

Метод составного осциллятора для изгибных колебаний

В. М. Цаплев^{1✉}, Р. С. Коновалов^{1,2}, С. И. Коновалов¹, А. Д. Соловьева¹

¹ Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

² Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Санкт-Петербург, Россия

✉ valery@convergences-fr.ru

Аннотация.

Цель работы: Разработка метода измерения упругих и пьезоэлектрических параметров пьезоэлектрических материалов в области частот от нескольких герц до нескольких килогерц.

Материалы и методы: Объект исследований – пленочные полимерные пьезоэлектрические материалы типа ПВДФ. В данном методе исследования использовался составной осциллятор, представляющий собой биморфную консоль, содержащую пьезоэлемент. Консоль совершает изгибные колебания.

Результаты: Получены соотношения, аналогичные продольному составному осциллятору, позволяющие вычислить частоту основного резонанса первой моды колебаний исследуемой пластины по данным измерений основной частоты эталонной пластины и всего биморфа в целом.

Заключение: Полученные результаты предназначены для исследования свойств материалов в низкочастотном диапазоне.

Ключевые слова: пьезополимеры, биморфная консоль, составной осциллятор, изгибные колебания, модули упругости, пьезомодули

Для цитирования: Метод составного осциллятора для изгибных колебаний / В. М. Цаплев, Р. С. Коновалов, С. И. Коновалов, А. Д. Соловьева // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2024. Т. 17, № 9. С. 5–11. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-9-5-11.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

The Complex Oscillator Method for Bending Vibrations

V. M. Tsaplev^{1✉}, R. S. Konovalov^{1,2}, S. I. Konovalov¹, A. D. Soloveva¹

¹ Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

² Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, Saint Petersburg, Russia

✉ valery@convergences-fr.ru

Abstract.

Purpose of the work: Development of a method for measuring the elastic and piezoelectric properties of piezoelectric materials over the frequency range of several hertz to several kilohertz.

Materials and methods: The object of the research is film-polymer piezoelectric materials of the PVDF type. A composite oscillator is used as a method of investigation, which consists of a bimorph cantilever piezoelectric element that performs bending vibrations.

Results: Calculated ratios similar to those for a longitudinal complex oscillator have been obtained, allowing the resonant frequency of the main mode of vibration of the studied plate to be calculated from the frequencies of a reference plate and a bimorph as a whole.

Conclusion: The results obtained are intended to study the properties of materials in the low-frequency range.

Keywords: piezoelectric polymers, bimorph console, complex oscillator, bending vibrations, elastic moduli, piezomoduli

For citation: The Complex Oscillator Method for Bending Vibrations / V. M. Tsaplev, R. S. Konovalov, S. I. Konovalov, A. D. Soloveva// LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2024. Vol. 17, no. 9. P. 5–11. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-9-5-11.

Conflict of interest. The authors declare no conflicts of interest.

Введение. В последнее время появились многочисленные теоретические и экспериментальные публикации, посвященные разработке и созданию пьезоэлектрических генераторов для малогабаритных устройств [1], [2]. Особое место занимают публикации, посвященные исследованию устройств, в которых применяются пьезополимеры типа ПВДФ (поливинилиденфторид). Однако исследование упругих и пьезоэлектрических постоянных подобных материалов связано со значительными трудностями [3], [4]. Эти трудности обусловлены тем, что пьезогенераторы, в которых применяются эти материалы, работают в большинстве своем на низких звуковых или инфразвуковых частотах, т. е. на частотах порядка единиц или десятков герц, и меньших, вплоть до долей герц. Поэтому и предварительные измерения свойств пьезополимеров предпочтительно выполнять в этом же диапазоне частот. Традиционные ультразвуковые методы, хорошо отработанные, обладающие высокой точностью и описанные в многочисленной литературе [5], здесь не очень хорошо подходят – прежде всего, ввиду чрезвычайно малой толщины пьезополимерной пленки по сравнению с длиной волны ультразвука при измерениях. Кроме того, скорость упругих волн в полимерах обладает весьма высокой дисперсией, и поэтому результаты измерений модулей упругости, полученные ультразвуковыми методами, будут очень сильно отличаться от действительных значений. Более адекватны для этих целей методы изгибных низкочастотных колебаний, среди которых выделяется метод Дж. Томпсона [6], предложенный автором для исследования образцов в виде тонкой полосы. Первоначально метод был предложен для исследования металлических образцов. Измерительная установка содержала маятник с инерционной рамой-коромыслом, центр тяжести которого можно регулировать. У такого маятника возможны колебания двух видов – низкочастотные с

частотой около 1 Гц и высокочастотные. Вопросы измерения динамических модулей упругости полимеров в режиме изгибных резонансных колебаний рассматривались в [6].

Однако резонансные методы применительно к исследованию упругих и пьезоэлектрических свойств полимеров обладают недостаточно высокой точностью. Это объясняется низкой добротностью образцов, поскольку полимерам свойственно высокое затухание колебаний. Резонансная кривая получается достаточно широкой, и точно настроиться на максимум амплитуды колебаний достаточно трудно. Здесь может быть адекватен метод составного осциллятора, первоначально разработанный Дж. Марксом [7]. Он нашел разнообразное применение для широкого спектра материалов. Для исследования сильно поглощающих материалов, к которым можно отнести полимеры, метод был усовершенствован В. М. Меркуловой [8], а для нелинейных исследований пьезоэлектрических материалов – В. М. Цаплевым [9]. Метод составного осциллятора применялся для исследования стержневых образцов в диапазоне частот 20–250 кГц. В настоящей статье рассматривается метод составного осциллятора применительно к изгибным колебаниям в диапазоне частот 1–1000 Гц.

Основные соотношения. Рассмотрим биморфную консольную балку, один слой которой представляет собой пьезоэлектрическую пластину 1, а другой – пассивную пластину из исследуемого материала 2 (см. рисунок).

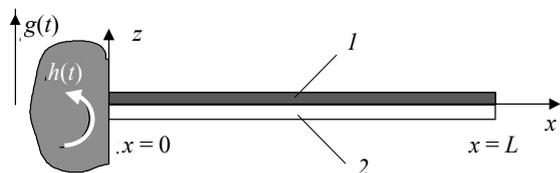
Один конец консоли при $x = 0$ будем считать заземленным, другой – полностью свободным при $x = L$. Будем считать, что толщина достаточно мала по сравнению с длиной консоли. В этом случае можно пренебречь влияниями деформации сдвига и инерции вращения [10]. Балка Эйлера–Бернулли (см. рисунок) подвергается в точке $x = 0$ смещению базы $g(t)$ в поперечном направлении и

небольшому кручению $h(t)$. Будем считать, что деформации малы и что материалы обладают линейно-упругими свойствами.

Поперечное смещение балки в произвольной точке x в момент времени t вдоль нейтральной оси обозначим как $w(x, t)$. В отсутствие демпфирования уравнение свободных колебаний однородной балки в неподвижной системе координат можно записать как [10]

$$YI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial t^4} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

где YI – изгибная жесткость (выражается через модули упругости и геометрические параметры поперечных сечений слоев); Y – модуль Юнга, а m – масса единицы длины балки.



Конфигурация консоли
Console configuration

Для двухслойной балки изгибная жесткость будет равна сумме изгибных жесткостей слоев, поэтому уравнение (1) переписывается таким образом:

$$\left(Y_1 \frac{h_1^3}{3} + Y_2 \frac{h_2^3}{3} \right) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + (h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где Y_1 – модуль Юнга материала пьезоэлектрического слоя; h_1 – его толщина; ρ_1 – плотность; Y_2, h_2, ρ_2 – те же параметры второго (пассивного) слоя.

С учетом затухания уравнение движения балки (2) будет иметь вид [11]

$$\left(Y_1 \frac{h_1^3}{3} + Y_2 \frac{h_2^3}{3} \right) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + r_{\text{вн}} \left(\frac{h_1^3}{3} + \frac{h_2^3}{3} \right) \frac{\partial^5 w(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + r_{\text{возд}} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + (h_1 \rho_1 + h_2 \rho_2) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

где $r_{\text{вн}}$ – коэффициент внутреннего трения материала (для композитной структуры его можно записать в форме эффективного члена $r_{\text{вн}} I$), а $r_{\text{возд}}$ – вязкость воздуха. Прочие возможные механизмы демпфирования здесь не рассматриваются. Их можно учесть при экспериментальных

измерениях. Считаем в первом приближении, что коэффициент внутреннего трения (т. е. затухание Рэлея) пропорционален жесткости и массе.

Абсолютное поперечное перемещение балки (т. е. смещение в поперечном направлении в неподвижной системе координат) запишем так [10]:

$$w(x, t) = w_{\text{б}}(x, t) + w_{\text{отн}}(x, t), \quad (4)$$

где $w_{\text{отн}}(x, t)$ – поперечное смещение относительно зажатого конца балки; $w_{\text{б}}(x, t)$ – смещение базы, которое определяется следующим образом:

$$w_{\text{б}}(x, t) = \delta_1(x)g(t) + \delta_2(x)h(t), \quad (5)$$

где $\delta_1(x)$ и $\delta_2(x)$ – функции, зависящие от смещения базы и угла поворота базы, соответственно. Для консоли можно принять $\delta_1(x) = 1$ и $\delta_2(x) = x$ [10]. Тогда, с учетом (4) и (5), уравнение (3) примет вид

$$\begin{aligned} & \left(Y_1 \frac{h_1^3}{3} + Y_2 \frac{h_2^3}{3} \right) \frac{\partial^4 w_{\text{отн}}(x, t)}{\partial x^4} + \\ & + r_{\text{вн}} \left(\frac{h_1^3}{3} + \frac{h_2^3}{3} \right) \frac{\partial^5 w_{\text{отн}}(x, t)}{\partial x^4 \partial t} + \\ & + r_{\text{возд}} \frac{\partial w_{\text{отн}}(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w_{\text{отн}}(x, t)}{\partial t^2} = \\ & = -m \frac{\partial^2 w_{\text{б}}(x, t)}{\partial t^2} - r_{\text{возд}} \frac{\partial w_{\text{б}}(x, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для получения соотношений составного осциллятора достаточно получить уравнение для первой собственной частоты, т. е. решить однородное уравнение. В первом приближении будем рассматривать колебания консоли без затухания. Колебания базы также можно исключить, т. е. $w_{\text{отн}}(x, t) = w(x, t)$. Окончательно из (6) имеем:

$$\left(Y_1 \frac{h_1^3}{3} + Y_2 \frac{h_2^3}{3} \right) \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (7)$$

Граничные условия для консольно-закрепленной балки выглядят следующим образом:

1) при $x = 0$

$$w(x, t) = 0; \quad \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (8)$$

2) при $x = L$

$$\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial x^3} = 0. \quad (9)$$

Разделим переменную $w(x, t)$ на пространственную $\varphi(x)$ и временную $\eta(t)$ составляющие:
 $w(x, t) = \varphi(x)\eta(t)$, и подставив в (7), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(Y_1 \frac{h_1^3}{3} + Y_2 \frac{h_2^3}{3} \right)}{m} \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\partial^4 \varphi(x)}{\partial x^4} = \\ & = - \frac{1}{\eta(t)} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial t^2} = \omega^2. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем два уравнения:

$$\frac{\partial^4 \varphi(x)}{\partial x^4} - \omega^2 \frac{m}{(Y_1 I_1 + Y_2 I_2)} \varphi(x) = 0. \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial t^2} + \omega^2 \eta(t) = 0, \quad (11)$$

где (11) представляет собой обычное уравнение свободных незатухающих колебаний. Его решение – гармоническая колебательная функция

$$\eta(t) = E \cos(\omega t) + F \sin(\omega t). \quad (12)$$

Решение уравнения (10) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & A \cos\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + B \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + \\ & + C \sin\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + D \operatorname{sh}\left(\frac{\lambda x}{L}\right). \end{aligned} \quad (13)$$

Постоянные A, B, C, D , входящие в решение (13), находятся из граничных условий (8) и (9), а E и F в решении (12) – из начальных условий:

$$w(x, 0) = 0; \quad \left. \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

Нас, однако, интересуют собственные частоты биморфной консоли и каждого слоя в отдельности. Ограничимся первой колебательной модой. Нормированная по массе собственная функция 1-й моды записывается так [2]:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \sqrt{\frac{1}{mL}} \left\{ \cos\left(\frac{\lambda x}{L}\right) - \operatorname{ch}\left(\frac{\lambda x}{L}\right) + \right. \\ & \left. + \sigma \left[\sin\left(\frac{\lambda x}{L}\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{\lambda x}{L}\right) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где λ – безразмерный частотный параметр (собственное значение), полученный из характеристического уравнения

$$1 + \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda = 0. \quad (14)$$

Решение (14) для первой моды колебаний дает значение $\lambda = 1.875$, а σ выражается следующим образом:

$$\sigma = \frac{\sin \lambda - \operatorname{sh} \lambda}{\cos \lambda + \operatorname{ch} \lambda}. \quad (15)$$

Следует заметить, что здесь рассматривается случай консольного закрепления балки со свободным концом. Для решения задачи в данной статье можно использовать и другие конфигурации в зависимости от характера закрепления концов балки. Характеристические уравнения отличаются от (14) и (15) для разных видов граничных условий (разных креплений балки) [12]. Эти уравнения приведены в таблице.

Характеристические уравнения для различных граничных условий
Characteristics equations for different boundary conditions

Способ закрепления конца стержня		Характеристическое уравнение
$x = 0$	$x = L$	
Свободен	Свободен	$\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda = 1$
Оперт	Оперт	$\sin \lambda = 1$
Заделан	Заделан	$\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda = -1$
Заделан	Оперт	$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{th} \lambda$
Заделан	Свободен	$\operatorname{ch} \lambda \cos \lambda = -1$
Оперт	Свободен	$\operatorname{tg} \lambda = \operatorname{th} \lambda$

Параметр λ определяется из равенства [2]

$$\lambda^4 = \omega^2 \frac{mL^4}{\left(Y_1 \frac{h_1^3}{3} + Y_2 \frac{h_2^3}{3} \right)}. \quad (16)$$

Из (16) можно получить выражение для квадрата собственной частоты незатухающих колебаний основной моды биморфной консоли:

$$f^2 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\lambda}{L} \right)^4 \frac{(Y_1 h_1^3 + Y_2 h_2^3)}{12m}, \quad (17)$$

где суммарная масса биморфа равна сумме масс обоих слоев: $m = m_1 + m_2$. Выражения для частот собственных незатухающих колебаний каждого элемента балки в отдельности можно получить из (17), однако моменты инерции будут отличаться. Для пьезоэлектрической консоли:

$$f_1^2 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\lambda}{L} \right)^4 \frac{Y_1 h_1^3}{48m_1}. \quad (18)$$

Здесь следует учитывать, что вследствие наличия пьезоэффекта модуль Юнга поперечнополяризованного пьезоэлектрика уменьшается по сравнению с неполяризованным материалом [5]:

$$Y_1 = Y_0 \left(1 - \frac{d_{31}^2}{\varepsilon_{33}^{\sigma} s_{11}^E} \right),$$

где d_{31} – поперечный пьезомодуль; $\varepsilon_{33}^{\sigma}$ – относительная диэлектрическая проницаемость при постоянном механическом напряжении; s_{11}^E – упругая податливость при постоянном электрическом поле; Y_0 – модуль Юнга неполяризованного пьезоэлектрика.

Для консоли из пассивного материала:

$$f_2^2 = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\lambda}{L} \right)^4 \frac{Y_2 h_2^3}{48 m_2}. \quad (19)$$

После несложных преобразований из (17)–(19) можно получить простое соотношение, связывающее все три частоты и позволяющее получить любую из них по известным двум остальным:

$$f^2 = 4 \left(\frac{m_1}{m} f_1^2 + \frac{m_2}{m} f_2^2 \right).$$

Например, измерив значение частоты основного резонанса колебаний металлической консоли и затем – значение частоты основного резонанса этой консоли с наклеенной на нее пьезоэлектрической пленкой, можно получить

$$f_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{m_1} f^2 - \frac{m_2}{m_1} f_2^2}.$$

Для проверки полученных соотношений было выполнено имитационное численное моделирование методом конечных элементов. Двухслойная консольная балка состояла из металлической пластины с размерами $155 \times 15 \times 0.2$ мм, изготовленной из бериллиевой бронзы, и пьезоэлектрического слоя, выполненного из PVDF, толщиной 0.15 мм. Результаты моделирования полностью подтвердили правильность приведенных соотношений.

Выводы. В статье предложен метод измерения упругих и пьезоэлектрических параметров пьезоэлектрических материалов в диапазоне частот 1–1000 Гц. В качестве метода исследования использовался составной осциллятор, представляющий собой биморфную консоль, содержащую пьезоэлемент. Полученные соотношения, аналогичные продольному составному осциллятору, позволяют вычислить частоту основного резонанса первой моды колебаний исследуемой пластины по данным измерений основной частоты эталонной пластины и всего биморфа в целом.

Список литературы

1. Review of piezoelectric energy harvesting system and application of optimization techniques to enhance the performance of the harvesting system / M. R. Sarker, S. Julai, M. F. Mohd Sabri, S. Mohd Said, Md. M. Islam, M. Tahir / *Sensors and Actuators: A. Phys.*, 2019. Vol. 300. P. 1–51. doi: 10.1016/j.sna.2019.111634.
2. Цаплев В. М., Аббакумов К. Е., Коновалов Р. С. Нелинейные пьезокерамические материалы и малогабаритные генераторы энергии. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2016. 215 с.
3. Mechanical analysis of polymers / K. Deshmukh, T. Kovarik, A. M. Makhdoomi, B. Ahamed, S. K. Khadheer Pasha // *Polymer Sci. and Innovative Appl.* 2020. P. 117–152. doi:10.1016/B978-0-12-816808-0.00004-4.
4. Gusarov V. PVDF piezoelectric polymers: characterization and application to thermal energy harvesting / *THÈSE Pour obtenir le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES.* 2015. 159 p.
5. Физическая акустика / под ред. У. Мэзона. Т. 1, ч. А. М.: Мир, 1966. 592 с.
6. Thompson J. E. Beam method for the measurement of internal friction // *J. of Scientific Instruments.* 1960. Vol. 37, № 6. P. 208–209.
7. Marx J. Use of the Piezoelectric Gauge for Internal Friction Measurements // *Rev. of Scientific Instruments.* 1951. Vol. 22, № 7. P. 503–509.
8. Меркулова В. М. Расчет составного пьезовибратора для измерения внутреннего трения в сильнопоглощающих материалах // *Акустический журн.* 1968. Т. 14, № 2. С. 250–256.
9. Tsaplev V. Studies of elastic and unelastic properties of ferroelectrics under high uniaxial stress // *Intern. J. of Acoustics and Vibration.* 1997. Vol. 2, № 4. P. 173–181.
10. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / пер. с англ. под ред. Э. И. Григолюка. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
11. Banks H. T., Inman D. J. On damping mechanisms in beams // *ASME J. of Appl. Mechan.* 1991. Vol. 58, iss. 3. P. 716–723. doi: 10.1115/1.2897253.
12. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Дрофа, 2004. 591 с.

Информация об авторах

Цаплев Валерий Михайлович – д-р техн. наук, профессор кафедры электроакустики и ультразвуковой техники СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: valery@convergences-fr.ru

<https://orcid.org/0000-0002-7386-7233>

Коновалов Роман Сергеевич – канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой электроакустики и ультразвуковой техники СПбГЭТУ «ЛЭТИ»; доцент кафедры «Наземные транспортно-технологические комплексы», Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I, Московский пр., д. 9, Санкт-Петербург, 190031, Россия.

E-mail: rskonovalov@etu.ru

<https://orcid.org/0000-0002-0155-2718>

Коновалов Сергей Ильич – д-р техн. наук, доцент кафедры электроакустики и ультразвуковой техники СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: sikonovalov.eut@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-2903-2685>

Соловьева Алина Дмитриевна – аспирант кафедры электроакустики и ультразвуковой техники СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: adsoloveva@stud.etu.ru

Вклад авторов:

Цаплеv В. М. – концепция и методология исследования; коррекция и редактирование текста.

Коновалов Р. С. – подготовка и проведение аналитических исследований; подготовка текста.

Коновалов С. И. – аналитические исследования и анализ данных; подготовка текста.

Соловьева А. Д. – аналитические исследования и анализ данных; подготовка текста.

References

1. Review of piezoelectric energy harvesting system and application of optimization techniques to enhance the performance of the harvesting system / M. R. Sarker, S. Julai, M. F. Mohd Sabri, S. Mohd Said, Md. M. Islam, M. Tahir / *Sensors and Actuators: A. Phys.*, 2019. Vol. 300. P. 1–51. doi: 10.1016/j.sna.2019.111634.
2. Caplev V. M., Abbakumov K. E., Konovalov R. S. Nelinejnye p'ezokeramicheskie materialy i malogabaritnye generatory jenerгии. SPb.: Izd-vo SPbGJeTU «LJeTI», 2016. 215 s. (In Russ.).
3. Mechanical analysis of polymers / K. Deshmukh, T. Kovarik, A. M. Makhdoomi, B. Ahamed, S. K. Khadheer Pasha // *Polymer Sci. and Innovative Appl.* 2020. P. 117–152. doi:10.1016/B978-0-12-816808-0.00004-4.
4. Gusarov B. PVDF piezoelectric polymers: characterization and application to thermal energy harvesting / THÈSE Pour obtenir le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES. 2015. 159 p.
5. Fizicheskaja akustika / pod red. U. Mjezona. T. 1, ch. A. M.: Mir, 1966. 592 c. (In Russ.).
6. Thompson J. E. Beam method for the measurement of internal friction // *J. of Scientific Instruments*. 1960. Vol. 37, № 6. P. 208–209.
7. Marx J. Use of the Piezoelectric Gauge for Internal Friction Measurements // *Rev. of Scientific Instruments*. 1951. Vol. 22, № 7. P. 503–509.
8. Merkulova V. M. Raschet sostavnogo p'ezovibratora dlja izmerenija vnutrennego trenija v sil'nopogloshhajushhih materialah // *Akusticheskij zhurn.* 1968. T. 14, № 2. S. 250–256. (In Russ.).
9. Tsaplev V. Studies of elastic and unelastic properties of ferroelectrics under high uniaxial stress // *Intern. J. of Acoustics and Vibration*. 1997. Vol. 2, № 4. P. 173–181.
10. Timoshenko S. P., Jang D. H., Uiver U. Kolebanija v inzhenernom dele / per. s angl. pod red. Je. I. Gri-goljuka. M.: Mashinostroenie, 1985. 472 s. (In Russ.).
11. Banks H. T., Inman D. J. On damping mechanisms in beams // *ASME J. of Appl. Mechan.* 1991. Vol. 58, iss. 3. P. 716–723. doi: 10.1115/1.2897253.
12. Babakov I. M. Teorija kolebanij. M.: Drofa, 2004. 591 s. (In Russ.).

Information about the authors

Valery M. Tsaplev – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Department of Electroacoustics and Ultrasound Technology, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: valery@convergences-fr.ru

<https://orcid.org/0000-0002-7386-7233>

Roman S. Konovalov – Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Head of the Department of Electroacoustics and Ultrasound Technology, Saint Petersburg Electrotechnical University; Associate Professor of the Department «Ground Transport and Technological Complexes», Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University, Moskovsky av., 9, St. Petersburg, 190031, Russia.

E-mail: rskonovalov@etu.ru

<https://orcid.org/0000-0002-0155-2718>

Sergey I. Konovalov – Dr Sci. (Eng.), Associate Professor of the Department of Electroacoustics and Ultrasound Technology, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: sikonovalov.eut@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-5033-344X>

Alina D. Soloveva – postgraduate student of the Department of Electroacoustics and Ultrasound Technology, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: adsoloveva@stud.etu.ru

Author contribution statement:

Tsaplev V. M. – the concept and methodology of research; correction and editing of the text.

Konovalov R. S. – preparation and conduct of analytical research; preparation of the text.

Konovalov S. I. – analytical research and data analysis; preparation of the text.

Soloveva A. D. – analytical research and data analysis; preparation of the text.

Статья поступила в редакцию 11.06.2024; принята к публикации после рецензирования 23.08.2024; опубликована онлайн 25.11.2024.

Submitted 11.06.2024; accepted 23.08.2024; published online 25.11.2024.
