 6, 12, 1.2)$ ;  $K_p = 10^3 \text{diag}(400, 270, 740, 100)$ ;  $K_c = 18E_4$ ;  $P = 0.1E_8$ ;  $Q_h^{-1} = 0.1E_{4\beta}$ ;  $J_r = 10^{-4} \text{diag}(1, 1, 1, 0.1)$ ;  $B_r = \text{diag}(2, 2, 6, 2)$ ;  $K_r = 10^3 \text{diag}(1, 2, 2.5, 2.5)$ ;  $\omega_0 = \pi/10$ ;  $Q_{L_1}^{-1} = 0.1E_{4\beta}$ ;  $Q_f^{-1} = 0.1E_{4\beta}$ ;  $Q_{D,C}^{-1} = 0.1E_{4^2\beta}$ ;  $Q_G^{-1} = 0.1E_{4\beta}$ ;  $\lambda_1 = 22$ ;  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 16$ .

На рис. 2–4 приведены результаты компьютерного исследования динамического поведения четырех электромеханических адаптивных систем, построенных либо на основе упрощенного метода

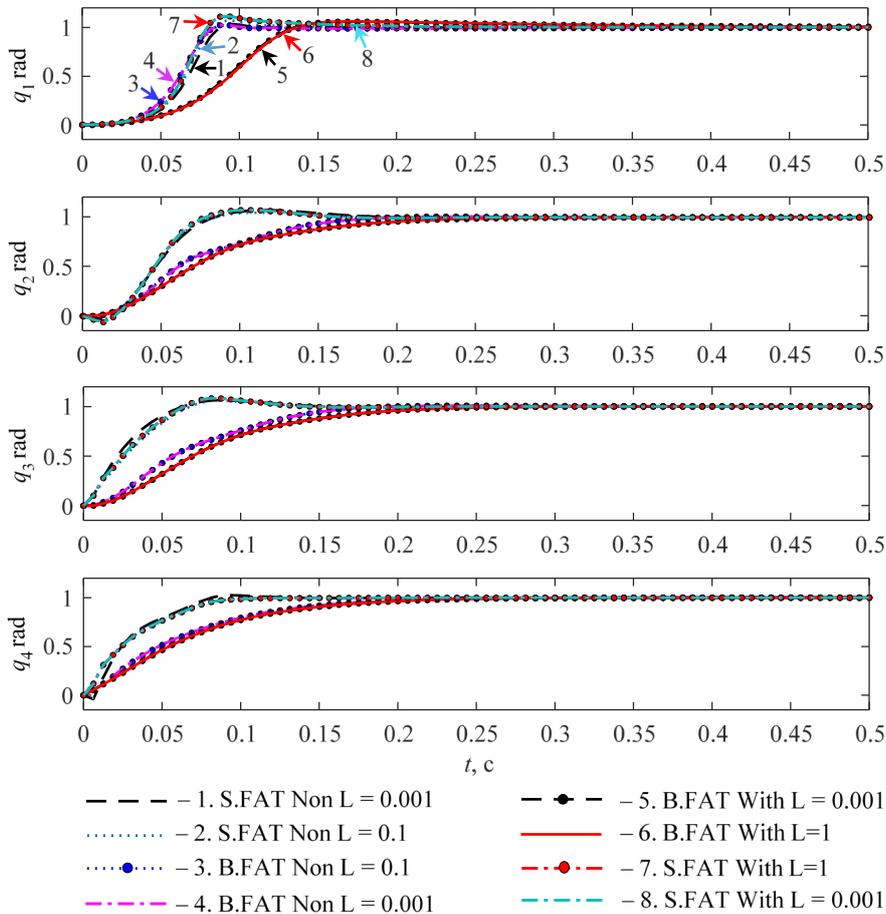
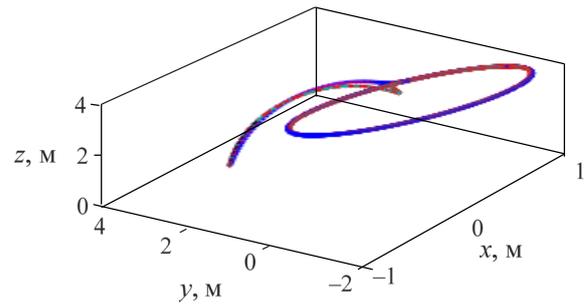
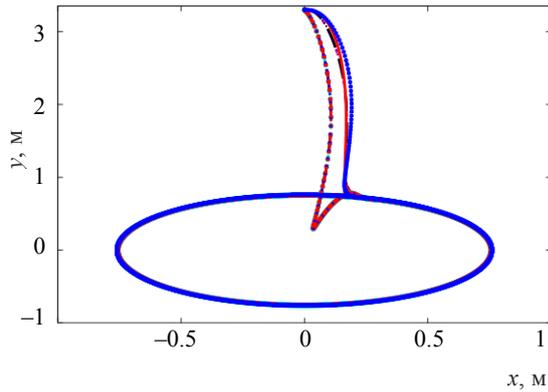
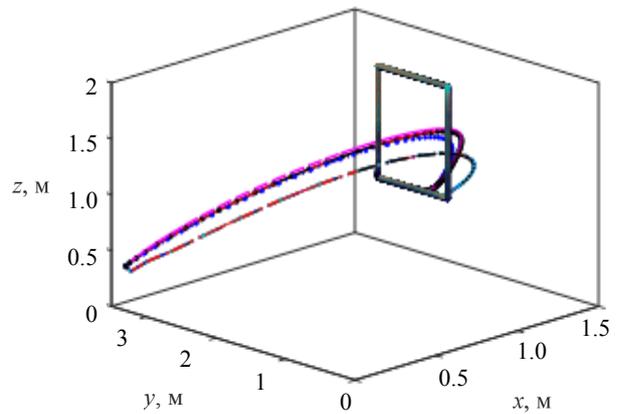
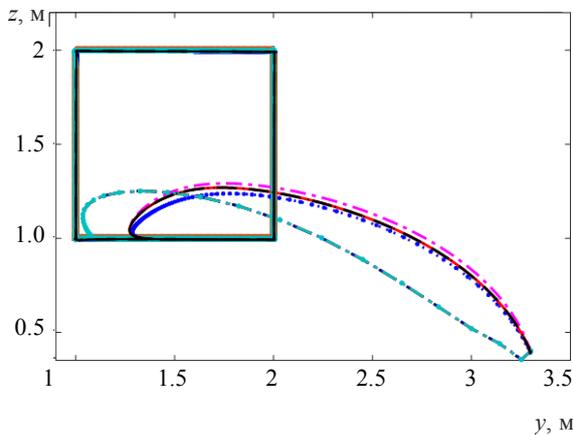


Рис. 2



- - - 1. B.FAT Non L ( $L = 0.001$ )    - - - 2. S.FAT Non L ( $L = 0.001$ )    - - - 3. B. FAT Non L ( $L = 0.01$ )  
- - - 4. S.FAT Non L ( $L = 0.01$ )    - - - 5. S.FAT With L ( $L = 1$ )    - - - 6. B.FAT With L ( $L = 1$ )  
- - - 7. B.FAT With L ( $L = 0.001$ )    - - - 8. S.FAT With L ( $L = 0.001$ )

Рис. 3



- - - 1. B.FAT Non L ( $L = 0.001$ )    - - - 2. S.FAT Non L ( $L = 0.001$ )    - - - 3. B. FAT Non L ( $L = 0.01$ )  
- - - 4. S.FAT Non L ( $L = 0.01$ )    - - - 5. S.FAT With L ( $L = 1$ )    - - - 6. B.FAT With L ( $L = 1$ )  
- - - 7. B.FAT With L ( $L = 0.001$ )    - - - 8. S.FAT With L ( $L = 0.001$ )

Рис. 4

приближения функций, синтезированных без учета электродинамической динамики (кривые 2, 4) или с ее учетом (кривые 5, 8), либо на базе основного метода приближения функций, синтезированных без учета электродинамической динамики (кривые 1, 3) или с ее учетом (кривые 6, 7) в режимах:

а) подача на вход системы единичного ступенчатого задающего воздействия (рис. 2);

б) воспроизведение движения схвата робота по окружности (рис. 3);

в) воспроизведение прямоугольного движения схвата робота (рис. 4):

На рис. 2–4 показано влияние электромагнитной динамики исполнительных электроприводов

на качество переходных процессов и точность воспроизведения программных траекторий, трактуемой как сингулярное возмущение либо учитываемой в синтезе адаптивных электромеханических следящих систем. Видно, что качество работы адаптивных систем, разработанных с учетом электромагнитной динамики приводов в синтезе законов управления и алгоритмов адаптации, выше, чем качество адаптивных систем, разработанных без ее учета, а время переходных процессов во всех разработанных адаптивных системах не превышает 0.2 с.

**Заключение.** По полученным в статье результатам можно сделать следующие выводы:

1. Разработаны системы управления многозвенными манипуляционными роботами с упругими свойствами как нелинейными взаимосвязанными неопределенными объектами, построенными на основе упрощенного и основного методов приближения функций, специализированных для класса лагранжевых объектов. Адаптивные системы, построенные на базе упрощенного метода приближения функций, позволяют обеспечить показатели точности и быстродействия движения робота, сравнимые с показателями адаптивных систем, синтезированных основным методом приближения функций, но при меньших затратах вычислительных ресурсов.

2. Разработаны методики пошагового синтеза адаптивных систем управления многозвенными манипуляционными роботами с упругими свойствами, математические модели которых представлены в виде трех- или двухкаскадной структуры в зависимости от учета электромагнитной динамики исполнительных электроприводов в синтезе или пренебрежения ею как сингулярным возмущением. На базе полученных методик разработаны двух- и трехкаскадные адаптивные

электрохимические системы управления и проведен сравнительный анализ их эффективности в достижении свойств динамической точности и быстродействия.

3. Приведены результаты компьютерных исследований эффективности подавления упругих свойств в условиях влияния электромагнитной динамики на качественные показатели переходных процессов и траекторного движения электромагнитной динамики электроприводов либо трактуемой как сингулярное возмущение, либо учитывая ее в синтезе с основным и упрощенным методами приближения функций. Отмечено, что качество адаптивных систем, разработанных с учетом электромагнитной динамики приводов в синтезе законов управления и алгоритмов адаптации, выше, чем качество адаптивных систем, разработанных без ее учета.

4. Полученные результаты позволяют проектировщику адаптивных систем управления упругих многозвенных механических объектов использовать их как методику обоснования оценки степени малости параметров электромагнитных процессов как «паразитной динамики».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Slotine J.-J. E., Li W. On the adaptive control of robot manipulators // *Int. J. of Robotics Research*. 1987. Vol. 6, № 3. P. 49–58.

2. Slotine J. J. E., Li W. Composite adaptive control of robot manipulators // *Automatic*. 1989. Vol. 25, № 4. P. 509–519.

3. Huang A. C., Kuo Y. S. Sliding control of nonlinear systems containing time-varying uncertainties with unknown bounds // *Int. J. of Control*. 2001. Vol. 74, № 3. P. 252–264.

4. Huang A. C., Chien M. C. *Adaptive Control of Robot Manipulators: A Unified Regressor-free Approach*. Singapore: World Scientific, 2010. 276 p.

5. Kokotovic P. V. *The Joy of Feedback: Nonlinear and Adaptive* // *IEEE Control Systems Magazine*. 1991. Vol. 12. P. 7–17.

6. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokovic P. V. *Nonlinear and Adaptive Control Design*. New York: John Wiley & Sons Inc, 1995. 563 p.

7. Qinglei Hu, Liang Xu, Aihua Zhang. Adaptive backstepping trajectory tracking control of robot manipulator // *J. of the Franklin Institute*. 2012. Vol. 349, № 3. P. 1087–1105.

8. Patel B., Pan Y., Ahmad U. Adaptive backstepping control approach for the trajectory tracking of mobile manipulators // *IEEE Int. Conf. on Robotics and Biomimetics (ROBIO)*. Macau, 2017. P. 1769–1774.

9. Гориневский Д. М., Формальский А. М., Шнейдер А. Ю. *Управление манипуляционными системами на основании информации об усилиях*. М.: Физматлит, 1994. 368 с.

10. Буянкин В. М. *Управление электроприводами для механизмов параллельной кинематики робота манипулятора типа «Хобот»* // *Космические аппараты и технологии*. 2012. № 1. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/upravlenie-elektroprivodami-dlya-mehanizmov-parallelnoy-kinematiki-robota-manipulyatora-tipa-hobot> (дата обращения 26.09.2019).

11. Модель четырехзвенного манипулятора *robo-link RL-DCi (RL-DCi-4S-M)* компании *igus*. URL: <https://www.igus.com/> (дата обращения 17.06.2019).

12. Roy S. B., Bhasin S., Kar I. N. Combined MRAC for Unknown MIMO LTI Systems with Parameter Convergence // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2018. № 63 (1). P. 283–290.

13. Ioannou P., Sun J. *Robust Adaptive Control*. NJ: Prentice Hall, 1996 (out of print in 2003). 848 p.

---

V. V. Putov, Nguyen Duc Phu, V. N. Sheludko, Chu Trong Su  
Saint Petersburg Electrotechnical University

## ADAPTIVE CONTROL ELECTROMECHANICAL SYSTEMS FOR MULTIBODY FLEXIBLE JOINT ROBOTIC MANIPULATORS

*In this article, adaptive control electromechanical systems for flexible joint multibody robotic manipulators as nonlinear interconnected indefinite plants are designed and investigated. Adaptive control electromechanical systems for multibody robotic manipulators are synthesized based on the basic approximating function technique. Within the framework of the basic technique and its simplified modification proposed in the article, which is specialized for the Lagrange multibody dynamics. Methods of step-by-step synthesis of adaptive control systems for multibody flexible joint robotic manipulators are developed in the case of its mathematical models are represented by three- or two-stage cascade structures depending on whether or not the electromagnetic dynamics of executive electric-drives is taken into account. Based on the developed methods, two- and three-stage adaptive control electromechanical systems for a 4 DOF (degrees of freedom) flexible joint robotic manipulator are developed and a comparative analysis of their effectiveness in achieving the properties of dynamic accuracy and speed is carried out as well. The results of computer studies of the effectiveness of either suppressing elastic properties and the influence of electromagnetic dynamics on the qualitative indicators of transient processes and trajectory motion, interpreted as a singular perturbation, or considering it in synthesis methods using direct and simplified methods, are presented. In this article, the advantages of adaptive systems built based on the simplified function approximation technique, allowing providing indicators of accuracy and speed of movement of the robot, comparable with indicators of adaptive systems synthesized by the basic technique, with less computational resources, in computer modeling in the Matlab-Simulink environment, are shown. Comparative computer detailed studies were carried out based on the calculation model of a 4 DOF robotic manipulator of the Icus's company.*

**adaptive control electromechanical system, 4 degrees of freedom robotic manipulator, executive electric-drive, basic function approximation technique, simplified function approximation technique, electromagnetic dynamic, singular perturbation, cascade structure, backstepping**

---