

Метод инвариантного погружения в задачах адаптивного робастного управления сложными электромеханическими подвижными объектами с компенсацией неопределенностей, ограничений входных воздействий и неизвестных внешних возмущений

З. Х. Нгуен[✉], В. В. Путов, В. Н. Шелудько, Н. А. Доброскок

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

[✉] khanhnguyen.mta@gmail.com

Аннотация. Исследуется проблема адаптивного и робастного управления сложными электромеханическими подвижными объектами (СЭМПО) в условиях параметрической неопределенности, неопределенной матрицы входа, ограничений на управляющие воздействия и неизвестных внешних возмущений. Строится нелинейная математическая модель СЭМПО в форме уравнений Лагранжа–Эйлера, учитывающая внешние возмущения и ограничения на управляющие воздействия. Разработана новая адаптивная робастная система управления СЭМПО, обеспечивающая высокую работоспособность даже при одновременном действии параметрической неопределенности, неопределенной матрицы входа, ограничений на управляющие воздействия и неизвестных внешних возмущений. Синтезируется наблюдатель возмущения, выполненный на основе метода инвариантного погружения, точность оценивания которого определяется выбором параметров и границей второй производной вектора суммарного возмущения. Закон адаптивной робастной настройки с σ -модификацией, разработанный при условии инвариантного погружения, обеспечивает не только гибкое формирование динамики ошибок оценивания в сложных нелинейных системах при параметрических неопределенностях, но и сходимости оценок неизвестных параметров к их истинным значениям. Введена вспомогательная динамическая подсистема, предназначенная исключительно для компенсации эффекта насыщения входного сигнала при сохранении неизменной точности работы системы управления. Анализ устойчивости показывает ограниченность и экспоненциальную сходимость всех сигналов замкнутой системы к наибольшему инвариантному множеству. Результаты имитационных экспериментов подтверждают работоспособность и эффективность предложенного адаптивного робастного алгоритма управления.

Ключевые слова: сложные электромеханические подвижные объекты (СЭМПО), адаптивное робастное управление, метод инвариантного погружения (I&I), наблюдатель возмущения, метод аппроксимации функций, метод функций Ляпунова, параметрическая неопределенность, неопределенность матрицы входа, ограничение входных воздействий, неизвестные внешние возмущения

Для цитирования: Метод инвариантного погружения в задачах адаптивного робастного управления сложными электромеханическими подвижными объектами с компенсацией неопределенностей, ограничений входных воздействий и неизвестных внешних возмущений / З. Х. Нгуен, В. В. Путов, В. Н. Шелудько, Н. А. Доброскок // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2025. Т. 18, № 9. С. 101–117. doi: 10.32603/2071-8985-2025-18-9-101-117.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Invariant Immersion Method for Adaptive Robust Control of Complex Electromechanical Moving Objects with Compensation of Uncertainties, Input Constraints and Unknown External Disturbances

Duy Khanh Nguyen✉, V. V. Putov, V. N. Sheludko, N. A. Dobroskok

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

✉khanhnguyen.mta@gmail.com

Abstract. This paper investigates the problem of adaptive and robust control for complex electromechanical moving objects (CEMMO) under conditions of parametric uncertainty, uncertain input matrix, control input constraints, and unknown external disturbances. A nonlinear mathematical model of CEMO is developed in the form of Lagrange-Euler equations, accounting for external disturbances and control input constraints. A novel adaptive robust control system for CEMMO is developed, which ensures high performance even under the simultaneous action of parametric uncertainty, uncertain input matrix, input control constraints, and unknown external disturbances. A disturbance observer is synthesized based on the invariant immersion method, whose estimation accuracy is determined by parameter selection and the bound of the second derivative of the total disturbance vector. The developed adaptive robust tuning law with σ -modification, designed under invariant immersion conditions, ensures not only flexible formation of estimation error dynamics in complex nonlinear systems under parametric uncertainties, but also convergence of unknown parameter estimates to their true values. An auxiliary dynamic subsystem is introduced specifically to compensate for input signal saturation effects while maintaining unchanged control system accuracy. Stability analysis demonstrates boundedness and exponential convergence of all closed-loop system signals to the largest invariant set. The results of simulation experiments confirm the operability and efficiency of the proposed adaptive robust control algorithm.

Keywords: complex electromechanical moving objects (CEMMO), adaptive robust control, invariant immersion method (I&I), disturbance observer, function approximation method, Lyapunov functions method, parametric uncertainty, input matrix uncertainty, input constraints, unknown external disturbances

For citation: Invariant Immersion Method for Adaptive Robust Control of Complex Electromechanical Moving Objects with Compensation of Uncertainties, Input Constraints and Unknown External Disturbances / Duy Khanh Nguyen, V. V. Putov, V. N. Sheludko, N. A. Dobroskok // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2025. Vol. 18, no. 9. P. 101–117. doi: 10.32603/2071-8985-2025-18-9-101-117.

Conflict of interest. The authors declare no conflicts of interest.

Введение. В прикладных задачах управления особый интерес представляет разработка эффективных систем управления сложными электро-механическими подвижными объектами (СЭМПО), так как присущие этим системам существенные нелинейности, перекрестные связи, неопределенности параметров и внешние возмущения способны ухудшить точность слежения и даже нарушить устойчивость [1]–[4]. В области управления движением СЭМПО нашли применение различные стратегии проектирования регуляторов: от классического ПИД-регулирования [5] и LQR-оптимизации [6] до современных подходов управления с прогнозирующими моделями [7], управления в скользящих режимах [8], [9] и метода обхода интегратора (backstepping) [10], [11]. При наличии параметрических неопределенностей особую перспективу представляют гибри-

дные схемы, объединяющие эти методы с адаптивными механизмами параметрической настройки [12]–[15]. Упомянутые методы адаптивного управления используют традиционные адаптивные механизмы, известные как интегральная адаптация.

В последние годы появление схем управления, основанных на методе инвариантного погружения [16], [17] с пропорционально-интегральными законами настройки параметров (также называемых нелинейной пропорционально-интегральной адаптацией) представляют новое перспективное направление, обеспечивающее как гибкость синтеза, так и более высокое качество управления относительно классических подходов [18]–[22]. Метод инвариантного погружения реализует принцип погружения исходной динамической системы в целевую динамику с заданными свойствами. Основная идея заключается в обеспечении

асимптотической сходимости всех траекторий системы к заданному инвариантному многообразию. В отличие от традиционных подходов, данный метод устраняет необходимость явного построения функций Ляпунова и жестких ограничений на структуру системы, включая условие линейной параметризации. Процедура синтеза управления методом инвариантного погружения состоит из двух этапов:

1) конструирование целевого инвариантного многообразия с желаемой динамикой;

2) разработка адаптивного закона управления, гарантирующего притяжение к этому многообразию.

Эффект насыщения управляющих сигналов представляет существенную проблему при разработке регуляторов для практических систем управления СЭМПО, поскольку может вызывать значительное ухудшение динамических характеристик и даже потерю устойчивости замкнутой системы. Для решения этой проблемы в литературе большое внимание уделяется предиктивному управлению с учетом входных ограничений [23], положительной μ -модификации [24], вспомогательным подсистемам, рассматриваемым в качестве компенсаторов эффекта насыщения [25], а также применению методов функций Ляпунова [26] или Нуссбаума [27]. Среди перечисленных подходов наиболее эффективны и широко применяются методы, использующие либо вспомогательные динамические подсистемы, либо функции Ляпунова и Нуссбаума.

Особое значение при проектировании адаптивных регуляторов приобретает компенсация неизвестных внешних возмущений, которые не только ухудшают качество управления и устойчивость системы, но и вызывают дрейф параметров или неограниченное нарастание настраиваемых параметров, потенциально приводящее к отказу от работы системы управления. Введение отрицательных обратных связей в закон адаптации параметров (известное как σ -модификация [28]) позволяет ограничить все сигналы в замкнутой системе. Однако для компенсации внешних возмущений требуется дополнительное введение робастных компонентов со скользящим режимом в управляющий сигнал, применение расширенных наблюдателей состояния или использование специализированных наблюдателей возмущений. Поскольку параметры внешнего возмущения неизвестны, требуется также ввести механизм адаптации усиления робастной составляющей в скользящем режиме, обеспечивающий его превышение над предельным значением неизвестно-

го внешнего возмущения [29]. Хотя этот подход довольно прост, он может стать неэффективным при ограничении управляющих сигналов. Поэтому использование наблюдателей возмущений остается предпочтительным выбором. Наблюдатель расширенного состояния [30], [31] позволяет оценивать неизвестные внешние возмущения, однако его синтез довольно сложен и менее эффективен по сравнению с наблюдателем внешнего возмущения в условиях параметрической неопределенности и насыщения входных сигналов. Наиболее распространенный нелинейный наблюдатель возмущения – это наблюдатель возмущения первого порядка [32], который оценивает только внешние возмущения при условии ограниченности его первой производной по времени. Кроме того, можно использовать наблюдатели возмущения более высокого порядка [33], которые, помимо оценки самого внешнего возмущения, также оценивают его производные при условии их ограниченности. С точки зрения точности, наблюдатели высшего порядка обеспечивают более точную оценку внешних возмущений по сравнению с наблюдателями первого порядка. Однако их синтез более сложен и требует повышенных вычислительных ресурсов микроконтроллера/микропроцессора. Поэтому для точного управления движением СЭМПО достаточно использования наблюдателя возмущения второго порядка.

Настоящая статья направлена на разработку нового алгоритма адаптивного робастного управления трикоптерной платформой с поворотными винтами (рассматриваемой в качестве иллюстративного примера СЭМПО), обеспечивающего существенное улучшение динамических характеристик, повышенную точность позиционирования и ориентации, а также устойчивое функционирование при вариациях параметров системы, неполной информации о матрице управления, наличии насыщения управляющих сигналов и воздействии неучтенных (неизвестных) внешних возмущений. В рамках исследования представлен адаптивный робастный алгоритм настройки, сочетающий методы инвариантного погружения и аппроксимации функций. Для компенсации ограничений, вызванных насыщением управляющих сигналов, предложена вспомогательная динамическая подсистема. Разработан наблюдатель возмущения второго порядка на основе метода инвариантного погружения, с помощью которого компенсируется влияние внешних возмущений и ошибок аппроксимации неопределенных функций в математической модели. Анализ устойчивости замкнутой

системы выполняется на основе теоретических положений метода функций Ляпунова.

Построение математической модели СЭМПО. Динамика пространственного движения объекта управления, характеризуемого шестью степенями свободы, формулируется посредством векторно-матричного представления следующим образом [34], [35]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_p(t). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{q} = [\xi^T \quad \eta^T]^T \in \mathbb{R}^6$ – вектор обобщенных координат, $\xi = [x \quad y \quad z]^T$ – вектор координат центра масс в инерциальной системе, $\eta = [\phi \quad \theta \quad \psi]^T$ – углы Эйлера (крен, тангаж и рыскание), $\phi, \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ и $\psi \in (-\pi, \pi)$, $\mathbb{R}^n$ – вещественное пространство размерности n ; $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_a \end{bmatrix}$, где $\mathbf{M}_a = m\mathbf{E}_3$, m – масса трикоптера, $\mathbf{O}_{m \times n}$ – нулевая матрица размером $m \times n$, $\mathbf{E}_n$ – единичная матрица n -го порядка, $\mathbf{J}_a = \mathbf{P}_{eb}^T \mathbf{J} \mathbf{P}_{eb}$, где $\mathbf{P}_{eb}$ – матрица кинематического преобразования, характеризующая связь между угловыми скоростями в инерциальной и связанной системах координат, $\mathbf{J}$ – симметричная матрица моментов инерции; $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) =$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_a - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbf{J}_a) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & mg & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T; \quad g - \text{ускорение свободного падения;}$$

$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{be} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}$, где $\mathbf{R}_{be}$ – матрица вращения, осуществляющая преобразование координат из связанной системы $X_B Y_B Z_B$ в земную систему $X_E Y_E Z_E$ и определяющаяся через углы Эйлера;

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} k_f & k_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_f & k_f & k_f \\ -k_\tau & k_\tau & 0 & -k_f l_s & k_f l_s & 0 \\ 0 & 0 & k_\tau & -k_f l_f & -k_f l_f & k_f l_b \\ k_f l_s & -k_f l_s & -k_f l_b & -k_\tau & k_\tau & -k_\tau \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

– матрица входа (матрица управления), где l_b – расстояние от заднего несущего винта до центра масс трикоптера в направлении X_B , l_f и l_s – расстояния от передних винтов до центра масс трикоптера в направлениях X_B и Y_B соответственно, k_f и k_τ – аэродинамические коэффициенты сил тяги и крутящего момента;

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \sin(\alpha_1) & \omega_2^2 \sin(\alpha_2) & \omega_3^2 \sin(\alpha_3) \\ \omega_1^2 \cos(\alpha_1) & \omega_2^2 \cos(\alpha_2) & \omega_3^2 \cos(\alpha_3) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^6$$

– вектор входных воздействий, где ω_i – скорость вращения i -го винта, α_i – угол наклона i -го винта ($i = 1, 2, 3$); $\mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}^6$ – вектор обобщенных сил и моментов сопротивления атмосферы, зависящий от коэффициентов сопротивления атмосферы $d_x, d_y, d_z, d_\phi, d_\theta, d_\psi$; $\mathbf{F}_p(t) \in \mathbb{R}^6$ – вектор обобщенных внешних возмущений.

В случае ограничения управляющих воздействий по амплитуде ($|u_i| \leq u_M$), накладываемого максимальными значениями скорости вращения и угла наклона винтов, исходная система уравнений (1) может быть преобразована к виду

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{H}\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_p(t), \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ – вектор расчетных управляющих воздействий; $\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ – вектор реальных управляющих сигналов, учитывающий ограничения;

$$u_i(\tau_i) = \text{sat}(\tau_i) = \begin{cases} \text{sign}(\tau_i) u_M, & \text{если } |\tau_i| \geq u_M; \\ \tau_i, & \text{если } |\tau_i| < u_M, \end{cases} \quad (i = \overline{1, 6}).$$

Проектирование адаптивной робастной системы управления СЭМПО. Проектирование системы управления трикоптером включает три этапа: предварительную обработку математической модели объекта, синтез адаптивного робастного закона управления и разработку наблюдателя возмущения. На первом этапе выполняется подготовка модели для последующего синтеза. Затем разрабатывается алгоритм управления с адаптивным законом настройки неизвестных параметров объекта и матрицы управления при наличии эффекта насыщения управляющих сигналов. Завершающий этап обеспечивает компен-

сацию неизвестных внешних возмущений с помощью наблюдателя возмущения.

А. Предварительная обработка математической модели объекта. Выполним преобразование уравнения (2) к представленной ниже форме [36]:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_k(\mathbf{q}) + \Delta\mathbf{M}] \ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Delta\mathbf{C}] \dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{G}_k + \Delta\mathbf{G}] = \\ = \mathbf{B}(\mathbf{q})[\mathbf{H}_k - \mathbf{H}_0]\mathbf{u}(\tau) + \mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_p(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{M}_k(\mathbf{q})$, $\mathbf{C}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $\mathbf{G}_k$ – матрицы с известными функциональными элементами; $\mathbf{H}_k$, $\mathbf{H}_0 = (\mathbf{H}_k - \mathbf{H})$ – известная и неизвестная части входной матрицы управления соответственно ($\mathbf{H}_k$ – невырожденная матрица); $\Delta\mathbf{M}$, $\Delta\mathbf{C}$, $\Delta\mathbf{G}$ – неопределенные части матриц $\mathbf{M}(\mathbf{q})$, $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, $\mathbf{G}$.

Для упрощения записи введем новое обозначение неопределенной составляющей в математическом описании

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{F}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \mathbf{u}) = \mathbf{M}_k^{-1} [\mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{H}_0\mathbf{u}(\tau) - \\ - \Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \Delta\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \Delta\mathbf{G}]. \end{aligned}$$

Используя конечное разложение в ряд Фурье [36], [37], получаем следующее параметрическое представление функции $\Delta\mathbf{F}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \mathbf{u})$:

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{W}^T \mathbf{z} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4)$$

где $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times 6}$ – матрица неизвестных весовых коэффициентов; $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$ – вектор известных функций, содержащий первые N членов ряда Фурье; $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^6$ – вектор ошибки аппроксимации.

В целях упрощения синтеза алгоритмов управления преобразуем математическое описание произведения $\mathbf{W}^T \mathbf{z}$ к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^T \mathbf{z}(t) &= \sum_{k=1}^N \mathbf{W}_k z_k = \\ &= \sum_{k=1}^N (z_k \mathbf{E}_6) \mathbf{W}_k = \mathbf{z}_0(t) \mathbf{W}_0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathbf{W}_k \in \mathbb{R}^6$ – k -й столбец матрицы $\mathbf{W}^T$; $z_k \in \mathbb{R}$ – k -й элемент вектора $\mathbf{z}$, ($k = \overline{1, N}$); $\mathbf{z}_0(t) = [z_1 \mathbf{E}_6 \quad z_2 \mathbf{E}_6 \quad \dots \quad z_N \mathbf{E}_6] \in \mathbb{R}^{6 \times 6N}$ – регрессионная матрица, содержащая известные элементы; $\mathbf{W}_0 = [\mathbf{W}_1^T \quad \mathbf{W}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{W}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{6N}$ –

вектор, содержащий постоянные неизвестные элементы.

Поскольку вектор $\boldsymbol{\varepsilon}(t)$ представляет собой вектор-функцию времени, его можно разложить на две компоненты:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(t) = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_1(t), \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ – стационарная (постоянная) составляющая; $\boldsymbol{\varepsilon}_1(t)$ – динамическая (переменная) составляющая.

Во многих случаях можно рассматривать $\boldsymbol{\varepsilon}_1(t)$ как постоянную составляющую, учитывая его медленное изменение во времени. Однако в данной статье, с целью повышения точности управления, не будем упрощать его до постоянной составляющей.

Пусть $\mathbf{g}_0 = \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{B} \mathbf{H}_k$; $\boldsymbol{\tau}_1 = -\mathbf{M}_k^{-1} [\mathbf{C}_k \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}_k]$; $\boldsymbol{\chi}(t) = [\mathbf{z}_0(t) \quad \mathbf{E}_6] \in \mathbb{R}^{6 \times 6(N+1)}$ – матрицы, содержащие измеримые переменные системы; $\boldsymbol{\vartheta} = [\mathbf{W}_0^T \quad \boldsymbol{\varepsilon}_0^T]^T \in \mathbb{R}^{6(N+1)}$ – вектор неизвестных постоянных параметров; $\mathbf{d}(t) = \mathbf{M}_k^{-1} \mathbf{F}_p(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_1(t)$ – вектор суммарного возмущения. С учетом соотношений (4)–(6) система (3) может быть представлена в виде

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{g}_0 \mathbf{u}(\tau) + \boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{d}(t). \quad (7)$$

Предположим, что суммарное возмущение $\mathbf{F}_p(t)$ и его производные по времени $\dot{\mathbf{F}}_p(t)$, $\ddot{\mathbf{F}}_p(t)$ ограничены. Данное допущение соответствует характеру реальных внешних возмущений, встречающихся в практических задачах. Тогда имеем $\left\| \frac{d^j \mathbf{d}(t)}{dt^j} \right\| \leq \mu_j$, где $\mu_j > 0$ – положительные числа, $j = \overline{0, 2}$.

Б. Синтез адаптивного робастного управления. Введем следующие переменные:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d; \\ \mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{K}_1 \mathbf{e}_1, \end{cases} \quad (8)$$

где $\mathbf{q}_d$ – вектор желаемых движений трикоптера; $\mathbf{e}_1$ – вектор ошибок слежения; $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1^T \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ – симметричная положительно определенная матрица.

Пусть $\boldsymbol{\delta}(t)$ – переменная, характеризующая дефицит управления вследствие эффекта насыщения, описывается следующим образом:

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{u}(t) - \boldsymbol{\tau}(t). \quad (9)$$

Учитывая выражения (7)–(9), получим систему

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_1 = -\mathbf{K}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \\ \dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{g}_0 \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_0 + \boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{g}_0 \boldsymbol{\delta} + \mathbf{d}(t), \end{cases} \quad (10)$$

где $\boldsymbol{\tau}_0 = \boldsymbol{\tau}_1 + \mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{e}}_1 - \ddot{\mathbf{q}}_d$.

Для компенсации эффекта насыщения управляющих сигналов вводится дополнительная динамическая система с вектором переменных $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^6$, описываемая следующим выражением:

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = -\mathbf{K}_\zeta \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{g}_0 \boldsymbol{\delta}, \quad (11)$$

где $\mathbf{K}_\zeta = \mathbf{K}_\zeta^T \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ – квадратная матрица с вещественными элементами, обладающая свойствами симметрии и положительной определенности.

Введем новую вспомогательную переменную $\mathbf{e}_\delta = \mathbf{e}_2 - \boldsymbol{\zeta}$. Анализ уравнений (10) и (11) позволяет описать динамику переменной $\mathbf{e}_\delta$ следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{\mathbf{e}}_\delta = \mathbf{g}_0 \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_0 + \mathbf{K}_\zeta \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\chi} \boldsymbol{\vartheta} + \mathbf{d}(t). \quad (12)$$

Процедура синтеза управления упрощается при использовании уравнения (12) вместо (10), так как (12) учитывает только расчетные управляющие сигналы регулятора $\boldsymbol{\tau}(t)$, исключая зависимость от дефицита управления $\boldsymbol{\delta}(t)$.

Пусть $\hat{\mathbf{d}}_1 \in \mathbb{R}^6$ – оценка вектора суммарного возмущения $\mathbf{d}(t)$; $\tilde{\mathbf{d}}_1 = \mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}}_1$ – вектор ошибок оценивания суммарного возмущения. Основываясь на теории инвариантного погружения [16], [17], определим вектор ошибок оценивания неизвестных параметров следующим образом:

$$\tilde{\boldsymbol{\vartheta}} = \hat{\boldsymbol{\vartheta}} - \boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{e}_\delta, t), \quad (13)$$

где $\hat{\boldsymbol{\vartheta}} \in \mathbb{R}^{6(N+1)}$ – оценка вектора $\boldsymbol{\vartheta}$; $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{e}_\delta, t) \in \mathbb{R}^{6(N+1)}$ – векторная функция, подлежащая определению на основе условия погружения и инвариантности.

Предлагаемый закон адаптивного робастного управления имеет вид

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{g}_0^{-1} (\boldsymbol{\tau}_0 + \mathbf{K}_\zeta \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\chi}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \boldsymbol{\beta}) + \hat{\mathbf{d}}_1 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{K}_2 \mathbf{e}_\delta), \quad (14)$$

а предлагаемый алгоритм адаптивной робастной настройки параметров (нелинейная ПИ-адаптация с σ -модификацией) при условии инвариантного погружения записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{\vartheta}}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{e}_\delta} \times \\ \times [\mathbf{g}_0 \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_0 + \mathbf{K}_\zeta \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\chi}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \boldsymbol{\beta}) + \hat{\mathbf{d}}_1] - \\ - \Gamma \sigma(\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \boldsymbol{\beta}); \\ \boldsymbol{\beta} = \Gamma \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{e}_\delta, \end{cases} \quad (15)$$

где $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_2^T \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ и $\Gamma \in \mathbb{R}^{6(N+1) \times 6(N+1)}$ – симметричные положительно определенные матрицы; $\partial \boldsymbol{\beta} / \partial t = \Gamma \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{e}_\delta$; $\partial \boldsymbol{\beta} / \partial \mathbf{e}_\delta = \Gamma \boldsymbol{\chi}^T$; $\sigma > 0$ – малое положительное число.

Учитывая (14), преобразуем уравнения динамики $\mathbf{e}_\delta$ (12) и алгоритма адаптации (15) к следующему компактному виду:

$$\dot{\mathbf{e}}_\delta = -\mathbf{e}_1 - \mathbf{K}_2 \mathbf{e}_\delta - \boldsymbol{\chi} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}} + \tilde{\mathbf{d}}_1; \quad (16)$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{\vartheta}}} = -\Gamma \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{e}_\delta + \Gamma \boldsymbol{\chi}^T [\mathbf{e}_1 + \mathbf{K}_2 \mathbf{e}_\delta] - \Gamma \sigma(\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \boldsymbol{\beta}); \\ \boldsymbol{\beta} = \Gamma \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{e}_\delta. \end{cases} \quad (17)$$

Используя выражения (13), (16) и (17), можно вывести следующее дифференциальное уравнение:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} = -\Gamma \boldsymbol{\chi}^T \boldsymbol{\chi} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}} - \Gamma \sigma(\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \boldsymbol{\beta}) + \Gamma \boldsymbol{\chi}^T \tilde{\mathbf{d}}_1. \quad (18)$$

Для проведения анализа алгоритма адаптации (17) предлагается использовать функцию Ляпунова вида

$$V_1 = \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}^T \Gamma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}. \quad (19)$$

Комбинируя (18) и (19), получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}^T \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}} = -\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}^T \boldsymbol{\chi}^T \boldsymbol{\chi} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}} - \\ &- \sigma \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}^T (\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \boldsymbol{\beta}) + \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}^T \boldsymbol{\chi}^T \tilde{\mathbf{d}}_1. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим математические соотношения, полученные с помощью неравенства Юнга:

$$\begin{cases} -\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}^T (\hat{\boldsymbol{\vartheta}} + \boldsymbol{\beta}) \leq \frac{1}{2} (-\|\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}\|^2 + \|\boldsymbol{\vartheta}\|^2); \\ \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}^T \boldsymbol{\chi}^T \tilde{\mathbf{d}}_1 \leq \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\chi} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}\|^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{d}}_1\|^2. \end{cases} \quad (21)$$

Из комбинации уравнения (20) и системы (21) следует соотношение

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -\frac{\sigma}{2} \|\tilde{\boldsymbol{\vartheta}}\|^2 \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\chi} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}\|^2 + \left(\frac{\sigma}{2} \|\boldsymbol{\vartheta}\|^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{d}}_1\|^2 \right) \leq \\ &\leq -\frac{\sigma}{\lambda_{\max}(\Gamma^{-1})} V_1 \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\chi} \tilde{\boldsymbol{\vartheta}}\|^2 + \left(\frac{\sigma}{2} \|\boldsymbol{\vartheta}\|^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{d}}_1\|^2 \right), \end{aligned} \quad (22)$$

где $\lambda_{\max}(\cdot) > 0$ – максимальное собственное значение положительно определенной матрицы.

Из анализа выражений (19) и (22) следует, что $\chi\tilde{\Theta}$ и $\tilde{\Theta}$ остаются ограниченными и достигают инвариантного множества с компактной границей, связанной с Γ , σ и $\tilde{\mathbf{d}}_1$ таким образом, что увеличение Γ и уменьшение σ и $\tilde{\mathbf{d}}_1$ приводят к сокращению границы этого инвариантного множества и ускоренной сходимости $\chi\tilde{\Theta}$ и $\tilde{\Theta}$ к нулевой окрестности. Важно отметить, что ключевым условием практической реализации закона адаптивного робастного управления (14) с алгоритмом адаптации (15) служит разработка наблюдателя, обеспечивающего оценку суммарного возмущения.

В. Синтез наблюдателя возмущения. Проектируем наблюдатель возмущения на основе метода инвариантного погружения. Пусть $\hat{\mathbf{d}}_1 = \mathbf{p}_1 + \beta_1(\dot{\mathbf{q}})$ и $\hat{\mathbf{d}}_2 = \mathbf{p}_2 + \beta_2(\dot{\mathbf{q}})$ – оценки вектора суммарного возмущения $\mathbf{d}(t)$ и его производной по времени $\dot{\mathbf{d}}(t)$ соответственно, где $\mathbf{p}_1, \beta_1, \mathbf{p}_2, \beta_2 \in \mathbb{R}^6$ – переменные наблюдателя возмущения; $\tilde{\mathbf{d}}_1 = \mathbf{d} - \hat{\mathbf{d}}_1 = \mathbf{d} - (\mathbf{p}_1 + \beta_1)$ и $\tilde{\mathbf{d}}_2 = \dot{\mathbf{d}} - \hat{\mathbf{d}}_2 = \dot{\mathbf{d}} - (\mathbf{p}_2 + \beta_2)$ – векторы ошибок оценивания суммарного возмущения и его производной по времени соответственно.

Дифференцируя $\tilde{\mathbf{d}}_1$ и $\tilde{\mathbf{d}}_2$ по времени с учетом выражения (7), получаем

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{d}}}_1 = \dot{\mathbf{d}} - \dot{\mathbf{p}}_1 - \frac{\partial \beta_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{d}} - \dot{\mathbf{p}}_1 - \\ - \frac{\partial \beta_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} (\mathbf{g}_0 \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau}_1 + \chi \tilde{\Theta} + \mathbf{d}); \\ \dot{\tilde{\mathbf{d}}}_2 = \ddot{\mathbf{d}} - \dot{\mathbf{p}}_2 - \frac{\partial \beta_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{d}} - \dot{\mathbf{p}}_2 - \\ - \frac{\partial \beta_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} (\mathbf{g}_0 \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau}_1 + \chi \tilde{\Theta} + \mathbf{d}). \end{cases} \quad (23)$$

Выбираем переменные наблюдателя возмущения как

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}}_1 = -\frac{\partial \beta_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} [\mathbf{g}_0 \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau}_1 + \chi(\hat{\Theta} + \beta) + \hat{\mathbf{d}}_1] + \hat{\mathbf{d}}_2; \\ \dot{\mathbf{p}}_2 = -\frac{\partial \beta_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} [\mathbf{g}_0 \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau}_1 + \chi(\hat{\Theta} + \beta) + \hat{\mathbf{d}}_1]; \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{L}_1; \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{L}_2. \end{cases}$$

Тогда предлагаемый в статье наблюдатель возмущения второго порядка имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{d}}}_1 = \mathbf{p}_1 + \beta_1(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{p}_1 + \mathbf{L}_1 \dot{\mathbf{q}}; \\ \dot{\mathbf{p}}_1 = -\mathbf{L}_1 (\mathbf{g}_0 \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau}_1 + \chi(\hat{\Theta} + \beta) + \hat{\mathbf{d}}_1) + \hat{\mathbf{d}}_2; \\ \dot{\hat{\mathbf{d}}}_2 = \mathbf{p}_2 + \beta_2(\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{p}_2 + \mathbf{L}_2 \dot{\mathbf{q}}; \\ \dot{\mathbf{p}}_2 = -\mathbf{L}_2 (\mathbf{g}_0 \mathbf{u} + \boldsymbol{\tau}_1 + \chi(\hat{\Theta} + \beta) + \hat{\mathbf{d}}_1). \end{cases} \quad (24)$$

где $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ – диагональные положительно определенные матрицы.

Совокупность систем уравнений (23) и (24) позволяет вывести новую систему вида

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{d}}}_1 = -\mathbf{L}_1 \tilde{\mathbf{d}}_1 + \tilde{\mathbf{d}}_2 + \mathbf{L}_1 \chi \tilde{\Theta}; \\ \dot{\tilde{\mathbf{d}}}_2 = -\mathbf{L}_2 \tilde{\mathbf{d}}_1 + \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{L}_2 \chi \tilde{\Theta}. \end{cases} \quad (25)$$

Рассмотрим переменную $\mathbf{e}_d = [\tilde{\mathbf{d}}_1^T \quad \tilde{\mathbf{d}}_2^T]^T \in \mathbb{R}^{12}$, представляющую собой ошибку оценивания суммарного возмущения и его производной по времени. Исходя из системы (25), динамические свойства переменной $\mathbf{e}_d$ описываются следующей математической моделью:

$$\dot{\mathbf{e}}_d = \mathbf{A}_d \mathbf{e}_d + \mathbf{B}_d \chi \tilde{\Theta} + \mathbf{D}_d \ddot{\mathbf{d}}, \quad (26)$$

где $\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} -\mathbf{L}_1 & \mathbf{E}_6 \\ -\mathbf{L}_2 & \mathbf{O}_{6 \times 6} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$; $\mathbf{B}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 6}$; $\mathbf{D}_d = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{6 \times 6} \\ \mathbf{E}_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 6}$.

Исследуем наблюдатель возмущений, используя квадратичную функцию Ляпунова вида

$$V_2 = \mathbf{e}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{e}_d, \quad (27)$$

где $\mathbf{P}_d = \mathbf{P}_d^T \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ – симметричная положительно определенная матрица.

Дифференцируя функцию (27) с учетом соотношения (26), получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{\mathbf{e}}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{e}_d + \mathbf{e}_d^T \mathbf{P}_d \dot{\mathbf{e}}_d = \mathbf{e}_d^T (\mathbf{A}_d^T \mathbf{P}_d + \mathbf{P}_d \mathbf{A}_d) \mathbf{e}_d + \\ &+ 2 \mathbf{e}_d^T \mathbf{P}_d (\mathbf{B}_d \chi \tilde{\Theta} + \mathbf{D}_d \ddot{\mathbf{d}}). \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть $\mathbf{A}_d^T \mathbf{P}_d + \mathbf{P}_d \mathbf{A}_d = -\mathbf{Q}_d$, где $\mathbf{Q}_d = \mathbf{Q}_d^T \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ – симметричная положительно определенная матрица. Для любой произвольной матрицы $\mathbf{Q}_d > 0$ это уравнение имеет единственное решение $\mathbf{P}_d > 0$ тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{A}_d$ – гурвицевой, т. е. все ее собственные значения расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Тогда из (28) получаем

$$\begin{aligned}\dot{V}_2 &= -\mathbf{e}_d^T \mathbf{Q}_d \mathbf{e}_d + 2\mathbf{e}_d^T \mathbf{P}_d (\mathbf{B}_d \chi \tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{D}_d \ddot{\mathbf{d}}) \leq \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_d) \|\mathbf{e}_d\|^2 + 2\|\mathbf{e}_d\| \lambda_{\max}(\mathbf{P}_d) \times \\ &\quad \times (\|\mathbf{B}_d\|_F \|\chi \tilde{\mathbf{g}}\| + \|\mathbf{D}_d\|_F \|\ddot{\mathbf{d}}\|), \\ \dot{V}_2 &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_d) \|\mathbf{e}_d\| \times \\ &\quad \times \left[\|\mathbf{e}_d\| - \frac{2\lambda_{\max}(\mathbf{P}_d)}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_d)} (\|\mathbf{B}_d\|_F \|\chi \tilde{\mathbf{g}}\| + \mu_2 \|\mathbf{D}_d\|_F) \right], \quad (29)\end{aligned}$$

где $\lambda_{\min}(\cdot) > 0$ – минимальное собственное число определено положительной матрицы; $\|\cdot\|_F$ – норма Фробениуса.

Из (29) следует, что $\dot{V}_2 < 0$ вне множества $\left\{ \mathbf{e}_d : \|\mathbf{e}_d\| \leq \frac{2\lambda_{\max}(\mathbf{P}_d)}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_d)} (\|\mathbf{B}_d\|_F \|\chi \tilde{\mathbf{g}}\| + \mu_2 \|\mathbf{D}_d\|_F) \right\}$, т.е. переменная $\|\mathbf{e}_d\|$ ограничена и сходится к этому инвариантному множеству, поскольку переменная $\|\chi \tilde{\mathbf{g}}\|$ ограничена (как показано в п. А). Нетрудно увидеть, что граница этого множества определяется переменной $\|\chi \tilde{\mathbf{g}}\|$, верхней границы второй производной суммарного возмущения $\|\ddot{\mathbf{d}}\| \leq \mu_2$ и соотношения $2\lambda_{\max}(\mathbf{P}_d)/\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_d)$. Согласно анализу предыдущего пункта, величина $\|\chi \tilde{\mathbf{g}}\|$ может быть уменьшена путем увеличения Γ и уменьшения σ . Как следует из уравнения Ляпунова $\mathbf{A}_d^T \mathbf{P}_d + \mathbf{P}_d \mathbf{A}_d = -\mathbf{Q}_d$, соотношение $2\lambda_{\max}(\mathbf{P}_d)/\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_d)$ функционально зависит от собственных значений матрицы $\mathbf{A}_d$: чем дальше собственные значения матрицы $\mathbf{A}_d$ расположены от мнимой оси в левой полуплоскости, тем меньше становится отношение $2\lambda_{\max}(\mathbf{P}_d)/\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_d)$. Этого можно достичь путем выбора матриц $\mathbf{L}_1 > 0$ и $\mathbf{L}_2 > 0$ так, чтобы $\mathbf{A}_d$ была матрицей Гурвица. Также важно отметить, что при $\|\chi \tilde{\mathbf{g}}\| \rightarrow 0$ и $\ddot{\mathbf{d}}(t) \rightarrow 0$ переменная $\|\mathbf{e}_d\|$ стремится к нулю экспоненциально.

Анализ устойчивости замкнутой системы.

Анализ устойчивости предложенной адаптивной робастной системы управления с наблюдателем возмущения выполнен с использованием метода функций Ляпунова, включая построение соответствующего положительно определенного функционала и исследование его производной по времени.

Рассмотрим кандидата на функцию Ляпунова следующего вида:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_8^T \mathbf{e}_8 + \frac{1}{2} \zeta^T \zeta + V_1 + V_2. \quad (30)$$

Дифференцируя функцию (30) по времени с учетом соотношений (10), (11), (16), (19), (20), (27) и (28), получаем следующие последовательные выражения:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \mathbf{e}_1^T \dot{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_8^T \dot{\mathbf{e}}_8 + \zeta^T \dot{\zeta} + \dot{V}_1 + \dot{V}_2 = \\ &= \mathbf{e}_1^T (-\mathbf{K}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_8^T (-\mathbf{e}_1 - \mathbf{K}_2 \mathbf{e}_8 - \chi \tilde{\mathbf{g}} + \tilde{\mathbf{d}}_1) + \\ &\quad + \zeta^T (-\mathbf{K}_\zeta \zeta + \mathbf{g}_0 \delta) - \tilde{\mathbf{g}}^T \chi^T \chi \tilde{\mathbf{g}} - \sigma \tilde{\mathbf{g}}^T (\hat{\mathbf{g}} + \beta) + \\ &\quad + \tilde{\mathbf{g}}^T \chi^T \tilde{\mathbf{d}}_1 - \mathbf{e}_d^T \mathbf{Q}_d \mathbf{e}_d + 2\mathbf{e}_d^T \mathbf{P}_d (\mathbf{B}_d \chi \tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{D}_d \ddot{\mathbf{d}}), \\ \dot{V} &= -\mathbf{e}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_8^T \mathbf{K}_2 \mathbf{e}_8 - \zeta^T \mathbf{K}_\zeta \zeta - \tilde{\mathbf{g}}^T \chi^T \chi \tilde{\mathbf{g}} - \\ &\quad - \mathbf{e}_d^T \mathbf{Q}_d \mathbf{e}_d + \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_8^T \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_8^T \chi \tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{e}_8^T \tilde{\mathbf{d}}_1 + \zeta^T \mathbf{g}_0 \delta - \\ &\quad - \sigma \tilde{\mathbf{g}}^T (\hat{\mathbf{g}} + \beta) + \tilde{\mathbf{g}}^T \chi^T \tilde{\mathbf{d}}_1 + 2\mathbf{e}_d^T \mathbf{P}_d (\mathbf{B}_d \chi \tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{D}_d \ddot{\mathbf{d}}). \quad (31)\end{aligned}$$

Применяя неравенство Юнга в стандартной форме

$$ab \leq \frac{a^2}{2\varsigma} + \frac{\varsigma b^2}{2},$$

где $a, b \in \Re$ – произвольные вещественные числа; $\varsigma > 0$ – произвольное положительное число, нетрудно получить следующую систему неравенств:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_8^T \mathbf{e}_1 &= \zeta^T \mathbf{e}_1 \leq \frac{1}{2\rho_1} \|\zeta\|^2 + \frac{\rho_1}{2} \|\mathbf{e}_1\|^2; \\ \mathbf{e}_8^T \tilde{\mathbf{d}}_1 &\leq \frac{\rho_2}{2} \|\mathbf{e}_8\|^2 + \frac{1}{2\rho_2} \|\tilde{\mathbf{d}}_1\|^2 \leq \\ &\leq \frac{\rho_2}{2} \|\mathbf{e}_8\|^2 + \frac{1}{2\rho_2} \|\mathbf{e}_d\|^2; \\ -\mathbf{e}_8^T \chi \tilde{\mathbf{g}} &\leq \frac{\rho_3}{2} \|\mathbf{e}_8\|^2 + \frac{1}{2\rho_3} \|\chi \tilde{\mathbf{g}}\|^2; \\ -\tilde{\mathbf{g}}^T (\hat{\mathbf{g}} + \beta) &\leq \left(\frac{\rho_4}{2} - 1 \right) \|\tilde{\mathbf{g}}\|^2 + \frac{1}{2\rho_4} \|\beta\|^2; \\ \zeta^T \mathbf{g}_0 \delta &\leq \frac{\rho_5}{2} \|\zeta\|^2 + \frac{1}{2\rho_5} \|\mathbf{g}_0 \delta\|^2; \\ \tilde{\mathbf{g}}^T \chi^T \tilde{\mathbf{d}}_1 &\leq \frac{1}{2\rho_6} \|\chi \tilde{\mathbf{g}}\|^2 + \frac{\rho_6}{2} \|\tilde{\mathbf{d}}_1\|^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2\rho_6} \|\chi \tilde{\mathbf{g}}\|^2 + \frac{\rho_6}{2} \|\mathbf{e}_d\|^2; \\ 2\mathbf{e}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{D}_d \ddot{\mathbf{d}} &\leq \rho_7 \|\mathbf{P}_d \mathbf{D}_d\|_F^2 \|\mathbf{e}_d\|^2 + \frac{1}{\rho_7} \mu_2^2; \\ 2\mathbf{e}_d^T \mathbf{P}_d \mathbf{B}_d \chi \tilde{\mathbf{g}} &\leq \rho_8 \|\mathbf{P}_d \mathbf{B}_d\|_F^2 \|\mathbf{e}_d\|^2 + \frac{1}{\rho_8} \|\chi \tilde{\mathbf{g}}\|^2, \end{aligned} \right. \quad (32)$$

где $\rho_k > 0$ – положительные числа, $k = \overline{1,8}$.

Используя комбинацию выражений (31) и (32), выводим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & - \left[\lambda_{\min}(\mathbf{K}_1) - \frac{\rho_1}{2} \right] \|\mathbf{e}_1\|^2 - \\ & - \left[\lambda_{\min}(\mathbf{K}_2) - \frac{\rho_2 + \rho_3}{2} \right] \|\mathbf{e}_8\|^2 - \\ & - \left[\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\zeta) - \frac{1}{2\rho_1} - \frac{\rho_5}{2} \right] \|\zeta\|^2 - \sigma \left(1 - \frac{\rho_4}{2} \right) \|\tilde{\mathbf{g}}\|^2 - \\ & - \left(1 - \frac{1}{2\rho_3} - \frac{1}{2\rho_6} - \frac{1}{\rho_8} \right) \|\chi\tilde{\mathbf{g}}\|^2 - \\ & - \left[\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_d) - \frac{1}{2\rho_2} - \frac{\rho_6}{2} - \rho_7 \|\mathbf{P}_d \mathbf{D}_d\|_F^2 - \right. \\ & \left. - \rho_8 \|\mathbf{P}_d \mathbf{B}_d\|_F^2 \right] \|\mathbf{e}_d\|^2 + \Delta, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\Delta > 0$ – положительная константа, удовлетворяющее условию

$$\Delta \geq \left(\frac{\sigma}{2\rho_4} \|\mathbf{g}\|^2 + \frac{1}{2\rho_5} \|\mathbf{g}_0 \delta\|^2 + \frac{1}{\rho_7} \mu_2^2 \right).$$

Параметры регулятора должны удовлетворять следующим условиям:

$$\left\{ \begin{aligned} & \lambda_{\min}(\mathbf{K}_1) - \frac{\rho_1}{2} > 0; \\ & \lambda_{\min}(\mathbf{K}_2) - \frac{\rho_2 + \rho_3}{2} > 0; \\ & \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\zeta) - \frac{1}{2\rho_1} - \frac{\rho_5}{2} > 0; \\ & 1 - \frac{\rho_4}{2} > 0; \quad 1 - \frac{1}{2\rho_3} - \frac{1}{2\rho_6} - \frac{1}{\rho_8} > 0; \\ & \lambda_{\min}(\mathbf{Q}_d) - \frac{1}{2\rho_2} - \frac{\rho_6}{2} - \\ & - \rho_7 \|\mathbf{P}_d \mathbf{D}_d\|_F^2 - \rho_8 \|\mathbf{P}_d \mathbf{B}_d\|_F^2 > 0. \end{aligned} \right. \quad (34)$$

Введем параметр $\alpha > 0$, численное значение которого определяется выполнением следующего условия:

$$\alpha \leq \min \left\{ \begin{aligned} & 2\lambda_{\min}(\mathbf{K}_1) - \rho_1; \quad 2\lambda_{\min}(\mathbf{K}_2) - \rho_2 - \rho_3; \\ & 2\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\zeta) - \frac{1}{\rho_1} - \rho_5; \quad \frac{(2 - \rho_4)\sigma}{\lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}_1^{-1})}; \\ & \left[\lambda_{\min}(\mathbf{Q}_d) - \frac{1}{2\rho_2} - \frac{\rho_6}{2} - \rho_7 \|\mathbf{P}_d \mathbf{D}_d\|_F^2 - \right. \\ & \left. - \rho_8 \|\mathbf{P}_d \mathbf{B}_d\|_F^2 \right] / \lambda_{\max}(\mathbf{P}_d). \end{aligned} \right.$$

Таким образом, получаем эквивалентное неравенству (33) дифференциальное неравенство следующего вида:

$$\dot{V} \leq -\alpha V + \Delta.$$

Полученное неравенство имеет решение вида

$$0 \leq V(t) \leq \left[V(0) - \frac{\Delta}{\alpha} \right] e^{-\alpha t} + \frac{\Delta}{\alpha}. \quad (35)$$

Как следствие, сигналы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_8 = \mathbf{e}_2 - \zeta$, ζ , $\tilde{\mathbf{g}}$, $\chi\tilde{\mathbf{g}}$ и $\mathbf{e}_d$ остаются ограниченными, из чего вытекает ограниченность $\mathbf{e}_2$. Таким образом, все траектории системы остаются ограниченными и экспоненциально стремятся к инвариантному множеству [38]. Как следует из проведенного анализа, соответствующая регулировка параметров предложенной схемы управления с наблюдателем возмущений при выполнении условия (34) приводит к существенному сокращению размеров данного множества.

Совместный анализ выражений (30) и (35) позволяет получить соотношение вида

$$\|\mathbf{e}_1\| \leq \sqrt{2 \left[V(0) - \frac{\Delta}{\alpha} \right] e^{-\alpha t} + \frac{2\Delta}{\alpha}}. \quad (36)$$

Из (36) видно, что ошибка слежения $\|\mathbf{e}_1\|$ ограничена размерами инвариантного множества. Посредством корректного выбора параметров предложенного алгоритма управления достигается заданная (высокая) точность слежения, при этом устраняется влияние неизвестности параметров объекта, неполноты информации о матрице управления, амплитудных ограничений управляющих сигналов и внешних возмущающих воздействий. Нетрудно отметить, что если $\|\delta\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, сигналы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_8$, ζ , $\tilde{\mathbf{g}}$, $\chi\tilde{\mathbf{g}}$ и $\mathbf{e}_d$ сходятся к нулевой окрестности (к инвариантному множеству).

Численное моделирование системы управления и анализ результатов. В программной среде MatLab/Simulink выполнено численное моделирование предложенной системы управления с наблюдателем возмущения. Исследование проводилось при следующих номинальных значениях параметров объекта [39]: $l_b = 0.33$ м; $m = 1.449$ кг; $k_f = 0.1081 \cdot 10^{-4}$ кг·м; $k_\tau = 0.1729 \cdot 10^{-6}$ кг·м²; $\mathbf{J} = \text{diag}(0.1037, 0.1031, 0.171)$; $d_x = 0.0242$; $d_y = 0.0316$; $d_z = 0.0546$; $d_\phi = 0.01$; $d_\theta = 0.0105$; $d_\psi = 0.0121$. Предельное значение управляющих сигналов, при котором наступает насыщение каналов управления, задано равным $u_M = 12.5 \cdot 10^4$.

Модель внешних возмущений представлена вектором следующего вида:

$$\mathbf{F}_p(t) = \begin{bmatrix} 5 \sin t & 5 \sin 2t & 5 \sin 3t \\ 2.5 \sin t & 2.5 \sin 2t & 4 \sin 3t \end{bmatrix}^T.$$

Параметры предложенной схемы управления (14), (15) с наблюдателем возмущения (24) выбираются как $\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_{\text{nom}}$, где $\mathbf{H}_{\text{nom}}$ – номинальная матрица $\mathbf{H}$; $\mathbf{K}_1 = \text{diag}(5, 5, 5, 10^3, 10^3, 10^3)$; $\mathbf{K}_2 = 50\mathbf{E}_6$; $\mathbf{K}_\zeta = 4.5\mathbf{E}_6$; $N = 9$; $\omega = 10$; $\hat{\mathbf{g}}(0) = \mathbf{0}_{60 \times 1}$; $\mathbf{\Gamma} = 25 \cdot \mathbf{E}_{60}$; $\sigma = 10^{-3}$; $\mathbf{L}_1 = 20\mathbf{E}_6$; $\mathbf{L}_2 = 100\mathbf{E}_6$.

Проведена сравнительная оценка эффективности предложенного алгоритма адаптивного робастного управления в сопоставлении с методом, приведенным в [36], для сложного случая, включающего одновременное влияние четырех факторов: неопределенности параметров объекта, неполноты информации о матрице управления, амплитудных ограничений управляющих сигналов и внешних возмущающих воздействий.

В статье основное внимание сосредоточено на анализе предельных режимов эксплуатации, предполагающих ухудшение аэродинамических характеристик на 25 % при одновременном действии указанных факторов. Графическое представление результатов моделирования (рис. 1–7) включает целевую траекторию движения (штрихпунктирные линии); траекторию движения/управляющие сигналы трикоптера с алгоритмом управления из [36] (штриховые линии); траекторию движения/управляющие сигналы трикоптера с предложенным в статье алгоритмом управления (сплошные линии), и предельные значения управ-

ляющих воздействий, соответствующие зоне насыщения (линии с круговыми маркерами).

Сценарий моделирования 1 – исследование движения трикоптера по постоянным целевым траекториям $\mathbf{q}_d(t) = [2.5 \ 2.5 \ 2.5 \ 0 \ 0 \ \pi/2]^T$. На рис. 1–3 представлены графики движения трикоптера, управляющих сигналов и скоростей вращения/углов наклона несущих винтов трикоптера соответственно.

Сценарий моделирования 2 – исследование движения трикоптера по траекториям спиральной формы $\mathbf{q}_d(t) = [10 \sin(0.4t + \pi/2) \ 10 \sin(0.4t) \ 5 + 0.5t \ 0 \ 0 \ \pi/4]^T$. На рис. 4–7 представлены графики траектории трикоптера, ошибок отслеживания заданной траектории, управляющих сигналов и скоростей вращения/углов наклона несущих винтов трикоптера соответственно.

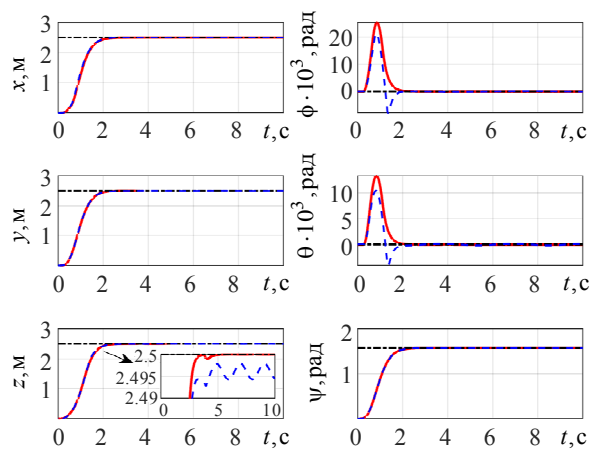


Рис. 1. Движения трикоптера при заданных постоянных сигналах

Fig. 1. Tricopter movements with given constant signals

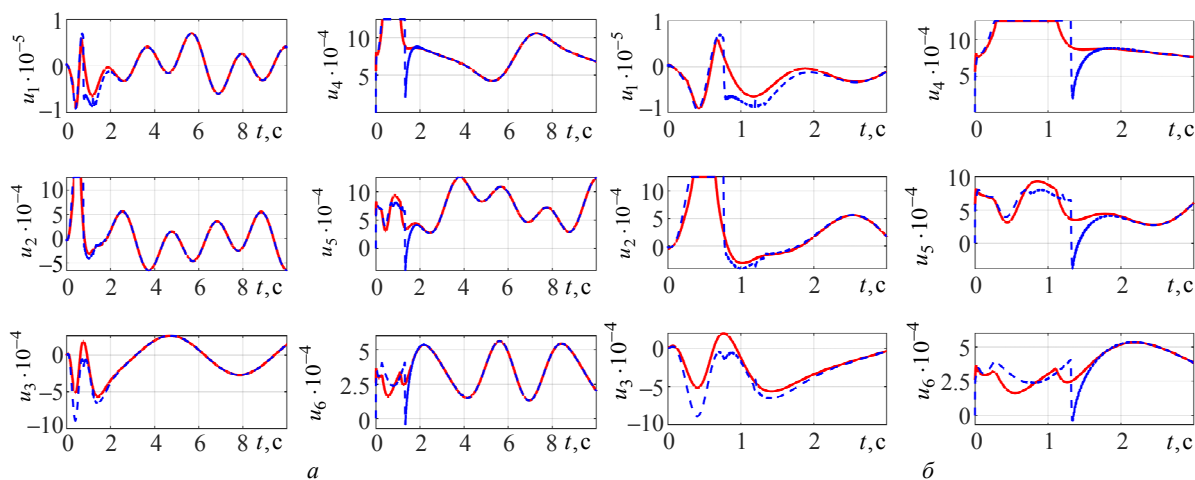


Рис. 2. Управляющие сигналы при заданных постоянных сигналах: а – в полном процессе; б – в начальном процессе

Fig. 2. Control signals with given constant signals: а – in the full process; б – in the initial process

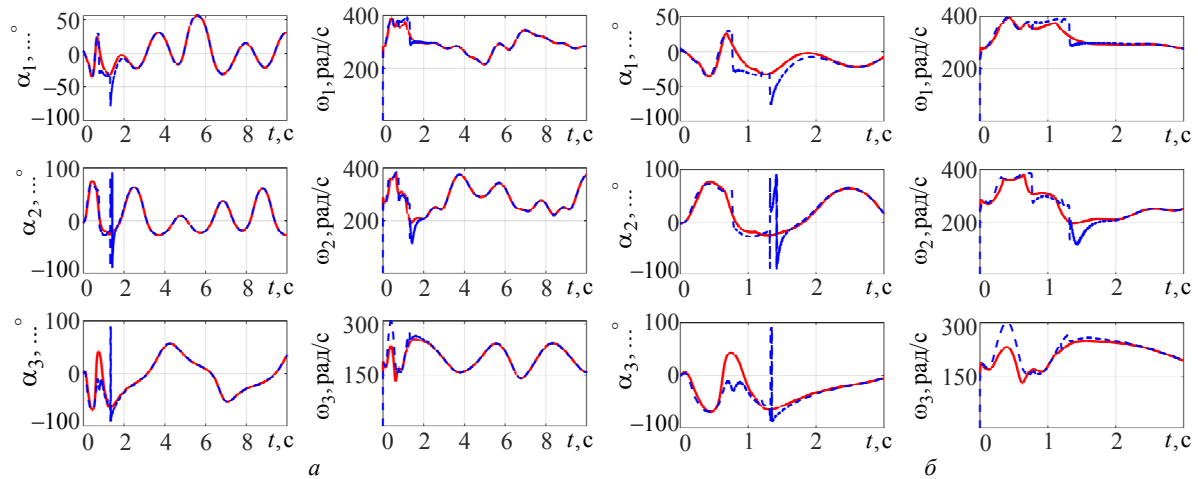


Рис. 3. Скорости вращения и углы наклона несущих винтов трикоптера при заданных постоянных сигналах:

a – в полном процессе; *б* – в начальном процессе

Fig. 3. Rotation speeds and tilt angles of tricopter with given constant signals: *a* – in the full process; *б* – in the initial process

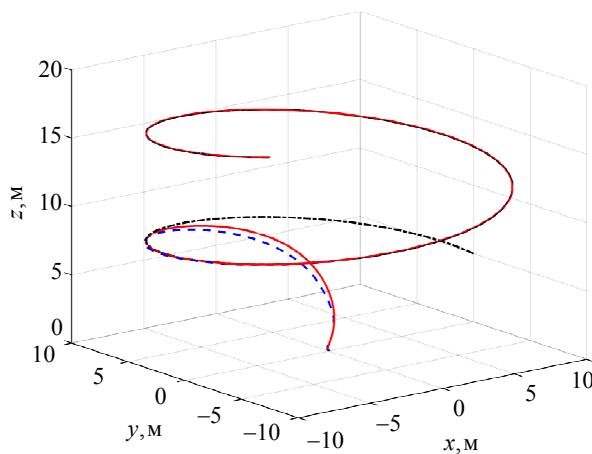


Рис. 4. Движения трикоптера при заданной траектории спиральной формы

Fig. 4. Tricopter movements with given spiral trajectory

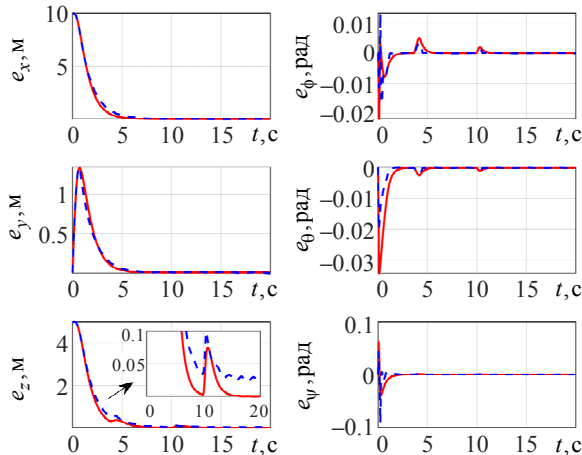


Рис. 5. Ошибки слежения трикоптера при заданной траектории спиральной формы

Fig. 5. Tricopter tracking errors with given spiral trajectory

Как следует из проведенного моделирования (рис. 1–7), оба метода – предложенный в статье новый адаптивный робастный алгоритм и алго-

ритм из [36] – позволяют добиться устойчивого управления даже при одновременном действии указанных негативных факторов. При этом разработанный в статье метод обеспечивает более высокие показатели качества. Указанные свойства алгоритмов подтверждаются следующим анализом:

1. На рис. 1, 4 и 5 видно, что при указанных условиях адаптивный робастный алгоритм с σ -модификацией из [36] обеспечивает ограниченность всех сигналов системы и высокую точность слежения с удержанием ошибки слежения в пределах $0.6 \ll 5\%$ в установившемся режиме. В отличие от этого, предложенный в статье алгоритм с σ -модификацией гарантирует не только ограниченность сигналов, но и сходимость ошибки слежения к нулю, что существенно повышает точность управления.

2. Анализ графиков на рис. 2, 3, 6 и 7 показывает важное преимущество предложенного алгоритма: при ограничениях на управляющие воздействия разработанный метод обеспечивает плавную динамику всех параметров (управляющих сигналов, скоростей вращения и углов наклона винтов) с начального момента переходного процесса. В то же время, в системе с алгоритмом из [36] на начальном этапе управления наблюдаются выраженные скачкообразные изменения указанных характеристик, что снижает ее эффективность при практической реализации по сравнению с предложенным алгоритмом.

Таким образом, проведенные исследования подтверждают значительное превосходство разработанного алгоритма по показателям качества и робастной устойчивости по сравнению с подходом, приведенным в [36]. Достижение таких ре-

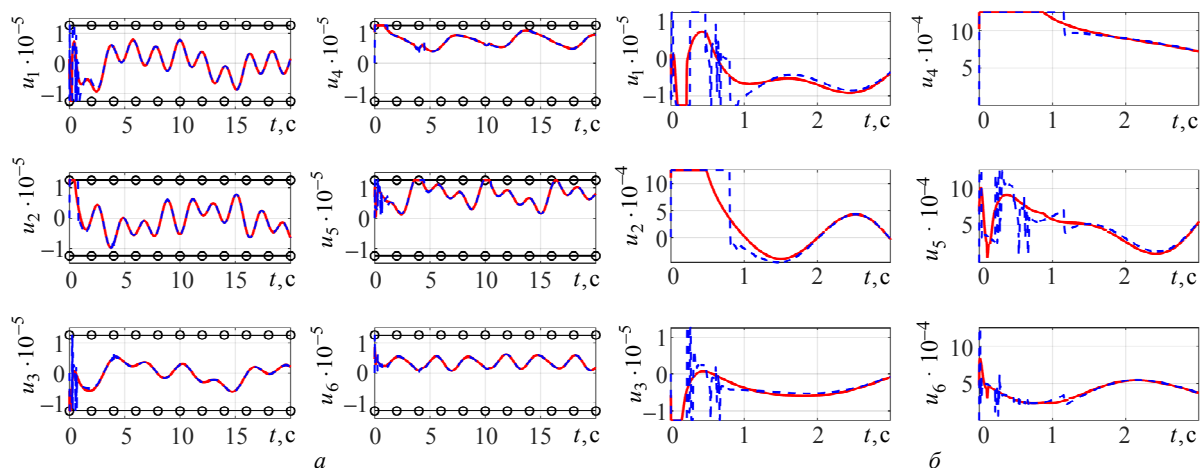


Рис. 6. Управляющие сигналы при заданной траектории спиральной формы:

a – в полном процессе; b – в начальном процессе

Fig. 6. Control signals with given spiral trajectory: a – in the full process; b – in the initial process

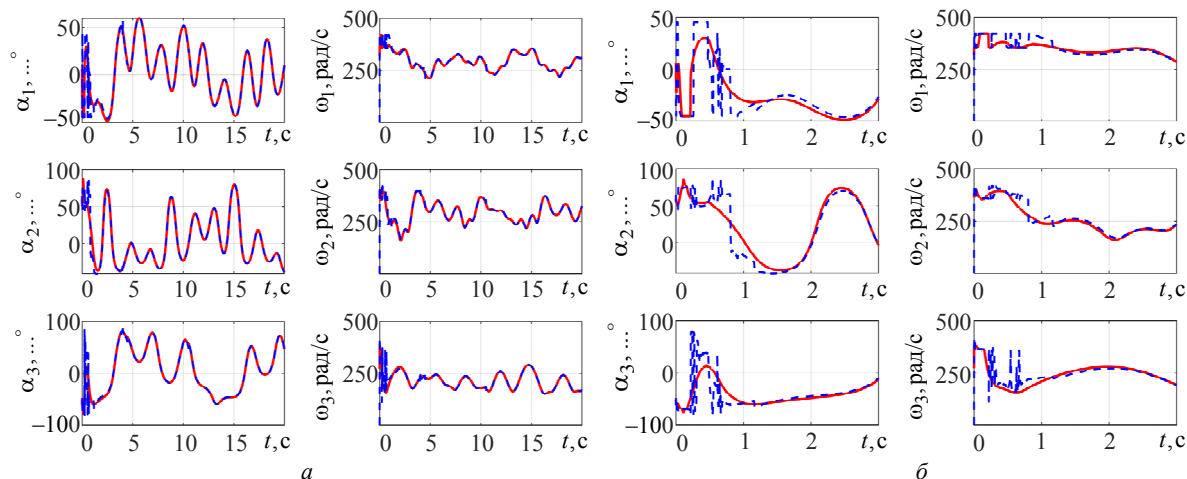


Рис. 7. Скорости вращения и углы наклона несущих винтов трикоптера при заданной траектории спиральной формы:

a – в полном процессе; b – в начальном процессе

Fig. 7. Rotation speeds and tilt angles of tricopter with given spiral trajectory: a – in the full process; b – in the initial process

зультатов обеспечено применением современного метода адаптивного управления – инвариантного погружения. Практическая ценность предложенного метода обусловлена его высокой эффективностью и потенциальной возможностью внедрения в различных высокотехнологичных системах. Широкая область применения делает предложенный алгоритм перспективным решением для актуальных задач автоматизации и управления.

Заключение. Настоящее исследование посвящено разработке адаптивного робастного алгоритма управления СЭМПО. Рассматривается сложный случай, когда система подвергается одновременному воздействию негативных факторов, включая неопределенность математической модели и матрицы управления, амплитудные ограничения управляющих сигналов и неизмеряемые внешние возмущения. В качестве иллю-

стративного примера СЭМПО рассмотрен трикоптер с поворотными винтами, для которого построена полная нелинейная математическая модель. Разработанный алгоритм управления основан на синтезе методов инвариантного погружения и функциональной аппроксимации и включает в себя наблюдатель возмущений, специально предназначенный для компенсации неизмеряемых внешних воздействий. Теоретическое обоснование робастной устойчивости замкнутой системы, проведенное с использованием метода функций Ляпунова, а также сравнительный анализ результатов компьютерного моделирования подтверждают преимущества и работоспособность предложенного адаптивного робастного алгоритма управления при одновременном действии перечисленных негативных факторов. Предложенный новый адаптивный алгоритм робастного управления более

эффективен с точки зрения точности управления и практической реализации, чем рассмотренный в [36] аналог. Следует отметить, что разработанный

алгоритм может быть применим к широкому классу электромеханических систем с лагранжевой динамикой.

Список литературы

1. Extended state observer-based adaptive prescribed performance control for a class of nonlinear systems with full-state constraints and uncertainties / Z. Xu, N. Xie, H. Shen, X. Hu, Q. Liu // *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 105. P. 345–358. doi: 10.1007/s11071-021-06564-3.
2. Chen Y., Tao G., Yao Y. A composite adaptive robust control for pneumatic servo systems with time-varying inertia // *Control Engin. Practice*. 2023. Vol. 137. Art. 105556. P. 1–12. doi: 10.1016/j.conengprac.2023.105556.
3. Wang S., Yu H., Yu J. Robust adaptive tracking control for servo mechanisms with continuous friction compensation // *Control Engin. Practice*. 2019. Vol. 87. P. 76–82. doi: 10.1016/j.conengprac.2019.03.020.
4. Imran I. H., Stolkin R., Montazeri A. Adaptive control of quadrotor unmanned aerial vehicle with time-varying uncertainties // *IEEE Access*. 2023. Vol. 11. P. 19710–19724. doi: 10.1109/ACCESS.2023.3243835.
5. PID/IPD Controller design for electro mechanical systems – A study with PSO, BFO and FA / A. Aishwarya, T. Agalya, S. Nivetha, R. Ramya // *Intern. J. of Engin. and Comp. Sci*. 2017. Vol. 5, no. 4. P. 16252–16259. URL: <https://ijecs.in/index.php/ijecs/article/view/901> (дата обращения: 12.06.2025).
6. LQR control of a 3-DOF helicopter system / M. Nkemdirim, S. Dharan, H. Chaoui, S. Miah // *Intern. J. Dynam. Control*. 2022. Vol. 10. P. 1084–1093. doi: 10.1007/s40435-021-00872-7.
7. Model predictive control for electrical drive systems-an overview / F. Wang, X. Mei, J. Rodriguez, R. Kennel // *CES Transactions on Electr. Machines and Syst*. 2017. Vol. 1, no. 3. P. 219–230. doi: 10.23919/TEMS.2017.8086100.
8. Utkin V., Guldner J., Shi J. *Sliding mode control in electro-mechanical systems* (2nd ed.). Boca Raton, London: CRC Press, 2009. 503 p.
9. Brandtstadter H., Buss M. Control of electro-mechanical systems using sliding mode techniques // *Proc. of the 44th IEEE Conf. on Decision and Control*. Seville, Spain: IEEE, 2005. P. 1947–1952. doi: 10.1109/CDC.2005.1582445.
10. Berrezzek F., Benheniche A. Backstepping based nonlinear sensorless control of induction motor system // *J. Européen des Systèmes Automatisés*. 2021. Vol. 54, no. 3. P. 495–502. doi: 10.18280/jesa.540313.
11. Madani T., Benallegue A. Backstepping control for a quadrotor helicopter // *2006 IEEE/RSJ Intern. Conf. on Intelligent Robots and Syst*. Beijing, China: IEEE, 2006. P. 3255–3260. doi: 10.1109/IROS.2006.282433.
12. Yang F., Yuan Z., Zhang W. Robust adaptive PID control for electromechanical system // *Intern. Conf. on Mechatronics and Automation*. Changchun, China: IEEE, 2009. P. 391–395. doi: 10.1109/ICMA.2009.5245093.
13. Adaptive robust LQR control with the application to the Yaw control of small-scale Helicopter / X. Zhao, Z. Jiang, J. Han, G. Liu // *Intern. Conf. on Mechatronics and Automation*. Luoyang, China: IEEE, 2006. P. 1002–1007. doi: 10.1109/ICMA.2006.257762.
14. Adaptive backstepping control scheme with integral action for quanser 2-dof helicopter / R. Patel, D. Deb, H. Modi, S. Shah // *Intern. Conf. on Advances in Comp., Communications and Informatics (ICACCI)*. Udupi, India: IEEE, 2017. P. 571–577. doi: 10.1109/ICACCI.2017.8125901.
15. Shevidi A., Hashim H. A. Adaptive backstepping and non-singular sliding mode control for quadrotor UAVs with unknown time-varying uncertainties // *Am. Control Conf. (ACC)*. Toronto, ON, Canada: IEEE, 2024. P. 4876–4882. doi: 10.23919/ACC60939.2024.10644494.
16. Astolfi A., Ortega R. Immersion and invariance: A new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems // *IEEE Trans. Automat. Contr*. 2003. Vol. 48, no. 4. P. 590–606. doi: 10.1109/TAC.2003.809820.
17. Astolfi A., Karagiannis D., Ortega R. *Nonlinear and adaptive control with applications*. London: Springer, 2008. 302 p. doi: 10.1007/978-1-84800-066-7.
18. Adaptive immersion and invariance control for a class of electromechanical systems / T. Rabai, C. Mnasri, R. Ben Khaled, M. Gasmi // *Intern. Conf. on Electr. Engin. and Software Appl. Hammamet, Tunisia: IEEE*, 2013. P. 1–6. doi: 10.1109/ICEESA.2013.6578460.
19. Composite adaptive control of uncertain nonlinear systems using immersion and invariance method / Z. Liu, C. Han, R. Yuan, G. Fan, J. Yi. // *IEEE Intern. Conf. on Mechatronics and Automation (ICMA)*. Takamatsu, Japan: IEEE, 2017. P. 1144–1149. doi: 10.1109/ICMA.2017.8015978.
20. Chen W., Hu J., Nie W. Function approximation technique based immersion and invariance control for motor servo system // *2021 40th Chinese Control Conf. (CCC)*. Shanghai, China: IEEE, 2021. P. 479–483. doi: 10.23919/CCC52363.2021.9550328.
21. Han C., Liu Z., Yi J. Immersion and invariance adaptive control with σ -modification for uncertain nonlinear systems // *J. of the Franklin Institute*. 2018. Vol. 355, no. 5. P. 2091–2111. doi: 10.1016/j.jfranklin.2017.12.006.
22. Immersion and invariance adaptive tracking control for robot manipulators with a novel modified scaling factor design / D. Xia, X. Yue, H. Wen, L. Li // *Intern. J. of Adaptive Control and Signal Proc*. 2019. Vol. 34, no. 1. P. 110–125. doi: 10.1002/acs.3072.
23. De Nicolao G., Scattolini R., Sala G. An adaptive predictive regulator with input saturations // *Automatica*. 1996. Vol. 32, no. 4. P. 597–601. doi: 10.1016/0005-1098(95)00166-2.

24. Lavretsky E., Hovakimya N. Positive μ -modification for stable adaptation in the presence of input constraints // Proc. of the 2004 Am. Control Conf. Boston, MA, USA: IEEE, 2004. Vol. 3. P. 2545–2550. doi: 10.23919/ACC.2004.1383848.
25. Karason S. P., Annaswamy A. M. Adaptive control in the presence of input constraints // IEEE Trans. on Automatic Control. 1994. Vol. 39, no. 11. P. 2325–2330. doi: 10.1109/9.333787.
26. Adaptive control-based barrier Lyapunov functions for strict-feedback stochastic nonlinear systems with input saturation and dead zone / Q. Wang, C. Gao, Y. Cui, L. B. Wu // Intern. J. of Syst. Sci. 2022. Vol. 53, no. 15. P. 3165–3176. doi: 10.1080/00207721.2022.2075486.
27. Liu B., Guo Y., Li A. Nussbaum-based finite-time containment control for multi-UAVs with input saturation and velocity constraints // Aerospace Sci. and Technol. 2023. Vol. 139. P. 1–25. doi: 10.1016/j.ast.2023.108407.
28. Ioannou P., Sun J. Robust adaptive control // New Jersey: Prentice Hall, 1996. 825 p.
29. Adaptive robust dynamic surface integral sliding mode control for quadrotor UAVs under parametric uncertainties and external disturbances / Y. Zhang, N. Xu, G. Zhu, L. Sun, S. Cao, X. Zhang // Complexity. 2020. Vol. 2020. P. 1–20. doi: 10.1155/2020/8879364.
30. Active disturbance rejection control for a quadrotor UAV / Z. Wang, D. Huang, T. Huang, N. Qin // IEEE 9th Data Driven Control and Learning Syst. Conf. (DDCLS). Liuzhou, China: IEEE, 2020. P. 1–5. doi: 10.1109/DDCLS49620.2020.9275226.
31. Control of quadcopter drone based on fractional active disturbances rejection control / A. Al-Ali, R. Fareh, S. Sinan, M. Bettayeb // 14th Intern. Conf. on Developments in eSystems Engin. (DeSE). Sharjah, UAE: IEEE, 2021. P. 180–185. doi: 10.1109/DeSE54285.2021.9719407.
32. Disturbance observer-based control: Methods and applications. (1st ed.) / S. Li, J. Yang, W. Chen, X. Chen. Boca Raton: CRC Press, 2014. 340 p.
33. Ginoya D., Shendge P. D., Phadke S. B. Sliding mode control for mismatched uncertain systems using an extended disturbance observer // IEEE Trans. on Industrial Electronics. 2013. Vol. 61, no 4. P. 1983–1992.
34. Robust adaptive tricopter control under parametric uncertainty and external disturbances conditions / V. V. Putov, V. N. Sheludko, Duy K. Nguyen, B. Andrievsky, Iu. Zaitseva // J. Math. in Engin., Sci. and Aerospace (MESA). 2023. Vol. 14, no. 4. P. 1043–1064.
35. Нгуен З. Х., Путов В. В., Шелудько В. Н. Синтез нелинейной и адаптивно-робастной систем со скользящими режимами в управлении динамикой трикоптера с поворотными винтами при действии неизвестных внешних возмущений // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2024. Т. 17, № 5. С. 83–96. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-5-83-96.
36. Нгуен З. Х., Путов В. В., Шелудько В. Н. Синтез адаптивной робастной системы управления трикоптером с поворотными винтами в условиях неопределенных аэродинамических коэффициентов, частично неопределенной матрицы входа, влияния внешних возмущений и ограничения входных воздействий // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2024. Т. 17, № 6. С. 84–98. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-6-84-98.
37. Huang A. C., Wu S. C., Ting W. F. A FAT-based adaptive controller for robot manipulators without regressor matrix: theory and experiments // Robotica. 2006. Vol. 24, no. 2. P. 205–210. doi: 10.1017/S0263574705002031.
38. Khalil H. K. Nonlinear systems. 3rd ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002. 767 p.
39. Abara D., Bhowmick P., Lanzon A. Cooperative control of multi-tilt tricopter drones applying a «Mixed» negative imaginary and strict passivity technique // 2023 Europ. Control Conf. (ECC). Bucharest, Romania: IEEE, 2023. P. 1–6. doi: 10.23919/ECC57647.2023.10178409.

Информация об авторах

Нгуен Зуи Хань – аспирант, ассистент кафедры систем автоматического управления СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: khanhnguyen.mta@gmail.com

Путов Виктор Владимирович – д-р техн. наук, профессор, зам. зав. кафедрой систем автоматического управления по развитию СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: vvputov@mail.ru

Шелудько Виктор Николаевич – д-р техн. наук, профессор кафедры систем автоматического управления, ректор СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: vnsheludko@etu.ru

Доброскок Никита Александрович – канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой систем автоматического управления СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: nadobroskok@etu.ru

Вклад авторов:

Нгуен З. Х. – разработка алгоритма, анализ робастной устойчивости.

Путов В. В. – научное руководство, постановка задачи, итоговые выводы.

Шелудько В. Н. – обзор научных источников, постановка задачи.

Доброскок Н. А. – проведение имитационных экспериментов, анализ результатов.

References

1. Extended state observer-based adaptive prescribed performance control for a class of nonlinear systems with full-state constraints and uncertainties / Z. Xu, N. Xie, H. Shen, X. Hu, Q. Liu // *Nonlinear Dynamics*. 2021. Vol. 105. P. 345–358. doi: 10.1007/s11071-021-06564-3.
2. Chen Y., Tao G., Yao Y. A composite adaptive robust control for pneumatic servo systems with time-varying inertia // *Control Engin. Practice*. 2023. Vol. 137. Art. 105556. P. 1–12. doi: 10.1016/j.conengprac.2023.105556.
3. Wang S., Yu H., Yu J. Robust adaptive tracking control for servo mechanisms with continuous friction compensation // *Control Engin. Practice*. 2019. Vol. 87. P. 76–82. doi: 10.1016/j.conengprac.2019.03.020.
4. Imran I. H., Stolkin R., Montazeri A. Adaptive control of quadrotor unmanned aerial vehicle with time-varying uncertainties // *IEEE Access*. 2023. Vol. 11. P. 19710–19724. doi: 10.1109/ACCESS.2023.3243835.
5. PID/IPD Controller design for electro mechanical systems – A study with PSO, BFO and FA / A. Aishwarya, T. Agalya, S. Nivetha, R. Ramya // *Intern. J. of Engin. and Comp. Sci.* 2017. Vol. 5, no. 4. P. 16252–16259. URL: <https://ijecs.in/index.php/ijecs/article/view/901> (data obrashheniya: 12.06.2025).
6. LQR control of a 3-DOF helicopter system / M. Nkemdirim, S. Dharan, H. Chaoui, S. Miah // *Intern. J. Dynam. Control*. 2022. Vol. 10. P. 1084–1093. doi: 10.1007/s40435-021-00872-7.
7. Model predictive control for electrical drive systems-an overview / F. Wang, X. Mei, J. Rodriguez, R. Kennel // *CES Transactions on Electrical Machines and Systems*. 2017. Vol. 1, no. 3. P. 219–230. doi: 10.23919/TEMS.2017.8086100.
8. Utkin V., Guldner J., Shi J. Sliding mode control in electro-mechanical systems (2nd ed.). Boca Raton, London: CRC Press, 2009. 503 p.
9. Brandtstadter H., Buss M. Control of electro-mechanical systems using sliding mode techniques // *Proc. of the 44th IEEE Conf. on Decision and Control*. Seville, Spain: IEEE, 2005. P. 1947–1952. doi: 10.1109/CDC.2005.1582445.
10. Berrezzek F., Benheniche A. Backstepping based nonlinear sensorless control of induction motor system // *J. Européen des Systèmes Automatisés*. 2021. Vol. 54, no. 3. P. 495–502. doi: 10.18280/jesa.540313.
11. Madani T., Benallegue A. Backstepping control for a quadrotor helicopter // 2006 IEEE/RSJ Intern. Conf. on Intelligent Robots and Syst. Beijing, China: IEEE, 2006. P. 3255–3260. doi: 10.1109/IROS.2006.282433.
12. Yang F., Yuan Z., Zhang W. Robust adaptive PID control for electromechanical system // *Intern. Conf. on Mechatronics and Automation*. Changchun, China: IEEE, 2009. P. 391–395. doi: 10.1109/ICMA.2009.5245093.
13. Adaptive robust LQR control with the application to the Yaw control of small-scale helicopter / X. Zhao, Z. Jiang, J. Han, G. Liu // *Intern. Conf. on Mechatronics and Automation*. Luoyang, China: IEEE, 2006. P. 1002–1007. doi: 10.1109/ICMA.2006.257762.
14. Adaptive backstepping control scheme with integral action for quanser 2-dof helicopter / R. Patel, D. Deb, H. Modi, S. Shah // *Intern. Conf. on Advances in Comp., Communications and Informatics (ICACCI)*. Udupi, India: IEEE, 2017. P. 571–577. doi: 10.1109/ICACCI.2017.8125901.
15. Shevidi A., Hashim H. A. Adaptive backstepping and non-singular sliding mode control for quadrotor UAVs with unknown time-varying uncertainties // *Am. Control Conf. (ACC)*. Toronto, ON, Canada: IEEE, 2024. P. 4876–4882. doi: 10.23919/ACC60939.2024.10644494.
16. Astolfi A., Ortega R. Immersion and invariance: A new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 2003. Vol. 48, no. 4. P. 590–606. doi: 10.1109/TAC.2003.809820.
17. Astolfi A., Karagiannis D., Ortega R. Nonlinear and adaptive control with applications. London: Springer, 2008. 302 p. doi: 10.1007/978-1-84800-066-7.
18. Adaptive immersion and invariance control for a class of electromechanical systems / T. Rabai, C. Mnasri, R. Ben Khaled, M. Gasmi // *Intern. Conf. on Electr. Engin. and Software Appl.* Hammamet, Tunisia: IEEE, 2013. P. 1–6. doi: 10.1109/ICEESA.2013.6578460.
19. Composite adaptive control of uncertain nonlinear systems using immersion and invariance method / Z. Liu, C. Han, R. Yuan, G. Fan, J. Yi. // *IEEE Intern. Conf. on Mechatronics and Automation (ICMA)*. Takamatsu, Japan: IEEE, 2017. P. 1144–1149. doi: 10.1109/ICMA.2017.8015978.
20. Chen W., Hu J., Nie W. Function approximation technique based immersion and invariance control for motor servo system // 2021 40th Chinese Control Conf. (CCC). Shanghai, China: IEEE, 2021. P. 479–483. doi: 10.23919/CCC52363.2021.9550328.
21. Han C., Liu Z., Yi J. Immersion and invariance adaptive control with σ -modification for uncertain nonlinear systems // *J. of the Franklin Institute*. 2018. Vol. 355, no. 5. P. 2091–2111. doi: 10.1016/j.jfranklin.2017.12.006.
22. Immersion and invariance adaptive tracking control for robot manipulators with a novel modified scaling factor design / D. Xia, X. Yue, H. Wen, L. Li // *Intern. J. of Adaptive Control and Signal Proc.* 2019. Vol. 34, no. 1. P. 110–125. doi: 10.1002/acs.3072.

23. De Nicolao G., Scattolini R., Sala G. An adaptive predictive regulator with input saturations // *Automatica*. 1996. Vol. 32, no. 4. P. 597–601. doi: 10.1016/0005-1098(95)00166-2.
24. Lavretsky E., Hovakimya N. Positive μ -modification for stable adaptation in the presence of input constraints // *Proc. of the 2004 Am. Control Conf. Boston, MA, USA: IEEE*, 2004. Vol. 3. P. 2545–2550. doi: 10.23919/ACC.2004.1383848.
25. Karason S. P., Annaswamy A. M. Adaptive control in the presence of input constraints // *IEEE Trans. on Automatic Control*. 1994. Vol. 39, no. 11. P. 2325–2330. doi: 10.1109/9.333787.
26. Adaptive control-based barrier Lyapunov functions for strict-feedback stochastic nonlinear systems with input saturation and dead zone / Q. Wang, C. Gao, Y. Cui, L. B. Wu // *Intern. J. of Syst. Sci.* 2022. Vol. 53, no. 15. P. 3165–3176. doi: 10.1080/00207721.2022.2075486.
27. Liu B., Guo Y., Li A. Nussbaum-based finite-time containment control for multi-UAVs with input saturation and velocity constraints // *Aerospace Sci. and Technol.* 2023. Vol. 139. P. 1–25. doi: 10.1016/j.ast.2023.108407.
28. Ioannou P., Sun J. Robust adaptive control // New Jersey: Prentice Hall, 1996. 825 p.
29. Adaptive robust dynamic surface integral sliding mode control for quadrotor UAVs under parametric uncertainties and external disturbances / Y. Zhang, N. Xu, G. Zhu, L. Sun, S. Cao, X. Zhang // *Complexity*. 2020. Vol. 2020. P. 1–20. doi: 10.1155/2020/8879364.
30. Active disturbance rejection control for a quadrotor UAV / Z. Wang, D. Huang, T. Huang, N. Qin // *IEEE 9th Data Driven Control and Learning Syst. Conf. (DDCLS)*. Liuzhou, China: IEEE, 2020. P. 1–5. doi: 10.1109/DDCLS49620.2020.9275226.
31. Control of quadcopter drone based on fractional active disturbances rejection control / A. Al-Ali, R. Fareh, S. Sinan, M. Bettayeb // *14th Intern. Conf. on Developments in eSystems Eng. (DeSE)*. Sharjah, UAE: IEEE, 2021. P. 180–185. doi: 10.1109/DeSE54285.2021.9719407.
32. Disturbance observer-based control: Methods and Appl. (1st ed.) / S. Li, J. Yang, W. Chen, X. Chen. Boca Raton: CRC Press, 2014. 340 p.
33. Ginoya D., Shendge P. D., Phadke S. B. Sliding mode control for mismatched uncertain systems using an extended disturbance observer // *IEEE Trans. on Industrial Electronics*. 2013. Vol. 61, no 4. P. 1983–1992.
34. Robust adaptive tricopter control under parametric uncertainty and external disturbances conditions / V. V. Putov, V. N. Sheludko, Duy K. Nguyen, B. Andrievsky, Iu. Zaitseva // *J. Math. in Engin., Sci. and Aerospace (MESA)*. 2023. Vol. 14, no. 4. P. 1043–1064.
35. Nguen Z. H., Putov V. V., Shelud'ko V. N. Sintez nelinejnoj i adaptivno-robustnoj sistem so skol'zjashimi rezhimami v upravlenii dinamikoj trikoptera s povorotnymi vintami pri dejstvii neizvestnyh vnesnih vozmushhenij // *Izv. SPbGJeTU «LJeTI»*. 2024. T. 17, № 5. S. 83–96. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-5-83-96. (In Russ.).
36. Nguen Z. H., Putov V. V., Shelud'ko V. N. Sintez adaptivnoj robustnoj sistemy upravlenija trikopterom s povorotnymi vintami v uslovijah neopredelennyh ajerodinamicheskikh koeficientov, chastichno neopredelennoj matricy vhoda, vlijanija vnesnih vozmushhenij i ograničenija vhodnyh vozdejsvij // *Izv. SPbGJeTU «LJeTI»*. 2024. T. 17, № 6. S. 84–98. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-6-84-98. (In Russ.).
37. Huang A. C., Wu S. C., Ting W. F. A FAT-based adaptive controller for robot manipulators without regressor matrix: theory and experiments // *Robotica*. 2006. Vol. 24, no. 2. P. 205–210. doi: 10.1017/S0263574705002031.
38. Khalil H. K. Nonlinear systems. 3rd ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002. 767 p.
39. Abara D., Bhowmick P., Lanzon A. Cooperative control of multi-tilt tricopter drones applying a «Mixed» negative imaginary and strict passivity technique // *2023 European Control Conf. (ECC)*. Bucharest, Romania: IEEE, 2023. P. 1–6. doi: 10.23919/ECC57647.2023.10178409.

Information about the authors

Duy Khanh Nguyen – postgraduate student, Assistant of the Department of Automatic Control Systems, Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: kxanhnguyen.mta@gmail.com

Victor V. Putov – Dr Sci. (Eng.), Professor, Deputy Head of the Department of Automatic Control Systems for Development, Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: vvputov@mail.ru

Victor N. Sheludko – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Department of Automatic Control Systems, Rector of Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: vnsheludko@etu.ru

Nikita A. Dobroskok – Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Head of the Department of Automatic Control Systems, Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: nadobroskok@etu.ru

Author contribution statement:

Nguyen D. K. – algorithm development, robust stability analysis.

Putov V. V. – scientific supervision, problem statement, final conclusions.

Sheludko V. N. – review of scientific sources, problem statement.

Dobroskok N. A. – simulation experiments, analysis of the results.

Статья поступила в редакцию 27.06.2025; принята к публикации после рецензирования 16.07.2025; опубликована онлайн 28.11.2025.

Submitted 27.06.2025; accepted 16.07.2025; published online 28.11.2025.
