

УДК 519.246

М. В. Данилов  
Ижевский государственный технический  
университет им. М. Т. Калашникова

## Прогнозирование временных рядов малой длительности с использованием алгебраической последовательности и внутреннего сглаживания

*Предлагается метод для прогнозирования временных рядов в условиях малого количества данных. Предложенный метод прогнозирования основан на идентификации основной алгебраической последовательности и находит близкий к оптимальному баланс между алгебраической изменчивостью и гладкостью скользящих средних. Проведено сравнение предлагаемого метода с другими методами прогнозирования (скользящего среднего, последовательного сглаживания, опорных векторов, ARIMA и составными методами).*

*Предложенная методика краткосрочного прогнозирования временных рядов особенно хорошо применима для идентификации неисправностей, прогнозирования срока службы и мониторинга состояния технических объектов. Тем не менее большинство динамических процессов, происходящих в контактных системах, могут быть описаны короткими и редкими событиями (развитие микротрещин, электрические разряды между контактирующими элементами и т. д.). Поэтому разработка надежных методов прогнозирования временных рядов, в частности предсказания коротких рядов, является задачей первостепенной важности и успешно решается в этой статье.*

### Прогнозирование временных рядов, основная алгебраическая последовательность, метод роя частиц, внутреннее сглаживание

Прогнозирование временных рядов является одной из наиболее актуальных проблем, возникающих в науке и технике. Условно говоря, прогнозирование временных рядов можно разделить на долгосрочное и краткосрочное. Целью долгосрочного прогнозирования временных рядов является построение модели процесса, которая затем используется для экстраполяции поведения в прошлом на достаточно отдаленное будущее. Цель краткосрочного прогнозирования временных рядов в общем-то остается той же, т. е. также строится модель и предсказывается поведение в будущем. К сожалению, методы, разработанные для моделей долговременных временных рядов, часто непригодны для кратковременных временных рядов по причине недостаточного объема имеющихся данных. С другой стороны, при краткосрочном прогнозировании временных рядов достаточно лишь иметь возможность делать прогноз на один шаг вперед (иногда сопровождая это поиском локальных минимумов и максимумов).

Методы долгосрочного и краткосрочного прогнозирования временных рядов основаны на различных подходах и моделях. Среди них можно

выделить различные техники сглаживания, такие как фильтр скользящего среднего и экспоненциальное сглаживание [1]–[4], методы, основанные на использовании модели типа АРПСС [5]–[8], методы искусственного интеллекта типа НС (искусственная нейронная сеть) [9]–[12] и др.

**Стратегия прогнозирования.** Положим, что для построения модели процесса, которая используется для экстраполяции его прошлого поведения на будущие моменты времени, имеются  $2n$  наблюдений:

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1},$$

где  $x_{2n-1}$  – величина наблюдения в текущий момент времени. Предположим, что последовательность  $(x_k; k \in Z_0)$  является алгебраической последовательностью и ее  $H$ -ранг равен  $n$ . Тогда для нахождения следующего элемента  $x_{2n}$  последовательности необходимо решить уравнение

$$\det^{(n+1)} = \det \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_{n+1} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix} = 0, \quad (1)$$

где единственным неизвестным является  $x_{2n}$  (т. е. горизонт предсказания равен 1). К сожалению, реальные временные ряды обычно характеризуются тем или иным уровнем зашумленности. Поэтому простое предположение о том, что последовательность  $(x_k; k \in Z_0)$  является алгебраической последовательностью, не выполняется на практике (более того, случайная последовательность не имеет ранга).

**Предложенный алгоритм.** Ключевая идея, лежащая в основе предложенного способа прогнозирования, описывается следующим образом. Прежде всего необходимо в имеющихся экспериментальных данных идентифицировать возможные алгебраические зависимости внутри них. Однако затем, вместо того чтобы просто сделать прогноз с помощью найденной алгебраической модели, будем искать способ сгладить результат такого прогноза. Другими словами, задачей будет сохранить при прогнозе естественную изменчивость основной алгебраической последовательности и относительную гладкость усредненных оценок.

Рассмотрим последовательность  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}$ , схематичное изображение которой представлено на рис. 1. Очевидно, что прямое нахождение следующего элемента  $x_{2n}$  с помощью (1) неприемлемо из-за неизбежного аддитивного шума, присутствующего в реальных временных рядах (исходная последовательность изображена на рис. 1 сплошной толстой линией, прямая прогнозная оценка  $x_{2n}$  показана белым кружком).



Рис. 1

Как уже отмечалось, задача – найти оптимальный баланс между прямым прогнозированием следующего элемента исходной последовательности путем выделения из нее алгебраической составляющей (так называемый алгебраический прогноз) и требуемым уровнем сглаживания текущих наблюдений. Наиболее часто используе-

мым на практике способом устранения неизбежных случайных вариаций в статистических данных является простое сглаживание методом скользящего среднего (СС):

$$\bar{x}_k = \frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} x_{k-i-1}, \quad (2)$$

где  $\bar{x}_k$  – сглаженное значение в момент времени  $k$ ;  $s$  – ширина окна усреднения. В общем случае ширина окна усреднения должна быть задана заранее, причем она никак не связана с длиной основной алгебраической последовательности (окно усреднения изображено на рис. 1 горизонтальными стрелками). Сглаженное значение  $\bar{x}_{2n}$  показано на рис. 1 серым кружком для  $k = 2n$ .

Запишем целевую функцию для поиска набора поправок  $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n-1}\}$ :

$$F(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n-1}) = \frac{1}{a \sum_{k=0}^{2n-1} \lambda_k |\varepsilon_k| + |\tilde{x}_{2n} - \bar{x}_{2n}|}, \quad (3)$$

где

$$\lambda_k = \frac{\exp(b(k+1))}{\sum_{j=0}^{2n-1} \exp(b(j+1))};$$

$$k = 0, 1, \dots, 2n-1; b > 0;$$

$\tilde{x}_{2n}$  – решение уравнения (1);  $\bar{x}_{2n}$  – сглаженное значение по методу скользящего среднего (результат применения (2)); параметр  $a > 0$ , который выступает в роли штрафного коэффициента для взвешенной суммы значений поправок и разницы прогнозных оценок, полученных на базе основной алгебраической последовательности и скользящего среднего (оба члена имеют одинаковый вес при  $a = 1$ ). Следует заметить, что данная целевая функция не содержит член, отвечающий за определитель матрицы Ганкеля. Функция  $F(0, 0, \dots, 0) = +\infty$ , если  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{2n} = 0$  и алгебраическая прогнозная оценка  $\tilde{x}_{2n}$  совпадает с  $\bar{x}_{2n}$ , полученным по методу скользящего среднего, т. е. максимизация целевой функции преследует цель нахождения наименьших значений поправок, при которых алгебраический прогноз

ближе всего к прогнозу по методу СС. Очевидно,

$$\text{что } \sum_{k=0}^{2n-1} \lambda_k = 1; \quad 0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{2n-1} < \lambda_{2n}.$$

Весовые коэффициенты для поправок  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n-1}$  обозначены на рис. 1 соответствующими вертикальными интервалами. Алгебраическая последовательность  $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_{2n-1}$  изображена на рис. 1 штриховой линией; прогнозная оценка  $\tilde{x}_{2n}$  показана на рис. 1 в виде черного кружка.

На рис. 1 белые кружки обозначают исходный временной ряд;  $k = 2n - 1$  соответствует текущему моменту времени; сплошная толстая линия обозначает прямой алгебраический прогноз путем решения (1) (результат показан белым кружком в точке  $k = 2n$ ); окно усреднения обозначено серыми кружками (сглаженный прогноз показан серым кружком в точке  $k = 2n$ ); вертикальные интервалы обозначают допустимый коридор значений поправок для исходного временного ряда; штриховая линия обозначает скорректированную основную алгебраическую последовательность; черный кружок обозначает окончательное прогнозное значение в точке  $k = 2n$ .

Нетрудно заметить, что окончательное прогнозное значение не является простым средним арифметическим алгебраического прогнозного значения  $x_{2n}$  и значения скользящего среднего  $\bar{x}_{2n}$ . Как отмечалось ранее, реальные временные ряды почти всегда характеризуются тем или иным уровнем зашумленности. Поэтому такие временные ряды не имеют ранга, а значит, прямое вычисление прогнозного значения  $x_{2n}$  не имеет физического (и даже математического) смысла. Вместо этого в предложенном методе выявляется ближайшая к исходным данным основная алгебраическая последовательность. Более того, данная последовательность должна давать такой прогноз, который находился бы как можно ближе к сглаженному среднему значению, вычисленному для последних данных исходного ряда. В результате авторами получена схема алгебраического прогнозирования с внутренним сглаживанием. Далее детально описывается вычислительный алгоритм и выбор его параметров для реализации указанной схемы.

**Влияние аддитивного шума.** Ранее было доказано, что случайная числовая последователь-

ность не имеет  $H$ -ранга (в противном случае ее динамика определялась бы простыми алгебраическими соотношениями). Если ранг некоторой последовательности  $Hr(x_k; k \in Z_0) = m$ , а последовательность  $(\varepsilon_k; k \in Z_0)$  является случайной, тогда  $Hr(x_k + \varepsilon_k; k \in Z_0) = +\infty$ . Как уже отмечалось, предложенный метод прогнозирования базируется на идентификации основной алгебраической последовательности, скрытой в реальных временных рядах на фоне их собственного шума.

Введем понятие псевдоспектра квадратной матрицы, детальное исследование которого можно найти в [13]. Для того чтобы лучше понять эффект от влияния аддитивного шума на скрытую алгебраическую последовательность, определяющую динамику развития процесса во времени, полезно снова обратиться к понятию  $H$ -псевдоранга (несмотря на то что для случайной последовательности его не существует).

Спектр квадратной матрицы  $A$ , обозначенный далее как  $\Lambda(A)$ , – это такое множество  $z \in C$ , при котором резольвента  $(zI - A)^{-1}$  либо не определена, либо не ограничена [13] ( $I$  является единичной матрицей). Для любого  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon$ -псевдоспектр матрицы  $A$  определяется следующим образом [13]:

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \left\{ \begin{array}{l} z \in C : z \in \Lambda(A + E) \\ \text{для некоторого } E \text{ и } \|E\| \leq \varepsilon \end{array} \right\}. \quad (4)$$

По аналогии с классическим определением спектра квадратной матрицы введем понятие  $H$ -спектра базового фрагмента алгебраической прогрессии в виде набора корней  $\rho_k$  характеристического уравнения. Тогда для любого  $\varepsilon > 0$   $\varepsilon$ - $H$ -псевдоспектр – это подмножество множества комплексных чисел, которое включает  $P$  – все возможные характеристические корни возмущенной исходной последовательности:

$$P_\varepsilon(x_0, x_1, \dots, x_{2m-1}) = \left\{ \begin{array}{l} z \in C : z \in P(x_0 + \varepsilon_0, x_1 + \varepsilon_1, \dots, x_{2m-1} + \varepsilon_{2m-1}) \\ \text{для некоторых } \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2m-1} \\ \text{и } \|\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2m-1}\|_2 \leq \varepsilon; \\ \varepsilon_k \in R; \\ k = 1, 2, \dots, 2m - 1 \end{array} \right\}. \quad (5)$$

Между (4) и (5) есть принципиальное различие – возмущение вносится не в матрицу Ганкеля, как в (4), а в элементы базового фрагмента

алгебраической прогрессии (причина этого кроется в том, что требуется экстраполировать данную последовательность на будущие моменты времени). Более того, за счет этого удается избежать ситуации, когда  $H$ -ранг алгебраической последовательности отсутствует из-за содержащегося в ней аддитивного шума. Однако, как видно, в элемент  $x_{2m}$  возмущение не вносится. Он определяется решением уравнения  $d^{(m+1)} = 0$ , поэтому  $H$ -ранг возмущенной последовательности остается неизменным и равным  $H$ -рангу исходной (невозмущенной) последовательности. Еще один момент касается того факта, что возмущающая матрица  $E$  в классическом определении псевдоспектра содержит комплексные числа, тогда как в данном случае возмущающий вектор состоит только из вещественных чисел. Как уже отмечалось, это объясняется необходимостью экстраполяции только временного ряда.

Вычисление  $\varepsilon$ - $H$ -псевдоспектра требует нахождения корней возмущенного характеристического уравнения (1). Как известно,  $m$  корней полинома  $m$ -й степени непрерывно зависят от его коэффициентов [14] (однако сама по себе проблема аппроксимации корней полинома по известным значениям его коэффициентов является некорректно поставленной). Коэффициенты полинома – суть соответствующих алгебраических дополнений определителя в (1). В то же время

$$\begin{aligned} \det(A + \varepsilon E) - \det(A) &= \\ &= \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}E)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Таким образом, для относительно небольших возмущений базового фрагмента алгебраической прогрессии справедливы следующие утверждения:

1) они не изменяют  $H$ -ранг исходной последовательности;

2)  $\varepsilon$ - $H$ -псевдоспектр равномерно сходится к  $H$ -псевдоспектру при  $\varepsilon \rightarrow 0$ ;

3) все корни возмущенного характеристического полинома – либо вещественные, либо комплексно-сопряженные числа, поскольку все элементы возмущенного базового фрагмента алгебраической последовательности принимают только вещественные значения.

Другими словами, проблема нахождения поправок  $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2m-1}$  для реальных временных рядов (в т. ч. на основе эволюционных алгоритмов) является уже корректно поставленной задачей.

**Пример.** Для иллюстрации понятия  $\varepsilon$ - $H$ -псевдоспектра воспользуемся простым численным примером. Рассмотрим периодическую последовательность  $\{-1, 1, 2, -1, 1, 2, \dots\}$  с периодом, равным 3 ( $m = 3$ ). Тогда, осуществив элементарные вычисления, можно найти характеристические корни для данной последовательности:

$$\rho_1 = 1, \quad \rho_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{и} \quad \rho_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad (\text{все корни}$$

периодической последовательности расположены на единичной окружности на комплексной плоскости). Далее зафиксируем постоянное значение  $\varepsilon$  и построим 1000 векторов поправок  $[\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5]$ , таких что  $\|\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5\|_2 = \varepsilon$ . При их построении использовался генератор случайных чисел:

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{\|e_0, e_1, \dots, e_5\|_2} e_k; \quad k = \overline{0, 5}, \quad \text{где}$$

$e_k$  – случайная величина, равномерно распределенная в интервале  $[-1; 1]$ . В результате для каждого вектора поправок вычислялись характеристические корни возмущенной последовательности, которые затем наносились на комплексную плоскость. На рис. 2 приведена контурная диаграмма, на которой градиациями серого выделены различные области  $\varepsilon$ - $H$ -псевдоспектра в зависимости от  $\varepsilon$ .

Интересно отметить, что первый корень возмущенной последовательности остается вещественным, тогда как остальные два корня остаются комплексно-сопряженными (что является следствием того, что элементы последовательности принимают только вещественные значения). Хотя возмущенная последовательность уже не является периодической,  $\varepsilon$ - $H$ -псевдоспектр равномерно сходится к  $H$ -псевдоспектру при  $\varepsilon \rightarrow 0$  ( $\varepsilon$  – случайная величина, равномерно распределенная в интервале).

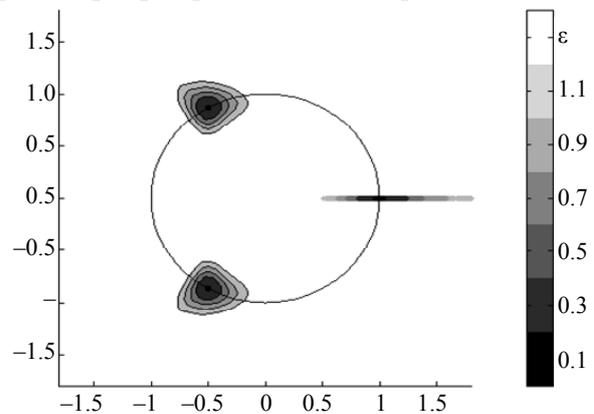


Рис. 2

**Простой численный пример.** Проиллюстрируем концепцию предложенной схемы прогнозирования на простом численном примере. Допустим, имеются четыре наблюдения:  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 0$  и  $x_3 = 2$ . Пусть окно усреднения  $s = 2$ , тогда сглаженное прогнозное значение  $\bar{x}_4 = 1$ . С помощью простого алгебраического прогноза получим, что  $x_4 = -1$ , так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Для простоты будем считать, что  $a = 1$  и  $b = 0$ . В результате требуется найти такие поправки  $\varepsilon_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , которые максимизировали бы целевую функцию (3). Получим значение алгебраического прогноза:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_4 = & \left\{ -\varepsilon_2 \left[ (2 + \varepsilon_1)(2 + \varepsilon_3) - \varepsilon_2^2 \right] + (2 + \varepsilon_3) \times \right. \\ & \left. \times \left[ (1 + \varepsilon_0)(2 + \varepsilon_3) - \varepsilon_2(2 + \varepsilon_1) \right] \right\} / \left[ (1 + \varepsilon_0)\varepsilon_2 - \right. \\ & \left. - (2 + \varepsilon_1)^2 \right]. \end{aligned}$$

Необходимо определить  $\varepsilon_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , при которых целевая функция  $F(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$  принимает оптимальное значение. Данная функция достигает своей нижней границы в точке  $F(0, 0, \dots, 0) = \frac{1}{|\tilde{x}_{2n} - \bar{x}_{2n}|} = 0.5$ . Однако выбор оптимальных значений поправок  $\varepsilon_k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , представляет собой нетривиальную задачу даже для такого простого примера. Очевидно, что ситуация еще больше осложняется в случае более реалистичных сценариев прогнозирования. Таким образом, для успешной реализации предложенной стратегии прогнозирования необходим надежный и эффективный метод оптимизации.

**Выбор параметров для метода роя частиц.** Совершенно очевидно, что прогноз алгебраической последовательности на базе предложенного метода с внутренним сглаживанием по определению не может являться точным. С другой стороны, прямое вычисление прогнозного значения с помощью (1) является, по сути, аналитической оценкой (т. е. точной). Однако целевая функция (3) не содержит член, отвечающий за определитель матрицы Ганкеля. Поэтому в общем случае сделать точный прогноз, имея точную алгебраическую последовательность, с помощью предложенного метода невозможно, так как значение такого прогноза может сколь угодно сильно отличаться от сглаженного среднего значения. Как уже неоднократно отмечалось, не существует универсального метода, пригодного на все случаи жизни. Поэтому естественно ожидать, что предложенный метод будет особенно эффективен для сигналов с достаточно низким отношением сигнал-шум.

Воспользуемся искусственно сгенерированным временным рядом для настройки параметров предложенного алгоритма прогнозирования. Рассмотрим периодическую последовательность (семь элементов, образующих один период, принимали следующие числовые значения: 0.5, 0.7, 0.1, 0.9, 0.3, 0.2, 0.8), которая будет выступать в роли основной алгебраической последовательности. Ко всем элементам данной последовательности прибавлялись случайные значения, равномерно распределенные в интервале  $[-0.15; 0.15]$  (рис. 2). Полученный таким образом тестовый временной ряд использовался для проверки работоспособности предложенного метода.

Первым делом необходимо определить  $H$ -ранг временного ряда (неправильная его оценка может привести к значительным ошибкам прогнозирования). Для нахождения  $\tilde{x}_{2n}$  использовалось (1) без каких-либо поправок и усреднения исходного временного ряда (в общем случае  $\tilde{x}_{2n}$  не будет совпадать с  $x_{2n}$ ). Далее окно наблюдений сдвигалось на один элемент вперед и снова использовалось (1) для нахождения следующего элемента  $\tilde{x}_{2n+1}$ . Всего такая процедура повторялась 50 раз, а затем вычислялась среднеквадратическая ошибка (СКО) прогноза при различных  $m$  (табл. 1). Наилучшие результаты получены при  $m = 7$  (что соответствует матрице Ганкеля размерностью 8). Таким образом, полагаем, что  $H$ -ранг тестового временного ряда равен 7.

Следующим шагом является определение ширины окна усреднения  $s$  для метода скользящего среднего в (2) и штрафного коэффициента  $a$  в (3). При этом используется тот же самый тестовый временной ряд, однако теперь для нахождения почти оптимального набора поправок  $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{13}\}$  будет применяться эволюционный алгоритм.

Следующим шагом является определение ширины окна усреднения  $s$  для метода скользящего среднего в (2) и штрафного коэффициента  $a$  в (3). При этом используется тот же самый тестовый временной ряд, однако теперь для нахождения почти оптимального набора поправок  $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{13}\}$  будет применяться эволюционный алгоритм.

Таблица 1

$m$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
СКО	1.2960	2.1512	21.5646	<b>0.1967</b>	28.7332	1.0214	3.4570	18.4699	7.2924	18.4942	1.3620

В [15] для идентификации основной алгебраической последовательности успешно применялся метод роя частиц (МРЧ). Для выбора почти оптимального набора поправок предлагается также использовать данный метод. Несмотря на обширные теоретические исследования, приведенные в литературе, выбор параметров МРЧ в общем случае должен осуществляться опытным путем в зависимости от топологии целевой функции и/или с учетом ее нелинейной структуры [16], [17]. В соответствии с рекомендациями в [18] параметры МРЧ в работе принимали следующие значения:  $w = 0.6$  и  $c_1 = c_2 = 1.7$  ( $w$  – весовой коэффициент инерции, который используется для уравнивания глобальной и локальной стратегий поиска;  $c_1$  и  $c_2$  – положительные константы, называемые также коэффициентами ускорения, которые выступают в роли весов для случайных членов ускорения, сдвигающих частицу к лучшему из предыдущих ее положений и наилучшему известному положению популяции в целом). В литературе нет четких рекомендаций касательно размера популяции в МРЧ. Как отмечается в [17], эффект от влияния размера популяции на результаты сходимости МРЧ минимален. Большинство исследователей задают размер популяции в диапазоне от 10 до 60 частиц, однако строгого обоснования выбора того или иного значения нет. Для сравнения эффективности двух методов, разработанного в [15] и предложенного в работе, размер популяции в МРЧ составлял 50 частиц.

При выполнении алгоритма МРЧ каждый раз генерируется новый набор почти оптимальных поправок  $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2m-1}\}$ . Всего число запусков алгоритма равнялось 100, в результате чего имелись 100 различных прогнозных оценок  $\tilde{x}_{2m}$ ,

для которых вычислялись СКО относительно истинного значения  $x_{2m}$ . Далее окно наблюдений сдвигалось на один шаг вперед, и описанная процедура получения 100 прогнозных оценок повторялась. Всего данная процедура проводилась 50 раз, после чего все значения СКО арифметически усреднялись. Результаты вычислительных экспериментов приведены в табл. 2.

При проведении вычислительных экспериментов варьировались значения параметров  $s$  (ширина окна усреднения) и  $a$  (штрафной коэффициент). Параметры принимали дискретные значения  $a$ :  $\frac{1}{4m}$ ,  $\frac{1}{2m}$ ,  $\frac{1}{m}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $\frac{m}{2}$ ,  $m$ ,  $2m$  и  $4m$  (для тестового временного ряда  $m = 7$ ) и  $s = 2, 3, \dots, 2m$ . Нижний индекс  $\varepsilon_k$  изменялся от 0 до  $2m - 1$ , поэтому максимальное значение ширины окна усреднения равно  $2m$ . В табл. 2 приведены СКО алгебраического прогноза с внутренним сглаживанием тестового временного ряда при различных  $s$  (ширина окна усреднения) и  $a$  (штрафной коэффициент) и  $m = 7$ . Наилучший результат прогноза (СКО = 0.1768) получен при  $a = 1$  и  $s = 7$ . Поэтому в дальнейшем для прогнозирования других временных рядов использовались только эти значения параметров ( $a = 1$  и  $s = m$ ). Однако перед этим индивидуально для каждого временного ряда определялся его  $H$ -ранг  $m$ .

В результате вся описанная процедура прогнозирования с помощью предложенного метода может быть кратко представлена в виде следующих шагов алгоритма.

#### А. Предварительная обработка данных.

1. Определить  $H$ -ранг временного ряда (параметр  $m$ ) путем выполнения прямого алгебраического прогноза (без коррекции и усреднения исходных данных) при различных  $m$ . Оптимальное значение  $m$  соответствует случаю с наименьшей СКО.

Таблица 2

$s/a$	$1/(4m)$	$1/(2m)$	$1/m$	$1/2$	$1$	$2$	$m/2$	$m$	$2m$	$4m$
2	0.2222	0.2257	0.2168	0.1948	0.1953	0.1933	0.1948	0.1960	0.1962	0.2025
3	0.2209	0.2197	0.2126	0.1940	0.1914	0.1908	0.1940	0.1982	0.2022	0.2041
4	0.2113	0.2157	0.2114	0.1912	0.1893	0.1911	0.1912	0.1952	0.1992	0.2033
5	0.2079	0.2047	0.2123	0.1930	0.1840	0.1871	0.1930	0.1962	0.1963	0.2052
6	0.2100	0.2127	0.2124	0.1963	0.1866	0.1915	0.1963	0.1986	0.2026	0.2012
7	0.2004	0.1995	0.1971	0.1951	<b>0.1768</b>	0.1833	0.1951	0.1978	0.1975	0.2011
8	0.2120	0.2056	0.2055	0.1940	0.1822	0.1879	0.1940	0.1987	0.1976	0.2053
9	0.2108	0.2077	0.200	0.1930	0.1825	0.1862	0.1930	0.2006	0.2046	0.2045
10	0.2018	0.1977	0.2063	0.1964	0.1812	0.1887	0.1964	0.1965	0.2005	0.2002
11	0.2038	0.2058	0.2083	0.1966	0.1809	0.1886	0.1966	0.1963	0.2003	0.2052
12	0.1966	0.2043	0.2013	0.1951	0.1804	0.1864	0.1951	0.1945	0.1951	0.2016
13	0.2059	0.2017	0.2043	0.1945	0.1828	0.1847	0.1945	0.1969	0.2009	0.2028
14	0.1990	0.1977	0.1959	0.1960	0.1791	0.1857	0.1960	0.1951	0.1974	0.2006

2. Установить штрафной коэффициент  $a = 1$  и ширину окна усреднения для метода скользящего среднего  $s = m$ .

3. Установить коэффициент инерции  $w = 0.6$  и коэффициенты ускорения  $c_1 = c_2 = 1.7$  для МРЧ.

**В.** Алгоритм прогноза на один шаг вперед.

1. Вычислить сглаженное значение по методу скользящего среднего  $\bar{x}_{2m}$  на базе  $\{x_m, x_{m+1}, \dots, x_{2m-1}\}$ .

2. Повторить 100 раз:

2.1. Вычислить набор поправок  $\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2m-1}\}$  путем оптимизации с помощью МРЧ целевой функции.

2.2. Запомнить прогнозную оценку  $\tilde{x}_{2m}$ .

3. Вычислить среднее арифметическое прогнозных оценок  $\tilde{x}_{2m}$ , полученных на шаге В.2.

4. Сдвинуть окно наблюдений на один шаг вперед и вернуться на шаг В.1.

**Вычислительные эксперименты.** *Тестовый временной ряд с равномерным шумом.* Далее приведены вычислительные эксперименты с тестовым временным рядом и сравнение эффективности предложенного метода прогнозирования с существующими методами. Результаты прогнози-

рования тестового временного ряда приведены на рис. 3. Прямой алгебраический прогноз (АР) (без внутреннего сглаживания) показан на рис. 3, а, его СКО равна 0.1967. Прогноз с помощью метода скользящего среднего (МА) (при  $s = 7$ ) приводит к большей СКО и демонстрирует чрезмерно высокий уровень сглаживания (рис. 3, б). Даже простой алгебраический прогноз уже превосходит метод скользящего среднего, если основным критерием выступает СКО. Кроме того, по сравнению с рис. 3, б визуальная изменчивость расчетного временного ряда на рис. 3, а намного лучше коррелирует с исходным рядом (в то же время, как видно на рис. 3, а, наблюдается некоторое завышение (занижение) локальных максимумов и минимумов исходного временного ряда). Предложенный метод алгебраического прогнозирования с внутренним сглаживанием (АПИС) приводит к наименьшей СКО и лучшему воспроизведению локальных экстремумов исходного временного ряда (рис. 3, в). Другими словами, локальные флуктуации временного ряда, спрогнозированного на базе предложенного метода, лучше отражают естественную изменчивость исходного временного ряда. Данное обстоятельство особенно важно в тех случаях, когда метод скользящего среднего неприменим, например,

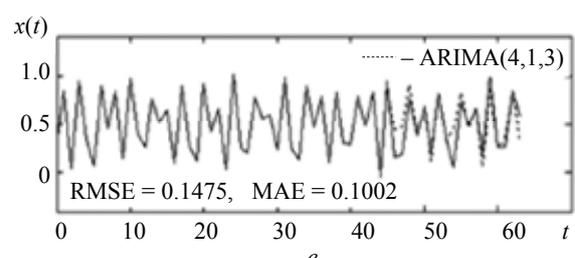
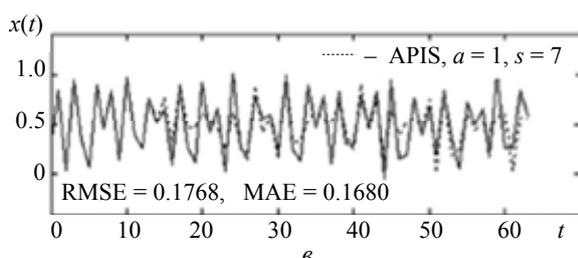
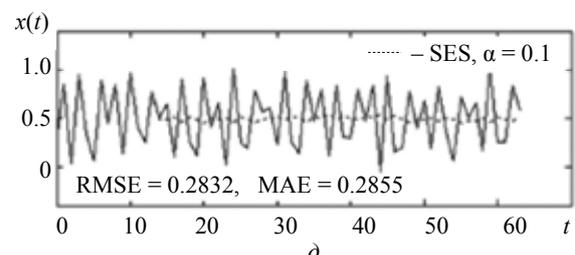
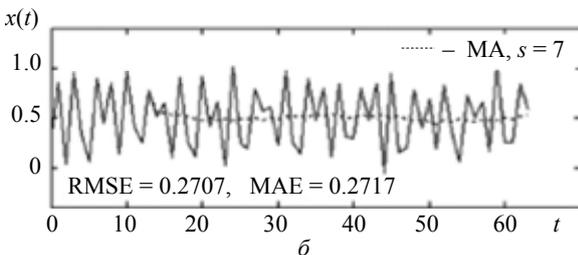
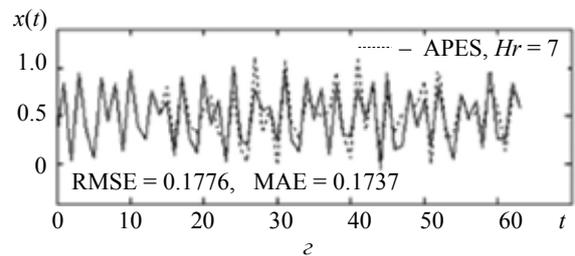
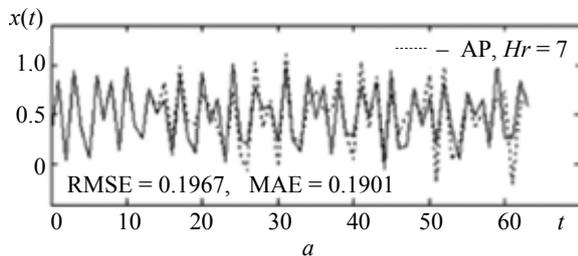


Рис. 3

если требуется предсказывать локальные максимумы и минимумы на сутки вперед [2]. Подобного поведения предложенного метода удалось достичь за счет комбинирования склонности алгебраической последовательности к колебаниям и эффекта сглаживания, проявляющегося при использовании метода скользящего среднего.

В [19] разработан метод прогнозирования на базе идентификации основной алгебраической последовательности. В данном методе осуществляется прогноз на один шаг вперед путем нахождения среднего арифметического значения успешных оценок, поэтому на рис. 3, *г* упомянутый метод обозначен как метод алгебраического прогнозирования с внешним сглаживанием (APES). При использовании того же тестового временного ряда, что и в [19], SKO прогноза у APES немного выше, чем у APIS. Как уже отмечалось, SKO – это всего лишь один из множества критериев точности прогноза. Также по сравнению с APIS метод APES хуже предсказывает локальные максимумы и минимумы (рис. 3), что может, например, затруднить планирование на сутки вперед.

На рис. 3 RMSE – среднеквадратическое отклонение истинного значения временного ряда, MAE – средняя абсолютная ошибка,  $x(t)$  – относительная величина надежности временного ряда,  $t$  – время, с.

В работе было дополнительно проведено сравнение метода APIS и метода на базе последовательного экспоненциального сглаживания (SES) [20], который уже практически стал промышленным стандартом в решении проблемы устранения вариаций, свойственных статистическим данным. Сама по себе процедура прогнозирования с помощью данного метода проста и надежна: прогнозная оценка является экспоненциально взвешенным средним значением прошлых наблюдений [20]. При однократном экспоненциальном сглаживании (SES) вес более старых наблюдений уменьшается по экспоненциальному закону:

$$S_t = \alpha x_{t-i} + (1 - \alpha)S_{t-1},$$

где  $t = 1, 2, 3, \dots$ ;  $S_1 = x_0$ ;  $\alpha$  – параметр сглаживания;  $0 \leq \alpha \leq 1$  [21], [22]. Хотя выбор оптимального значения  $\alpha$  детально исследуется в [20], в работе была проведена серия вычислительных экспериментов для нахождения наилучшего (исходя из SKO) значения данного параметра на примере тестового временного ряда (наилучший результат был получен при  $\alpha = 0.1$ ). Хорошо известно, что

SES не учитывает тренд и сезонные изменения в данных, поэтому может потребоваться двойное или даже тройное (мультипликативное) экспоненциальное сглаживание [21]. Но поскольку имеющийся тестовый временной ряд не содержит явно выраженный тренд или сезонные колебания, в работе использовался только SES. Результирующая SKO для такого метода составила 0.2832 (результаты расчета приведены на рис. 3, *д*).

Последней, с кем дополнительно сравнивался предложенный метод, была модель Бокса–Дженкинса авторегрессии – проинтегрированного скользящего среднего (АРПСС) ARIMA (4,1,3) [19] (рис. 3, *е*), так как эксперименты показали, что такая структура модели лучше всего описывает исходный временной ряд (т. е. когда порядок авторегрессионной составляющей равен 4, порядок интегральной составляющей равен 1 и порядок составляющей скользящего среднего равен 3). Полученная SKO прогноза на базе АРПСС составила 0.1475, что меньше, чем у APIS (рис. 3). Тем не менее нетрудно увидеть, что метод APIS позволяет делать прогноз, имея в наличии всего 14 элементов исходной последовательности ( $m = 7$ ), в то время как для АРПСС требуется значительно больше данных для надежной оценки статистических параметров модели. Фактически метод APIS базируется на восстановлении большого количества почти оптимальных основных алгебраических последовательностей (в данном случае, при наличии 14 наблюдений, генерировались 100 различных основных последовательностей). Несмотря на относительно высокую вычислительную сложность описанного подхода, предложенный метод особенно хорошо подходит для прогнозирования очень коротких последовательностей данных.

Кроме того, нельзя забывать, что любой новый временной ряд требует новой процедуры идентификации модели АРПСС, в то время как для APIS параметры  $a$  и  $b$ , будучи один раз настроенными, могут быть фиксированными для всех временных рядов. Весьма вероятно, что точность прогноза на базе APIS увеличится, если параметры  $a$  и  $b$  будут настраиваться с учетом специфики анализируемого временного ряда. Однако по возможности этого следует избегать, так как при этом вычислительная сложность предложенного метода вырастает еще больше.

*Тестовый временной ряд с гауссовским шумом.* Вычислительные эксперименты проведены на тестовых рядах с добавлением гауссовского

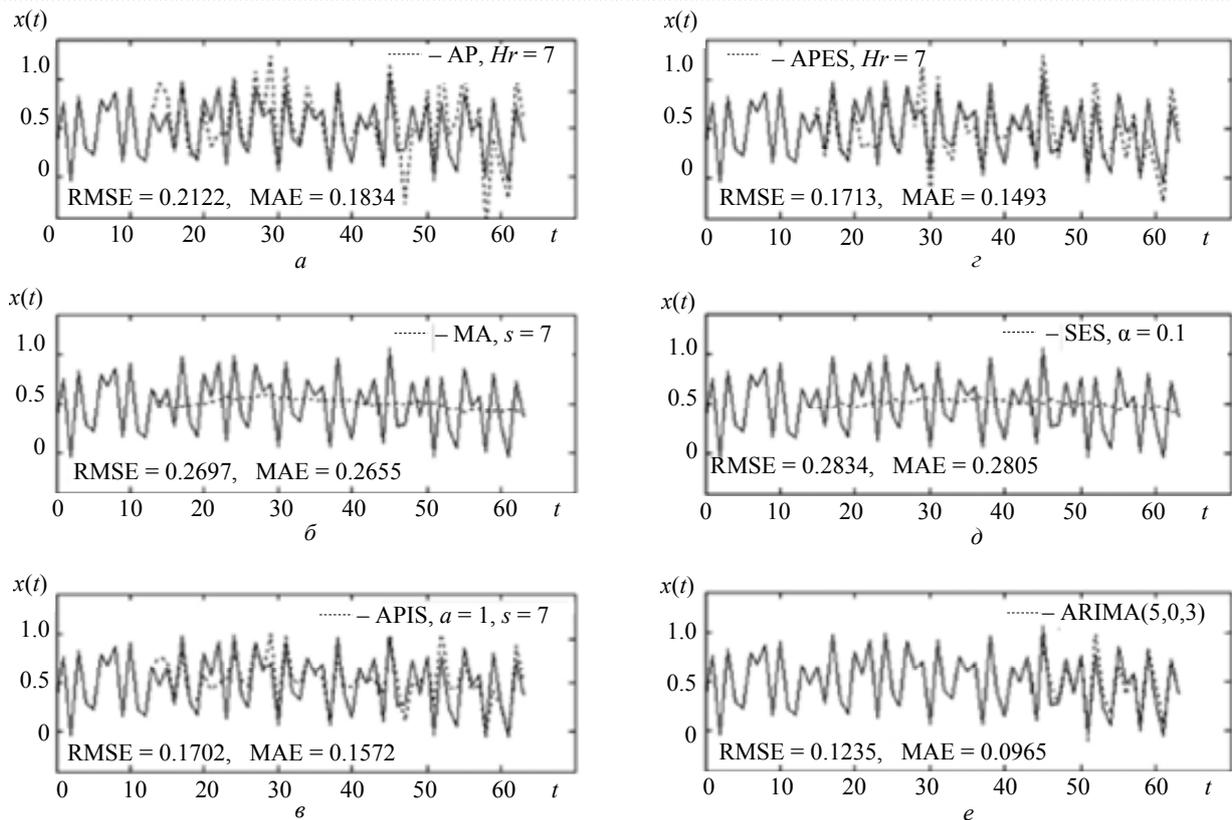


Рис. 4

шума (с нулевым средним и стандартным отклонением, равным 0.1) вместо равномерного шума той же периодической последовательности. Результаты прогнозов приведены на рис. 4. Прямой алгебраический прогноз (без внутреннего сглаживания) изображен на рис. 4, а. СКО прямого прогноза равнялась 0.2122. Прогнозирование по методу скользящих средних (при  $s = 7$ ) дает немного большую СКО (рис. 4, б). Метод APIS показывает низкую СКО и хорошую изменчивость ряда (рис. 4, в). СКО по методу APES является почти такой же хорошей, как и по методу APIS, но наблюдается переоценка локальных минимумов и максимумов (рис. 4, г). Метод SES показывает наилучшие результаты при  $\alpha = 0.1$  (рис. 4, е).

**Выводы.** Показано, что предложенный метод для прогнозирования коротких временных рядов превосходит многие методы прогнозирования, применяемые для коротких временных рядов, – MA (скользящего среднего), SES (последовательное сглаживание), SVM (метод опорных векторов), ARIMA и составные методы.

Предложенный метод прогнозирования основан на идентификации основной алгебраической

последовательности и находит близкий к оптимальному баланс между алгебраической изменчивостью и гладкостью скользящих средних. Предлагаемый метод особенно эффективен, когда временной ряд короткий и нет достаточных данных для обучения моделей на основе нейронных или нечетких сетей.

Целью всех методов прогнозирования временных рядов является построение модели процесса, а затем использование этой модели на последние значения временного ряда для экстраполяции прошлого поведения в будущем. Такой подход хорошо работает для длинных временных рядов, где количество имеющихся данных позволяет строить такие методы прогнозирования, которые используют сотни или даже тысячи точек данных для построения математической (обычно аппроксимирующей) модели процесса. Но ситуация совершенно иная, когда доступное количество данных мало – тогда лучшим решением задачи является предлагаемый метод прогнозирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Christiaanse W. R. Short term load forecasting using general exponential smoothing // IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems. 1971. Vol. 90, iss. 2. P. 900-911.

2. Satpathy H. P., Liew A. C. A real-time short-term peak and average load forecasting system using a self-

organasing fuzzy neural network // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 1998. № 11 (2). P. 307–316.

3. Liu D., Niu D. X., Xing M. Day-ahead price forecast with Genetic-algorithm-optimized Support Vector Machines based on GARCH error calibration // Automation of Electric Power Systems. 2007. № 31(11). P. 31–34.

4. Vahidinasab V., Jadid S., Kazemi A. Day-ahead price forecasting in restructured power systems using artificial neural networks // Electric Power Systems Research. 2008. № 78 (8). P. 1332–1342.

5. Arciniegas A. L., Rueda I. E. A. Forecasting short-term power prices in the Ontario Electricity Market (OEM) with a fuzzy logic based inference system // Utilities Policy. 2008. № 16. P. 39–48.

6. Kim H., K. Sin H. A hybrid approach based on neural networks and genetic algorithms is used for detecting temporal patterns in stock markets // Applied Soft Computing. 2007. № 7(2). P. 569–576.

7. Xue J., Shi Z. Short-time traffic flow prediction based on chaos time series theory // J. of Transportation Systems Engineering and Information Technology. 2008. № 8 (5). P. 68–72.

8. Lee C. M., Ko C. N. Time series prediction using RBF neural networks with a nonlinear time-varying evolution PSO algorithm // Neurocomputing. 2009. № 73 (1–3). P. 449–460.

9. Bashir Z. A., El-Hawary M. E. Applying wavelets to short-term load forecasting using PSO-based neural networks // IEEE Transactions on Powre Systems. 2009. № 24(1). P. 20–27.

10. Casolari S., Colajanni M. Short-term prediction models for server management in Internet-based contexts // Decision Support Systems. 2009. № 48 (1). P. 212–223.

11. Niu D. X., Liu D., Xing M. Electricity price forecasting using generalized regression neural network based on principal component analysis // J. of Central South University of Technology. 2009. № 15 (s2). P. 316–320.

12. Dongxiao Niu, Da Liu, Desheng Dash Wu. A soft computing system for a day-ahead electricity price forecasting // Applied Soft Computing. 2010. № 10 (3). P. 868–875.

13. Trefethen L. N., Wright T. G. Eigenvalues and Pseudospectra of Rectangular Matrices, Report no. 01/03. Oxford: Oxford University Computing Laboratory, Numerical Analyysis Group, 2001.

14. Goreinov S. A., Tyrtshnikov E. E., Zamarashkin N. L. A theory of pseudo-skeleton approximations // Linear Algebra Appl. 1997. № 261. P. 1–21.

15. Eberhart R. C., Kennedy J. Particle swarm optimization: developments, applications and resources // Proc. of IEEE congress on evolutionary computation. Seoul, Korea: IEEE Service Center, Piscataway, 2000. P. 81–86.

16. Shi Y. H., Eberhart R. C. Parameter selection in particle swarm optimization // Proc. of seventh annual conf. on evolutionary programming. San Diego, New York: Springer-Verlag, 1998. P. 591–600.

17. Shi Y. H., Eberhart R. C. Comparing inertia weight and constriction factors in particle swarm optimization // Proc. of IEEE congress on evolutionary computation. San Diego: IEEE Service Center, 2000. P. 84–88.

18. Kennedy J., Eberhart R. C., Shi Y. H. Swarm Intelligence. San Francisco: Morgan Kaufman, 2001.

19. Box G. E. P., Jenkins G. M., Reinsel G. C. Time series analysis: forecasting and control. Englewood Clis, NJ: Prentice-Hall, 1994.

20. Taylor J. W. Smooth transition exponential smoothing // J. of Forecasting. 2004. № 23. P. 385–394.

21. Introduction to Time Series Analysis. URL: <https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/pmc/section4/pmc4.htm> (accessed: 10.07.2018).

22. Gardner E. S.-Jr. Exponential smoothing: The state of the art. Pt. II. URL: <http://www.bauer.uh.edu/gardner/docs/pdf/Exponential-Smoothing.pdf>, 2005 (дата доступа 07.06.2005).

---

M. V. Danilov

*Kalashnikov Izhevsk State Technical University Saint*

## FORECASTING TIME SERIES OF SMALL DURATION WITH THE USE OF ALGEBRAIC SEQUENCE AND INTERNAL SMOOTHING

*The proposed forecasting method is based on the identification of the island algebraic sequence and finds a close to optimal balance between algebraic variability and smoothness of moving averages. The proposed method is compared with other forecasting methods (moving average, sequential smoothing, support vectors, ARIMA and composite methods).*

*The proposed method of short-term time series forecasting is particularly well applicable for fault identification, service life forecasting and monitoring of technical objects. However, most of the dynamic processes occurring in contact systems can be described by short and rare events (the development of microcracks, electrical discharges between the contacting elements, etc.). Therefore, the development of reliable methods of time series prediction, in particular short series prediction, is a task of paramount importance and is successfully solved in this article.*

**Forecasting time series, core algebraic sequence, particle swarm method, internal smoothing**

---