

Магнитное поле движущейся заряженной частицы

В. Д. Гончаров

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия
vdgoncharov@rambler.ru

Аннотация. Приводятся результаты исследований распределения магнитного поля движущейся в свободном пространстве с постоянной скоростью заряженной частицы. Показано, что движение заряженной частицы сопровождается изменением во времени вектора электрического смещения, и, как следствие, появлением связанной с частицей области со сложным образом структурированным магнитным полем. Эта область перемещается вместе с частицей. Сумма магнитных полей отдельных движущихся заряженных частиц создает магнитное поле вокруг проводника с током и описывается членом «плотность тока» в первом уравнении Максвелла.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, магнитное поле, движение заряженной частицы

Для цитирования: Гончаров В. Д. Магнитное поле движущейся заряженной частицы // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2024. Т. 17, № 9. С. 71–78. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-9-71-78.

Original article

Magnetic Field of a Moving Charged Particle

V. D. Goncharov

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia
vdgoncharov@rambler.ru

Abstract. This paper presents the results of studying the magnetic field distribution of a charged particle, which moves along freely with constant speed. The motion of such a charged particle is shown to be accompanied with changes in the vector of electric displacement field. This leads to the appearance of an area with a complex structured magnetic field, rigidly attached to the particle. This area is moving along with the particle. The superposition of magnetic fields of moving particles is described by the «current density» term from the first of Maxwell's equations.

Keywords: Maxwell's equations, magnetic field, charged particle motion

For citation: Goncharov V. D. Magnetic Field of a Moving Charged Particle // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2024. Vol. 17, no. 9. P. 71–78. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-9-71-78.

В настоящее время теория Максвелла, краеугольный камень которой представляет собой постулат о взаимодействии электрических и магнитных полей, служит непререкаемой основой электродинамики [1]. Главные отличия теории Максвелла от прежних теоретических положений связаны с появлением в ней принципов близкодействия и неодновременности реакции и воздействия. Согласно этой теории, изменение одного из параметров электромагнитного поля во времени в данной

точке приводит к изменению в непосредственной близости от нее другого параметра в пространстве. Данная теория описывает взаимодействие полей, т. е. она принципиально «полевая». Запишем два основных уравнения Максвелла:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}; \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \end{cases}$$

где \mathbf{H} , \mathbf{J} , \mathbf{E} – векторы напряженности магнитного поля, плотности тока, напряженности электрического поля; $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ – векторы электрического смещения и магнитной индукции; ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Со вторым уравнением Максвелла все предельно ясно: изменение во времени индукции магнитного поля в данной точке пространства связано с пространственным изменением электрического поля в точках, расположенных в непосредственной близости к этой точке. Следствие этой пространственно-временной связи, которая также описывается вторым членом в правой части первого уравнения Максвелла, состоит в том, что электромагнитные процессы протекают во времени (реакция в разных точках пространства появляется через промежутки времени, которые зависят от расстояния до этих точек).

С первым уравнением Максвелла все не так однозначно. Диссонирует первый член в правой части, в котором в явном виде нет взаимодействия полей. С позиции пространственно-временного распределения полей не ясно, как может влиять плотность тока проводимости (движение заряженных частиц) на магнитное поле. Это последний элемент, который не вписывается в Максвелловское представление об электромагнитном поле. Понятие плотности тока явно не полевое, даже если представить его как произведение проводимости на напряженность электрического поля. При этом не ясно, что такое проводимость в случае движения заряженных частиц в свободном пространстве и как изменение плотности тока приведет к мгновенному изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве. Включение «плотности тока» в первое уравнение Максвелла нарушает два главных принципа теории Максвелла: близкодействия и конечности скорости распространения воздействий в пространстве. Попытка разобраться с этими противоречиями была предпринята в [2]. Однако автор разделил магнитное поле реального тока (движения заряженных частиц) и тока смещения, ввел понятие двух магнитных полей (радиального и аксиального), и при этом его математические выкладки вошли в противоречие с известными зависимостями напряженности поля от расстояния до проводника с током. Подобная задача в частотной области для частного случая решалась в [3], [4]. Такая задача также решалась в [5], для того чтобы показать инвариантность решения относительно произвольной точки, потенциал которой равен

нулю. Однако ни одна из этих публикаций не смогла ответить на поставленный вопрос.

Эта статья посвящена попытке разобраться в том, как движение заряженных частиц (плотность тока) формирует напряженность магнитного поля.

Сразу подчеркну, что все материалы в данной статье основаны на уравнениях Максвелла, с единственным допущением, что в первом уравнении член «плотность тока» должен иметь также волновую природу, т. е. должен быть каким-то образом связан со скоростью изменения вектора электрического смещения во времени.

Собственно, плотность тока образуется при движении большого количества заряженных частиц, которые мало взаимодействуют друг с другом, в определенном направлении. Т. е. постоянную плотность тока можно представить в виде произведения плотности заряженных частиц на их заряд и среднюю скорость их направленного движения. Выделим одну из этих заряженных частиц и будем считать, что она движется равномерно и прямолинейно в свободном пространстве со скоростью, значительно меньшей скорости света.

В общем случае распределение напряженности поля движущейся частицы можно определить следующим образом [6]:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon} \left[\frac{\mathbf{e}_r}{R^2} + \frac{R}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{e}_r}{R^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{e}_r}{\partial t^2} \right],$$

где q – заряд, создающий поле; \mathbf{e}_r – единичный вектор, направленный от заряда к точке, где измеряется поле; R – расстояние между этими точками; c – скорость света. В этой формуле учитывается время запаздывания – R/c , необходимое для прохождения со скоростью света электрического поля от места расположения заряда в данный момент времени до точки измерения. В формулу входит и так называемое запаздывающее направление (третий член в правой части).

Введенное допущение о том, что частица движется со скоростью, значительно меньшей скорости света, позволяет ограничиться рассмотрением только первого члена в правой части формулы.

Рассмотрим электромагнитные процессы, связанные с движением этой частицы. Решение задачи будем искать в нормированных величинах. Это позволит избежать работ с исключительно малыми (по геометрии и заряду) и большими (по напряженности электрического поля) величинами при численном анализе результатов и с легкостью

распространить полученные результаты на частицы любых размеров. Для этого будет достаточно умножить полученные значения на соответствующие нормировочные коэффициенты.

Введем нормировочные коэффициенты на расстояния (K_D), время (K_T) и значение заряда (K_Q).

Тогда безразмерные величины, которыми мы в дальнейшем будем оперировать, связаны с реальными величинами следующим образом: $d = d_{\text{real}}/K_D$; $t = t_{\text{real}}/K_T$; $q = q_{\text{real}}/K_Q$.

С помощью введенных коэффициентов нормировки можно также пересчитать реальные значения скорости любой заряженной частицы $v = v_{\text{real}}K_D/K_T$, напряженности МП $H = H_{\text{real}}K_Q/(K_DK_T)$, напряженности электрического поля $E = E_{\text{real}}K_Q/(K_D)^2$ и вектора электрического смещения $\mathbf{D} = D_{\text{real}}K_Q/(K_D)^2$.

Для описания электромагнитных процессов будем использовать цилиндрическую геометрию (r, φ, x). При этом движение частицы осуществляется в направлении оси x (рис. 1).

Вокруг заряженной частицы присутствует электрическое поле. Напряженность этого поля на расстояниях X_1 и R от частицы можно определить по формуле

$$\mathbf{E}_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon(X_1^2 + R^2)}. \quad (1)$$

При движении частицы со скоростью v в направлении x , расстояние от места, где она расположена в данный момент времени, до точки, в которой определяется изменение напряженности электрического поля, $X_1 = (x_0 - vt)$ при $x_1 < x_0$ и $X_1 = vt$ при $x_1 > x_0$ (рис. 1). В результате проекции напряженности электрического поля на координатные оси для интервала $x_1 < x_0$:

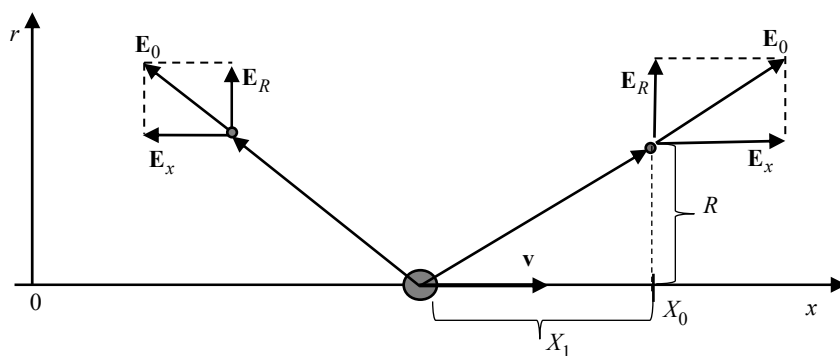


Рис. 1. Изображения векторов напряженности электрического поля в цилиндрической системе координат с движущейся заряженной частицей
Fig. 1. Images of electric field strength vectors in a cylindrical coordinate system with a moving charged particle

$$\begin{cases} \mathbf{E}_x = \mathbf{E}_0 \cos \varphi = \frac{q(x_0 - vt)}{4\pi\epsilon\{[x_0 - vt]^2 + R^2\}^{3/2}}; \\ \mathbf{E}_R = \mathbf{E}_0 \sin \varphi = \frac{qR}{4\pi\epsilon\{[x_0 - vt]^2 + R^2\}^{3/2}}. \end{cases} \quad (2)$$

Проекции напряженности электрического поля на координатные оси для интервала $x_1 > x_0$:

$$\begin{cases} \mathbf{E}_x = \mathbf{E}_0 \cos \varphi = \frac{q(vt)}{4\pi\epsilon[(vt)^2 + R^2]^{3/2}}; \\ \mathbf{E}_R = \mathbf{E}_0 \sin \varphi = \frac{qR}{4\pi\epsilon[(vt)^2 + R^2]^{3/2}}. \end{cases} \quad (3)$$

Проекции напряженности электрического поля, которые описываются данными выражениями, симметричны относительно плоскости, перпендикулярной направлению движения и проходящей через место расположения частицы. Это дает возможность при дальнейших исследованиях пользоваться только выражением (3).

Обозначим коэффициент, который присутствует во всех выражениях (1):

$$K = \frac{q}{4\pi\epsilon}. \quad (4)$$

На рис. 2 приведены зависимости от координаты x , нормированные на коэффициент K (4), проекции вектора напряженности электрического поля \mathbf{E}_R (кривая 1) и \mathbf{E}_x (кривая 2) на ось Ox на расстоянии $R = 1$ при $v = 1$. Напряженности электрического поля за геометрической границей частицы убывают обратно пропорционально квадрату расстояния. В плоскости, которая проходит через место расположения частицы (на рис. 2 это

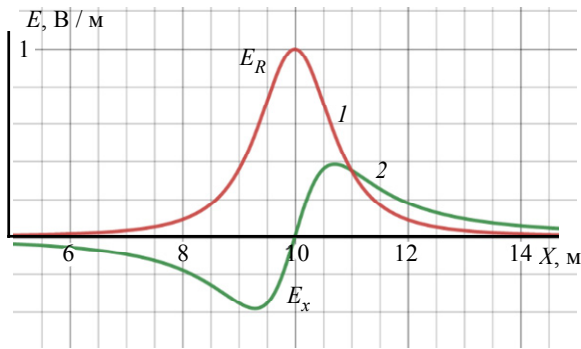


Рис. 2. Зависимости от координаты x нормированных значений проекций напряженности электрического поля. Приведены распределения на расстоянии от центра частицы $R = 1$ м при скорости $v = 1$ м/с
Fig. 2. Dependencies of projections of electric field strength normalized by the K coefficient on the x coordinate. Distributions are given at a distance from the center of the particle $R = 1$ m at a velocity $v = 1$ m/s

$x = 10$) перпендикулярно направлению ее движения (рис. 1), E_x меняет знак (меняется направление вектора), а E_R имеет максимум.

Прямолинейное движение заряженной частицы с постоянной скоростью приводит к изменению значений и направления вектора напряженности электрического поля во времени. Взяв частную производную по времени проекций вектора напряженности электрического поля, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{Kv[R^2 - 2(vt)^2]}{[(vt)^2 + R^2]^{5/2}}, \\ \frac{\partial E_R}{\partial t} = \frac{-Kv^3R(vt)}{[(vt)^2 + R^2]^{5/2}}. \end{cases}$$

На рис. 3 приведены зависимости от координаты x нормированных на коэффициент K производных по времени от проекций напряженности электрического поля $\partial E_x/\partial t$ (кривая 1) и $\partial E_R/\partial t$ (кривая 2) на расстоянии $R = 1$ при $V = 1$.

Запишем первое уравнение Максвелла без члена, связанного с плотностью тока с учетом выражений (2) для скорости изменения напряженности электрического поля:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon K v (R^2 - 2x^2)}{(x^2 + R^2)^{5/2}} \mathbf{e}_R - \frac{\varepsilon K v^3 R x}{(x^2 + R^2)^{5/2}} \mathbf{e}_x.$$

Радиальная ($\text{rot}_R H$) и аксиальная ($\text{rot}_x H$) проекции ротора H вследствие осевой симметрии описывается изменением в пространстве только одной компоненты H_φ :

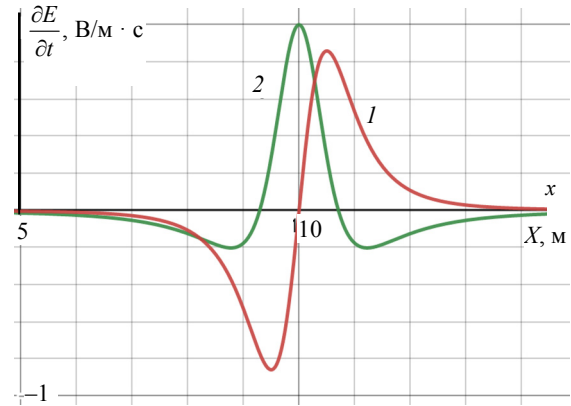


Рис. 3. Зависимости от координаты x нормированных значений производных по времени от проекций напряженности электрического поля. Приведены распределения на расстоянии от центра частицы $R = 1$ м при скорости $v = 1$ м/с

Fig. 3. Dependencies of the time derivatives normalized by the coefficient K from the projections of the electric field strength on the x coordinate. Distributions are given at a distance from the center of the particle $R = 1$ m at a velocity $v = 1$ m/s

$$\begin{cases} \text{rot}_R H = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial H_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial H_\varphi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial H_\varphi}{\partial x} \mathbf{e}_R; \\ \text{rot}_x H = \left(\frac{1}{R} \frac{\partial (RH_\varphi)}{\partial R} - \frac{\partial H_R}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{R} \frac{\partial (RH_\varphi)}{\partial R} \mathbf{e}_x. \end{cases}$$

В свою очередь эти проекции определяются изменением по времени соответствующих проекций вектора смещения:

$$\begin{cases} \text{rot}_R H = \varepsilon \frac{\partial E_R}{\partial t}; \\ \text{rot}_x H = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t}. \end{cases}$$

В общем случае определение компонент вихревого МП – это нестационарная задача, и появление H_φ запаздывает относительно того момента, когда произошло перемещение частицы, которое вызывает изменение напряженности электрического поля во времени. Однако при скоростях движения, значительно меньших скорости света в свободном пространстве, это запаздывание можно не учитывать (оно начинает сказываться в удаленных на значительные расстояния от частицы в областях, где H_φ практически равна нулю). В результате можно считать, что напряженность магнитного поля не зависит от времени.

Таким образом, напряженность магнитного поля будет иметь только одну пространственную компоненту, которую можно будет определить, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_\varphi}{\partial x} = \frac{\varepsilon K v (R^2 - 2x^2)}{(x^2 + R^2)^{5/2}}; \\ \frac{1}{R} \frac{\partial (RH_\varphi)}{\partial R} = -\frac{\varepsilon K v^3 R x}{(x^2 + R^2)^{5/2}}. \end{cases} \quad (5)$$

Определение вектора по известному закону изменения его ротора исключительно сложная задача, которая решалась, например, в [7]. В данном случае совместное решение дифференциальных уравнений (5) позволяет определить вектор напряженности

магнитного поля, значение которого в каждой точке пространства можно найти из формулы

$$H_\varphi(R, x) = \frac{\varepsilon K v R}{(x^2 + R^2)^{3/2}}. \quad (6)$$

На рис. 4, а–г приведено графическое (3D) представление результатов расчета нормированных значений касательной составляющей напряженности магнитного поля, окружающего движущуюся со скоростью $v = 1$ заряженную части-

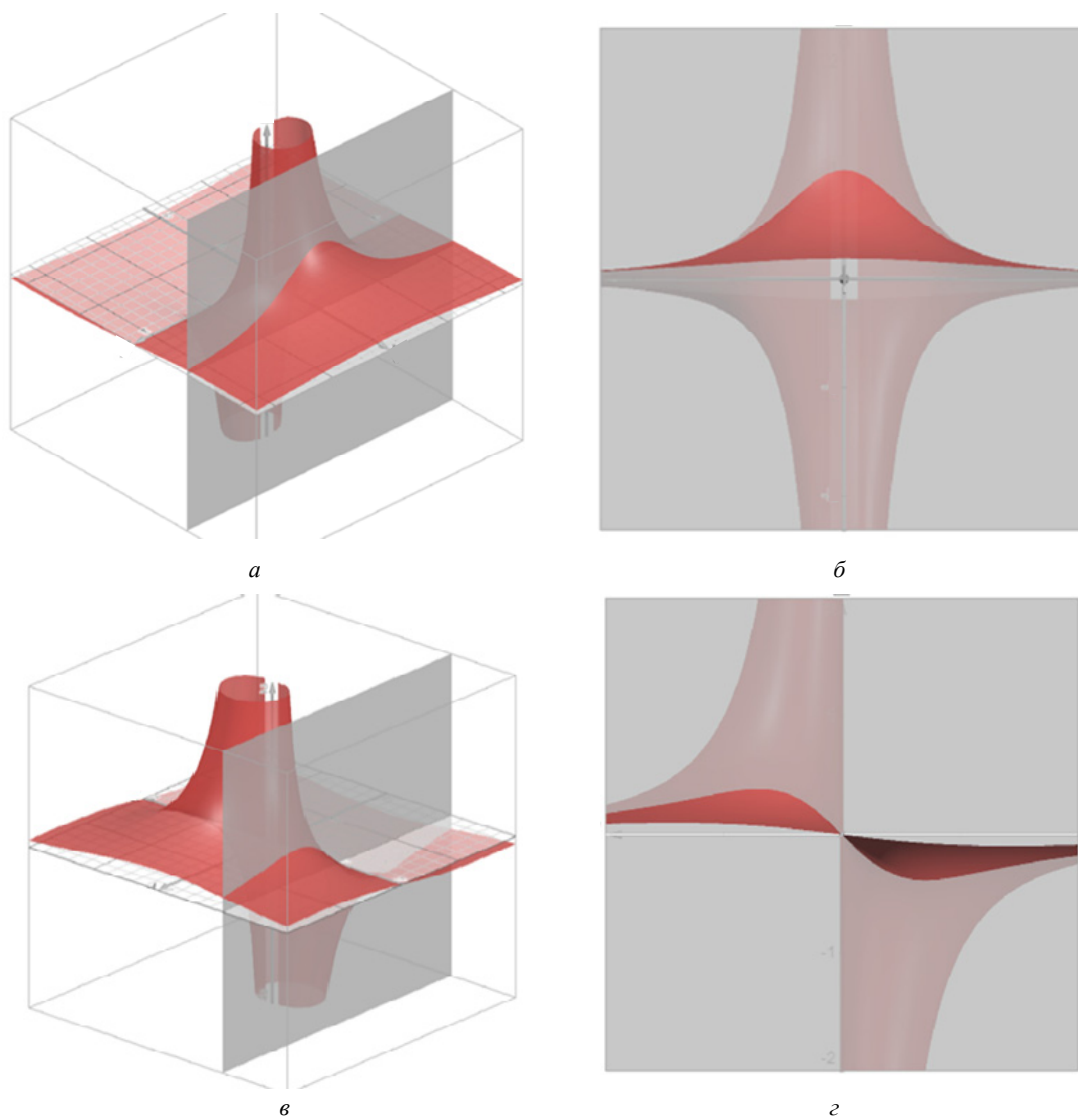


Рис. 4. Результаты расчета пространственного распределения нормированных значений касательной составляющей напряженности магнитного поля H_φ и сечения плоскостью, расположенной на расстоянии от частицы $R = 1$ м (а) и $x = 1$ м (б); сечение пространственного распределения нормированных значений касательной составляющей напряженности магнитного поля H_φ плоскостью, расположенной на расстоянии от частицы $R = 1$ м (б) и $x = 1$ м (г)

Fig. 4. Calculation of the spatial distribution of the normalized values of the tangent component of the magnetic field strength H_φ and the cross section by a plane located at a distance from the particle $R = 1$ m (a) and $x = 1$ m (б); cross section of the spatial distribution of the normalized values of the tangent component of the magnetic field strength H_φ by a plane located at a distance from the particle $R = 1$ m (б) and $x = 1$ m (г)

цу, центр которой расположен в начале координат. Отдельно приведены сечения полученного трехмерного распределения H_ϕ плоскостями, расположенными на расстоянии от частицы $R = 1$ (рис. 4, а) и $x = 1$ (рис. 4, в). На рис. 4, б приведена зависимость $H_\phi(x)$ на расстоянии от частицы $R = 1$ («вид сбоку»). На рис. 4, г приведена зависимость $H_\phi(R)$ на расстоянии от частицы $x = 1$ («вид спереди»).

Полученная формула (5) свидетельствует о том, что:

- магнитное поле движущейся частицы имеет только одну касательную составляющую H_ϕ ;
- напряженность магнитного поля в непосредственной близости от частицы равна нулю, т. е. распределение H_ϕ таково, что магнитное поле не влияет на направление прямолинейного равномерного движения частицы;
- от скорости движения заряженной частицы зависят значения H_ϕ , при этом общий вид распределения функции остается таким же;
- касательная составляющая изменяется не только по радиусу в плоскости, перпендикулярной направлению движения частицы (рис. 4, в) и проходящей через саму частицу (что предсказывал бы член «плотность тока» в первом уравнении Максвелла), но и в направлении движения этой частицы (спереди и сзади от нее). Магнитное поле в направлении движения частицы быстро уменьшается (рис. 4, г).

Значение касательной составляющей H в зависимости от R можно получить, взяв интеграл по x от функции $H_\phi(R, x)$ (6) в пределах от $-\infty$ до $+\infty$. Значение этого интеграла дает хорошо известное выражение для определения зависимости касательной компоненты напряженности магнитного поля в цилиндрической геометрии H_ϕ от тока (направленного движения заряженной частицы $-qv$) и радиуса:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon K v R dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{2\varepsilon K v}{R} = \frac{2qv}{4\pi R} = \frac{I}{2\pi R}.$$

Легко проверить, что, взяв интеграл по R от функции $H_\phi(R, x)$ (6) в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получим ноль, т. е. спереди и сзади от частицы магнитное поле на значительном расстоянии от нее стремится к нулю. В случае, если магнитное поле создается числом n заряженных частиц, которые движутся по проводнику со средней скоростью; результаты, получаемые с помощью предложен-

ного подхода, полностью совпадают с результатами, полученными с помощью закона полного тока. Таким образом можно считать, что «носителем» магнитного поля служит не какая-то абстрактная плотность тока, а каждая из заряженных частиц, движение которых приводит к появлению этой плотности тока.

В первом уравнении Максвелла составляющую магнитного поля, которая связана с членом, описывающим протекание тока, можно трактовать как сумму отдельных магнитных полей каждой движущейся частицы. При этом каждое отдельное магнитное поле частицы связано с изменением в пространстве-времени вектора электрического смещения, т. е. имеет полевую природу.

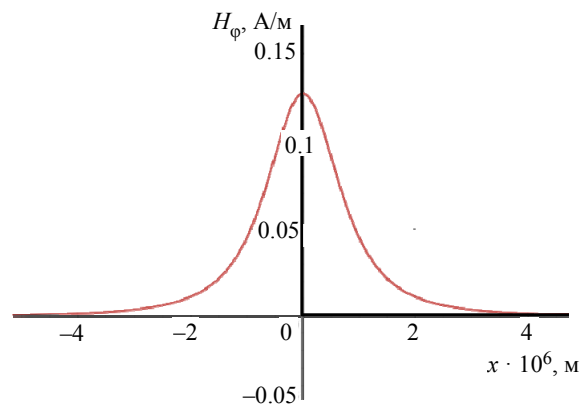


Рис. 5. Зависимость от x распределения напряженности магнитного поля на расстоянии $d_{\text{real}} = 10^{-6}$ м от электрона, движущегося с постоянной скоростью $v_{\text{real}} = 10^6$ м/с
Fig. 5. Dependence of the magnetic field strength at a distance $d_{\text{real}} = 10^{-6}$ m from an electron moving at a constant velocity $v_{\text{real}} = 10^6$ m/s on the x distribution

В качестве примера на рис. 5 приведена зависимость от x распределения напряженности магнитного поля на расстоянии 10^{-6} м от электрона, движущегося с постоянной скоростью 10^6 м/с. Результат приведен для момента времени, когда частица находится в начале координат $x = 0$.

P. S. Вокруг потока частиц, каждая из которых имеет массу, образуется постоянное гравитационное поле. Однако никто не сомневается, что это поле создано полями каждой из частиц данного потока. В этой статье представлена подобная картина создания внешнего магнитного поля суммой магнитных полей, движущихся по проводнику заряженных частиц.

Заключение. В данной статье приведены результаты исследований распределения магнитно-

го поля движущейся в свободном пространстве с постоянной скоростью заряженной частицы. Показано, что вокруг заряженной частицы существует область с магнитным полем, которая перемещается вместе с частицей. Совокупность магнитных полей отдельных движущихся в проводнике заряженных частиц создают магнитное поле этого проводника.

Выводы.

1. Вокруг каждой заряженной частицы при ее прямолинейном равномерном движении существует область с напряженностью магнитного поля

2. Магнитное поле движущейся частицы имеет только касательную составляющую, которая

распределена не только перпендикулярно движению частицы, но и в направлении ее движения.

3. Магнитное поле жестко связано с частицей и перемещается вместе с ней в пространстве.

4. Ток есть движение заряженных частиц, каждая из которых окружена собственным магнитным полем. Общее магнитное поле тока можно представить, как сумму магнитных полей отдельных заряженных частиц

5. Сумма магнитных полей движущихся частиц создает напряженность магнитного поля, которая описывается членом «плотность тока» в правой части первого уравнения Максвелла, который в этом случае имеет также полевую природу.

Список литературы

1. Шимони К. Теоретическая электротехника / пер. с нем. К. М. Поливанова. М.: Мир, 1964. 773 с.
2. Николаев Г. В. Электродинамика физического вакуума. Новые концепции физического мира. Томск: изд-во НТЛ, 2004. 700 с.
3. Giri D. V., Tesche F. M., Morgan M. A. Velocity gauge potentials in electrodynamics. 2022. 11 p. doi: 10.48550/arXiv.2201.11789.
4. Giri D. V., Tesche F. M., Morgan M. A. Uniqueness of Electromagnetic Fields Using VelocityDependent Gauge Potentials // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2023. Vol. 71, iss. 4. P. 3741–3745. doi: 10.1109/TAP.2023.3247134.

5. Jackson J. D. From Lorenz to Coulomb and other explicit gauge transformations // Am. J. Phys. 2002. № 70(9). P. 917–928. doi: 10.1119/1.1491265.
6. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 3: Излучение. Волны. Кванты / пер. с англ. 4-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2004. 236 с.
7. Berselli L. C., Longo P. Classical solutions for the system $\text{curl } v = g$, with vanishing Dirichlet boundary conditions // Discrete and Continuous Dynamical Systems – Ser. S. 2019. Vol. 12, iss. 2. P. 215–229. doi: 10.3934/dcdss.2019015.

Информация об авторе

Гончаров Вадим Дмитриевич – д-р техн. наук, профессор кафедры теоретических основ электротехники СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: vdgoncharov@rambler.ru

<https://orcid.org/0000-0001-6627-4723>

References

1. Shimoni K. Teoreticheskaia jelektrotehnika / per. s nem. K. M. Polivanova. M.: Mir, 1964. 773 s. (In Russ.).
2. Nikolaev G. V. Jelektrodinamika fizicheskogo vakuuma. Novye koncepcii fizicheskogo mira. Tomsk: izd-vo NTL, 2004. 700 s. (In Russ.).
3. Giri D. V., Tesche F. M., Morgan M. A. Velocity gauge potentials in electrodynamics. 2022. 11 p. doi: 10.48550/arXiv.2201.11789.
4. Giri D. V., Tesche F. M., Morgan M. A. Uniqueness of Electromagnetic Fields Using VelocityDependent Gauge Potentials // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 2023. Vol. 71, iss. 4. P. 3741–3745. doi: 10.1109/TAP.2023.3247134.

5. Jackson J. D. From Lorenz to Coulomb and other explicit gauge transformations // Am. J. Phys. 2002. № 70(9). P. 917–928. doi: 10.1119/1.1491265.
6. Fejnman R., Lejton R., Sjends M. Fejnmanovskie lekcii po fizike. T. 3: Izluchenie. Volny. Kvanty / per. s angl. 4-e izd. M.: Jeditorial URSS, 2004. 236 s. (In Russ.).
7. Berselli L. C., Longo P. Classical solutions for the system $\text{curl } v = g$, with vanishing Dirichlet boundary conditions // Discrete and Continuous Dynamical Systems – Ser. S. 2019. Vol. 12, iss. 2. P. 215–229. doi: 10.3934/dcdss.2019015.

Information about the author

Vadim D. Goncharov – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Department of Theoretical Foundations of Electrical Engineering, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: vdgoncharov@rambler.ru

<https://orcid.org/0000-0001-6627-4723>

Статья поступила в редакцию 28.05.2024; принята к публикации после рецензирования 16.06.2024; опубликована онлайн 25.11.2024.

Submitted 28.05.2024; accepted 16.06.2024; published online 25.11.2024.
