

УДК 681.513.6

Ле Хонг Куанг, Нгуен Тхань Тиен, Доан Ван Минь  
Государственный технический университет Ле Куи Дона, Ханой, Вьетнам

В. В. Путов, В. Н. Шелудько, А. А. Кузнецов, М. А. Чернышев  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

## **Адаптивное робастное управление многостепенным нелинейным механическим объектом с параметрической и функциональной неопределенностью (точный и приближенный подходы)**

*Рассматриваются задачи синтеза и сравнительного исследования адаптивных робастных систем управления многостепенными нелинейными механическими объектами (например, многозвенными манипуляционными роботами) в условиях неопределенности их математических моделей. Строятся и исследуются робастные адаптивные системы управления классом многостепенных механических (лагранжевых) объектов, синтезированные двумя аналитическими методами: точным методом адаптивного обхода интегратора с функциями настройки, опирающимся на параметрическую неопределенность математической модели нелинейного объекта, и приближенным методом мажорирующих функций, допускающим параметрическую и функциональную неопределенность модели объекта. При этом стандартная пошаговая процедура применения метода адаптивного обхода интегратора с функциями настройки к лагранжеву объекту потребовала модификации, предложенной в статье. В качестве примера многостепенного механического объекта рассмотрен промышленный четырехзвенный манипуляционный робот, выполнен полный расчет функциональных матриц его математической модели и проведена аффинная параметризация уравнений с определением  $(4 \times 28)$ -мерной матрицы неизвестных массоинерционных параметров модели объекта и  $(28 \times 1)$ -мерной векторной функции регрессора. Приведены некоторые результаты компьютерных исследований работоспособности построенных адаптивных робастных систем и сравнительного анализа их эффективности, проиллюстрированные графиками переходных процессов и реализациями программных траекторий.*

### **Многостепенный нелинейный механический объект, адаптивная робастная система управления, каскадная структура, параметрическая и функциональная неопределенности, метод адаптивного обхода интегратора с функциями настройки, метод мажорирующих функций**

В статье рассматриваются вопросы построения и сравнительного исследования адаптивных систем управления многостепенным нелинейным механическим объектом, эффективных в условиях параметрической и функциональной его неопределенности. Вопросы повышения точности систем управления, функционирующих в неопределенных условиях, всегда оказывалось в центре внимания исследователей, отвечая реальным потребностям повышения качества управления техническими объектами, поэтому разработка таких систем управления является одним из перспективных направлений исследований в этой области.

Методы скоростного градиента [1], [2], вычисленного момента [3], [4] и адаптивного обхода интегратора [5], [6] – это известные точные методы построения адаптивных систем управления по состоянию, тогда как метод мажорирующих функций относится к приближенным методам [7]–[9]. Для применения точных методов [1]–[6] необходимо иметь такую степень неопределенности правых частей дифференциальных уравнений описывающих объекты, когда они известны с точностью до постоянных или изменяющихся во времени неизвестных параметров, тогда как нелинейности правых частей должны быть заведомо известными и

полностью воспроизводиться при построении структур адаптивных законов и алгоритмов их настройки. В отличие от указанных точных методов, для применения приближенного метода мажорирующих функций не требуется знания не только конкретных параметров объекта, но и нелинейных функций правых частей, за исключением некоторых легко проверяемых оценочных мажорирующих соотношений, свойственных для целых классов нелинейных объектов, в том числе многостепенных нелинейных механических объектов.

В последнее время широкое распространение получили методы регуляризации (или огрубления), т. е. придания робастных свойств адаптивным алгоритмам, обеспечивающим асимптотическую (и даже экспоненциальную) устойчивость равновесных состояний адаптивных систем в идеальных условиях постоянства неизвестных параметров объектов и отсутствия внешних возмущений. Методы регуляризации базовых адаптивных алгоритмов «чисто интегрального типа» с помощью отрицательных параметрических постоянных или переключающихся обратных связей, названные, соответственно, методами  $\sigma$ -модификации или  $\sigma$ -модификации с переключением [10]–[12], а также алгоритмы с так называемой параметрической проекцией (parameter projection operator) [13], [14] получили широкое распространение в адаптивных робастных схемах управления. В то же время, методы регуляризации имеют недостаток – сложность определения условий обеспечения малости радиуса предельного множества с помощью регулирования глубины параметрических робастных связей, что приводит даже к таким противоречивым явлениям, когда ослабление обратных связей вызывает редкие, но большие по амплитуде «всплески» ошибок [15].

Также рассматриваются вопросы сравнительного исследования эффективности адаптивных робастных систем управления многостепенными нелинейными механическими объектами, построенных на основе метода адаптивного обхода интегратора с функциями настройки и регуляризованных алгоритмами параметрической проекции (точный подход), а также метода мажорирующих функций с алгоритмами настройки, регуляризованными отрицательными параметрическими обратными связями (приближенный подход).

**Адаптивное робастное управление многостепенным нелинейным механическим объектом, построенное методом адаптивного обхода интегратора и регуляризованное алгоритмами параметрической проекции (точный подход).** Рассмотрим многостепенный нелинейный механический объект, описываемый векторно-матричным уравнением Лагранжа следующего вида:

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} \in R^n$  – векторы обобщенных координат и скоростей;  $n$  – число степеней подвижности механического объекта;  $M(\mathbf{q}) \in R^{n \times n}$  – функциональная матрица инерции, симметричная и положительно определенная для всех  $\mathbf{q}$ ,  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in R^{n \times n}$  – функциональная матрица кориолисовых и центробежных сил, зависящих от скоростей;  $\mathbf{D}(\mathbf{q})$  –  $n$ -вектор-функция гравитационных сил;  $\boldsymbol{\tau} \in R^n$  – вектор управляющих входов (сил, моментов).

Преобразуем уравнение Лагранжа (1) к форме Коши. Пусть  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}$ ,  $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}$ , тогда система дифференциальных уравнений объекта (1) может быть приведена к блочной каскадной форме следующего вида:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2, \quad (2)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = M^{-1}(-C\mathbf{x}_2 - \mathbf{D}) + M^{-1}\boldsymbol{\tau}, \quad (3)$$

$$M = M(\mathbf{x}_1), C = C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{x}_1),$$

Применим метод адаптивного обхода интегратора с функциями настройки к построению адаптивной робастной системы управления алгоритмами параметрической проекции [5], [6], [13], [14], [16], [17].

**Шаг 1.** Введем следующие обозначения (новые переменные):

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_d,$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{x}_d$  – желаемый сигнал  $\mathbf{x}_1$ , функцию  $\boldsymbol{\alpha}$  назовем виртуальным управлением.

Уравнение (2) с учетом введенных обозначений (4) перепишем в новых переменных  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ :

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{z}_2 + \boldsymbol{\alpha} - \dot{\mathbf{x}}_d. \quad (5)$$

Примем функцию Ляпунова как  $V_1 = \frac{1}{2}\mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_1$  и вычислим ее производную в силу (5), получая

$$\dot{V}_1 = \mathbf{z}_1^T \dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{z}_1^T (\mathbf{z}_2 + \boldsymbol{\alpha} - \dot{\mathbf{x}}_d). \quad (6)$$

Тогда виртуальное управление будет

$$\mathbf{a} = -k_1 \mathbf{z}_1 + \dot{\mathbf{x}}_d, \quad (7)$$

где  $k_1$  – положительно определенная симметричная матрица.

Подставляя виртуальное управление (7) в (6), получим  $\dot{V}_1$  в виде

$$\dot{V}_1 = -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2. \quad (8)$$

Слагаемое  $\mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2$  в (8) будет скомпенсировано на следующем шаге синтеза. И, наконец, получим уравнение замкнутой системы на шаге 1, подставляя (7) в (5):

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = -k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2. \quad (9)$$

**Шаг 2.** Запишем уравнение для производной  $\dot{\mathbf{z}}_2 = \dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{a}}$  и, учитывая (3), получим

$$\dot{\mathbf{z}}_2 = M^{-1} [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{D} - C\mathbf{x}_2 - M\dot{\mathbf{a}}], \quad (10)$$

где производная  $\dot{\mathbf{a}}$  виртуального управления вычисляется как

$$\dot{\mathbf{a}} = -k_1 (\mathbf{x}_2 - \dot{\mathbf{x}}_d) + \ddot{\mathbf{x}}_d. \quad (11)$$

Введем в рассмотрение функцию Ляпунова вида  $V_2 = V_1 + \frac{1}{2} \mathbf{z}_2^T M \mathbf{z}_2$ . Вычислим полную производную функции  $\dot{V}_2$  в силу (10) и, принимая во внимание (8), получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \mathbf{z}_2^T M \dot{\mathbf{z}}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{z}_2^T \dot{M} \mathbf{z}_2 = \\ &= -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^T (\boldsymbol{\tau} - M\dot{\mathbf{a}} - C\mathbf{x}_2 - \mathbf{D}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbf{z}_2^T (\dot{M} - 2C) \mathbf{z}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{z}_2^T 2C \mathbf{z}_2 = \\ &= -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^T (\boldsymbol{\tau} - M\dot{\mathbf{a}} - C\mathbf{x}_2 - \mathbf{D} + C\mathbf{z}_2) = \\ &= -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^T (\boldsymbol{\tau} - M\dot{\mathbf{a}} - C\mathbf{a} - \mathbf{D}). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $(\dot{M} - 2C)$  – кососимметричная матрица, и  $\frac{1}{2} \mathbf{z}_2^T (\dot{M} - 2C) \mathbf{z}_2 = 0$  для всех  $\mathbf{z}_2$ .

Пусть некие постоянные числовые параметры матриц  $M$ ,  $C$  и вектора  $\mathbf{D}$  уравнения Лагранжа (1) неизвестны. Собирая их в числовую матрицу  $\Theta$ , введем аффинную параметризацию уравнения (1) относительно неизвестной  $(m \times n)$ -матрицы  $\Theta$ , удовлетворяющей равенству вида

$$\dot{\mathbf{a}} = -k_1 (\mathbf{x}_2 - \dot{\mathbf{x}}_d) + \ddot{\mathbf{x}}_d, \quad (12)$$

где  $\Theta = [\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2, \dots, \boldsymbol{\theta}_n] \in R^{m \times n}$  – неизвестная постоянная матрица со столбцами  $\boldsymbol{\theta}_i \in R^m$ ,  $(i = \overline{1, n})$ ;

$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{a}, \dot{\mathbf{a}}) \in R^{m \times 1}$  – известная вектор-функция-регрессор. Теперь, с учетом (12), производная  $\dot{V}_2$  примет вид

$$\dot{V}_2 = -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^T (\boldsymbol{\tau} - \Theta^T \boldsymbol{\varphi}). \quad (13)$$

Введем в рассмотрение определенно положительную (по переменным  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i, i = \overline{1, n}$ )

функцию Ляпунова вида  $V_{2a} = V_2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i$ ,

где  $\Gamma_i = \Gamma_i^T > 0$ ;  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i = \boldsymbol{\theta}_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Вычислим производную  $\dot{V}_{2a}(t)$ , учитывая (8), (9), (11), (13),

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2a} &= \dot{V}_2 + \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i = \\ &= -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^T (\boldsymbol{\tau} - \hat{\Theta}^T \boldsymbol{\varphi} - \tilde{\Theta}^T \boldsymbol{\varphi}) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i = -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 + \\ &\quad + \mathbf{z}_2^T (\boldsymbol{\tau} - \hat{\Theta}^T \boldsymbol{\varphi}) - \mathbf{z}_2^T \tilde{\Theta}^T \boldsymbol{\varphi} - \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i. \end{aligned}$$

Для дальнейшего вычисления воспользуемся равенством  $\mathbf{z}_2^T \tilde{\Theta}^T = \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_{2,i} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T$ , где  $\mathbf{z}_{2,i}$  –  $i$ -я компонента  $n$ -вектора  $\mathbf{z}_2$ . Теперь, заканчивая вычисления, получим  $\dot{V}_{2a}$  в виде

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2a} &= -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^T (\boldsymbol{\tau} - \hat{\Theta}^T \boldsymbol{\varphi}) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_{2,i} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \boldsymbol{\varphi} - \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i = \\ &= -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^T (\boldsymbol{\tau} - \hat{\Theta}^T \boldsymbol{\varphi}) - \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \left\{ \sum_{i=1}^n (\mathbf{z}_{2,i} \boldsymbol{\varphi} + \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i) \right\}. \quad (14) \end{aligned}$$

Равенства, полученные из приравнивания нулю выражений, заключенных в фигурные скобки, – это финальные функции настройки

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_i = -\Gamma_i \mathbf{z}_{2,i} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \quad i = \overline{1, n}, \quad (15)$$

а финальный закон управления примет вид

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{z}_1 - k_2 \mathbf{z}_2 + \hat{\Theta}^T \boldsymbol{\varphi}, \quad (16)$$

где  $k_2$  – положительно определенная симметричная матрица; матрица  $\hat{\Theta} = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_n] \in R^{m \times n}$

со столбцами  $\hat{\theta}_i \in R^m, (i = \overline{1, n})$  – это матрица-оценка матрицы  $\Theta$ .

Подставляя (16) в (14) и учитывая (15), получим

$$\dot{V}_{2a} = -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^T k_2 \mathbf{z}_2 \leq -\gamma (\|\mathbf{z}_1\|^2 + \|\mathbf{z}_2\|^2),$$

где  $\gamma = \min\{\lambda_{\min}(k_1), \lambda_{\min}(k_2)\}$ , а  $\lambda_{\min}(\cdot)$  – минимальное собственное значение матрицы  $(\cdot)$ .

Таким образом, закон адаптивного управления (16) и алгоритмы адаптации (15) обеспечивают неположительность производной  $\dot{V}_{2a}$  (отрицательную определенность по переменным  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ ) и неположительность по переменным  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$   $\hat{\theta}_i, i = \overline{1, n}$ , что гарантирует ограниченность указанных переменных.

Согласно известной теореме Ла-Салля [11] о сходимости к наибольшему инвариантному множеству решений, определяемых нулями производной  $\dot{V}_{2a}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ , будут существовать предельные соотношения

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{z}_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_d) = 0 \text{ и } \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{z}_2 = 0. \quad (17)$$

Можно также показать, что в силу гладкости  $\mathbf{x}_d$  и  $\alpha$ , а также ограниченности переменных  $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \hat{\theta}_i, i = \overline{1, n}$ , переменные  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  будут также предельно ограничены, и вследствие того, что функция Ляпунова  $V_{2a}$  удовлетворяет неравенствам, характерным для квадратичных форм, сходимость переменных  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  к инвариантному множеству будет глобальной и будет носить экспоненциальный характер, при этом все переходные процессы будут быстрее сходиться, чем функция  $\exp\left(-\frac{\gamma}{2}t\right)$  – убывать.

Регуляризация интегральных алгоритмов адаптации (17) методом параметрической проекции [13], [14], [17] дает адаптивные робастные алгоритмы настройки с параметрической проекцией вида

$$\dot{\hat{\theta}}_i = \Gamma_i \text{Proj}(-z_{2,i} \Phi, \hat{\theta}_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

**Адаптивная робастная система управления многостепенным нелинейным механическим объектом, построенная методом мажорирующих функций (приближенный подход).** Следуя [7]–[9], укажем, что применение метода мажори-

рующих функций к синтезу адаптивного управления многостепенными нелинейными механическими объектами допускает неопределенность как параметров, так и вида нелинейных функций, описывающих объект (1), а также опирается на детализацию его математического описания следующего вида:

$$\ddot{q}_i = a_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + b_i(\mathbf{q})u_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \sum_{j=1, j \neq i}^m [f_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + s_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})], \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} a_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= a_{i1}(\mathbf{q})q_i + a_{i2}(\mathbf{q})\dot{q}_i + a_{i3}(\mathbf{q})\dot{q}_i^2; \\ f_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= f_{ij}^1(\mathbf{q})q_j + f_{ij}^2(\mathbf{q})\dot{q}_j + \\ &+ f_{ij}^3(\mathbf{q})\dot{q}_i\dot{q}_j + f_{ij}^4(\mathbf{q})\dot{q}_j^2; \\ s_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= b_{ij}(\mathbf{q})u_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}); \quad i, j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (19)$$

все нелинейные коэффициенты, а также  $u_i$  – глобально ограниченные скалярные нелинейные функции, непрерывно дифференцируемые по аргументам  $q_i$  и кусочно-непрерывные по времени  $t$ ,

$$u_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = u_i^H(q, \dot{q}) + u_i^A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + u_i^0(t),$$

где  $u_i^H$  – неадаптивное (линейное) с постоянными настройками;  $u_i^0(t)$  – программное;  $u_i^A$  – искомое адаптивное управление (моменты) в  $i$ -й степени подвижности;  $\mathbf{q} = [q_1, \dots, q_n]^T$ ;  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n]^T$  –  $n$ -мерные векторы обобщенных (лагранжевых) координат и скоростей;  $i, j = 1, \dots, n$ ;  $n$  – число степеней подвижности.

Дифференциальная система (18), (19) исчерпывает математическое описание динамики класса взаимосвязанных нелинейных механических объектов со многими степенями подвижности, и каждое уравнение характеризуется:

- а) собственной нелинейной нестационарной динамикой функции  $a_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), b_i(\mathbf{q}, t)$ ;
- б) перекрестными нелинейными связями по обобщенным координатам и скоростям  $q_j, \dot{q}_j$  (функции  $f_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ );
- в) перекрестными нелинейными связями по управлениям  $u_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  (функции  $s_{ij}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ ).

Неадаптивные управления вида  $u_i^H(q_i, \dot{q}_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , решают задачи формирования локальной динамики следящих систем, характеризуемых некоторыми постоянными усредненными параметрами, и могут быть рассчитаны методами модального, следящего за эталонной моделью, подчиненного и т. п. управлений, и здесь явно не выписываются (считаются известными). Далее сосредоточим внимание на построении адаптивных управлений  $u_i^a(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .

Рассмотрим три вида адаптивных робастных структур, отвечающих задачам локального, развязывающего и полного адаптивного управления объектом (18), (19) [7]–[9].

**Локальная адаптивная робастная структура управления механическим объектом, построенная методом мажорирующих функций.** Локальная адаптивная робастная структура управления объектом (18), (19) состоит из совокупностей:

а) локальных эталонных моделей вида

$$\ddot{x}_{M_i} = -a_{M_i} x_{M_i} - a_{M_i} \dot{x}_{M_i} + b_{M_i} u_i^0(t); \quad a_{M_i}, \quad a_{M_i}, \quad b_{M_i} > 0 \text{ (const);} \quad (20)$$

б) локальных адаптивных законов вида

$$u_{\text{лок } i}^a(q_i, \dot{q}_i) = k_{i_1}(t)q_i + k_{i_2}(t)\dot{q}_i + k_{i_3}(t)\dot{q}_i^2 + k_{i_4}(t)u_i^0(t); \quad (21)$$

в) регуляризованных алгоритмов настройки параметров законов (21) вида

$$\begin{aligned} \dot{k}_{i_1}(t) &= -\gamma_{i_1} d_i q_i - \alpha_{i_1} k_{i_1}(t); \quad \dot{k}_{i_2}(t) = \\ &= -\gamma_{i_2} d_i \dot{q}_i - \alpha_{i_2} k_{i_2}(t); \\ \dot{k}_{i_3}(t) &= -\gamma_{i_3} d_i \dot{q}_i^2 - \alpha_{i_3} k_{i_3}(t); \quad \dot{k}_{i_4}(t) = \\ &= -\gamma_{i_4} d_i u_i^0(t) - \alpha_{i_4} k_{i_4}(t); \\ d_i &= b_{M_i} [p_{i_1}(q_i - q_{M_i}) + p_{i_2}(\dot{q}_i - \dot{q}_{M_i})], \end{aligned} \quad (22)$$

где  $\gamma_{i_*}, \alpha_{i_*} (* = \overline{1, 4})$ ;  $d_i, p_{i_1}, p_{i_2}, i = \overline{1, n}$  – постоянные строго положительные коэффициенты усиления алгоритмов настройки.

**Развязывающая адаптивная робастная структура управления механическим объектом, построенная методом мажорирующих функций.** Данная структура управления объектом (18), (19) состоит из совокупностей эталонных моделей (20) и развязывающих адаптивных законов

$$u_{\text{разв } i}^a(q_j, \dot{q}_j) = \sum_{j=1, j \neq i}^n \left[ k_{ij5}(t)q_j + k_{ij6}(t)\dot{q}_j + k_{ij7}(t)\dot{q}_j^2 + k_{ij8}(t)\dot{q}_i\dot{q}_j + k_{ij9}(t)u_j^0(t); i, j = \overline{1, n} \right] \quad (23)$$

с регуляризованными алгоритмами настройки параметров законов (23), выражаемых уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{k}_{ij5}(t) &= -\gamma_{ij5} d_i q_j - \alpha_{ij5} k_{ij5}(t); \quad \dot{k}_{ij6}(t) = \\ &= -\gamma_{ij6} d_i \dot{q}_j - \alpha_{ij6} k_{ij6}(t); \\ \dot{k}_{ij7}(t) &= -\gamma_{ij7} d_i \dot{q}_j^2 - \alpha_{ij7} k_{ij7}(t); \quad \dot{k}_{ij8}(t) = \\ &= -\gamma_{ij8} d_i \dot{q}_i \dot{q}_j - \alpha_{ij8} k_{ij8}(t), \end{aligned} \quad (24)$$

где  $d_i$  – как в (22);  $\gamma_{ij*}, \alpha_{ij*} (* = \overline{5, 9})$  – строго положительные постоянные коэффициенты усиления алгоритмов,  $i, j = \overline{1, n}$ .

**Полная (взаимосвязанная) адаптивная робастная структура управления механическим объектом, построенная методом мажорирующих функций.** Данная структура управления механическим объектом (18), (19) состоит из совокупности эталонных моделей (20) и объединения совокупностей локальных (21) и развязывающих (23) адаптивных законов с алгоритмами настройки (22) и (24).

**Результаты компьютерного исследования работоспособности построенных адаптивных робастных систем.** Компьютерные исследования нелинейной взаимосвязанной модели четырехстепенного манипулятора (рис. 1) проводились со следующими числовыми параметрами его сочленений:  $m_1 = 25$  кг;  $m_2 = 20$  кг;  $m_3 = 15$  кг;  $m_4 = 8$  кг;  $I_{x1} = 0.1$  кг · м<sup>2</sup>;  $I_{y1} = 0.1$  кг · м<sup>2</sup>;  $I_{z1} = 0.1$  кг · м<sup>2</sup>;  $I_{x2} = 0.07$  кг · м<sup>2</sup>;  $I_{y2} = 0.07$  кг · м<sup>2</sup>;  $I_{z2} = 0.07$  кг · м<sup>2</sup>;  $I_{x3} = 0.05$  кг · м<sup>2</sup>;  $I_{y3} = 0.05$  кг · м<sup>2</sup>;  $I_{z3} = 0.05$  кг · м<sup>2</sup>;  $I_{x4} = 0.03$  кг · м<sup>2</sup>;  $I_{y4} = 0.03$  кг · м<sup>2</sup>;  $I_{z4} = 0.03$  кг · м<sup>2</sup>;  $l_1 = 0.4$  м;  $l_2 = 1.5$  м;  $l_3 = 1.2$  м;  $l_4 = 0.6$  м;  $r_1 = 0.2$  м;  $r_2 = 0.7$  м;  $r_3 = 0.6$  м;  $r_4 = 0.3$  м;  $g = 9.8$  м/с<sup>2</sup>;  $i = \overline{1, 4}$ , где  $m_i, r_i, l_i, I_{xi}, I_{yi}, I_{zi}$  – масса  $i$ -го звена, расстояние от соединения ( $i-1$ )-го звена до центра масс  $i$ -го звена, длина  $i$ -го звена, моменты инерции  $i$ -го звена относительно осей  $x, y, z, i = \overline{1, 4}$ .

Расчетная схема четырехстепенного манипуляционного робота типовой конструкции показана на рис. 1, где  $\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4]^T$ .

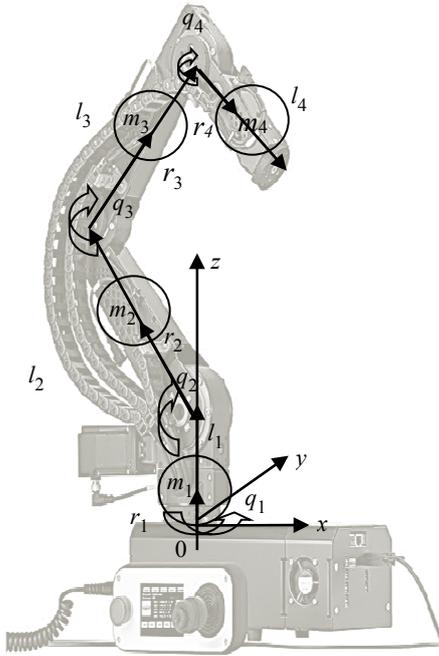


Рис. 1

В соответствии с (1) матрицы  $M$ ,  $C$  и вектор  $D$  имеют следующее строение:

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ 0 & M_{23} & M_{33} & M_{34} \\ 0 & M_{24} & M_{34} & M_{44} \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & 0 \end{bmatrix}; \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{bmatrix}.$$

Введем обозначения следующих совокупностей функций и параметров:

$$q_5 = q_3 + q_4, q_6 = 2q_2, q_7 = 2q_2 + 2q_3,$$

$$q_8 = 2q_2 + 2q_3 + 2q_4, q_9 = 2q_2 + q_3,$$

$$q_{10} = 2q_2 + 2q_3 + q_4,$$

$$q_{11} = 2q_2 + q_3 + q_4, q_{12} = q_2 + q_3, q_{13} = q_2 + q_3 + q_4,$$

$$c_i = \cos(q_i), s_i = \sin(q_i), i = \overline{1,13},$$

$$a_1 = m_4 r_4^2 I y_4, a_2 = m_4 r_4 l_3, a_3 = I y_3 + m_3 r_3^2 + m_4 l_3^2,$$

$$a_4 = m_4 r_4 l_2, a_5 = l_2 m_4 r_4, a_6 = l_2 l_3 m_4 + l_2 m_3 r_3$$

$$a_7 = I y_2 + l_2^2 m_3 + l_2^2 m_4 + m_2 r_2^2,$$

$$a_8 = 0.5(m_4 r_4^2 - I x_4 + I z_4),$$

$$a_9 = 0.5(m_4 l_3^2 + m_3 r_3^2 - I x_3 + I z_3),$$

$$a_{10} = 0.5(I z_2 - I x_2 + l_2^2 m_3 + l_2^2 m_4 + m_2 r_2^2);$$

$$a_{11} = 0.5(I x_2 + I x_3 + 2I z_1 + I x_4 + I z_2 +$$

$$+ I z_3 + I z_4 + l_2^2 m_3 + l_2^2 m_4 + l_3^2 m_4 + m_2 r_2^2 +$$

$$+ m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2); a_{12} = g(l_2 m_3 + l_2 m_4 + m_2 r_3);$$

$$a_{13} = g(m_4 l_3 + m_3 r_3); a_{14} = g m_4 r_4.$$

В программе Mathcad15 с помощью алгоритмов расчета получим:

$$M_{11} = a_{11} + a_{10} c_6 + a_9 c_7 + a_8 c_8 + a_6 c_9 + a_6 c_3 +$$

$$+ a_2 c_{10} + a_4 c_{11} + a_2 c_4 + a_4 c_5;$$

$$M_{22} = a_7 + a_3 + a_1 + 2a_6 c_3 + 2a_4 c_5 + 2a_2 c_2;$$

$$M_{23} = a_1 + a_3 + a_6 c_3 + 2a_2 c_4 + a_5 c_5;$$

$$M_{24} = a_1 + a_4 c_5 + a_2 c_4;$$

$$M_{33} = a_1 + a_3 + 2a_2 c_4; M_{34} = a_1 + a_2 c_4; M_{44} = a_1;$$

$$C_{11} = -[0.5dq_4(s_{10} + s_4) + (dq_2 + dq_3)s_{10}]a_2 -$$

$$- [0.5(dq_3 + dq_4)(s_{11} + s_5) + dq_2 s_{11}]a_4 -$$

$$- [dq_2 s_9 + 0.5dq_3(s_9 + s_3)]a_6 -$$

$$- (dq_2 + dq_3 + dq_4)s_8 a_8 - (dq_2 + dq_3)s_7 a_9 -$$

$$- dq_2 s_6 a_{10} - (dq_2 + dq_3 + dq_4)s_8 a_8 -$$

$$- (dq_2 + dq_3)s_7 a_9 - dq_2 s_6 a_{10};$$

$$C_{12} = -dq_1 s_{10} a_2 - dq_1 s_{11} a_4 - dq_1 s_9 a_6 -$$

$$- dq_1 s_8 a_8 - dq_1 s_7 a_9 - dq_1 s_6 a_{10};$$

$$C_{13} = -dq_1 s_{10} a_2 - dq_1 s_7 a_9 - 0.5dq_1(s_{11} + s_5)a_4 -$$

$$- 0.5dq_1(s_9 + s_3)a_6 - dq_1 s_8 a_8;$$

$$C_{14} = -0.5dq_1(s_{10} + s_4)a_2 -$$

$$- 0.5dq_1(s_{11} + s_5)a_4 - dq_1 s_8 a_8;$$

$$C_{21} = dq_1 s_{10} a_2 + dq_1 s_{11} a_4 + dq_1 s_9 a_6 +$$

$$+ dq_1 s_8 a_8 + dq_1 s_7 a_9 + dq_1 s_6 a_{10};$$

$$C_{22} = -dq_4 s_4 a_2 - (dq_3 s_5 + dq_4 s_5)a_4 - dq_3 s_3 a_6;$$

$$C_{23} = -dq_4 s_4 a_2 - (dq_2 s_5 + 0.5dq_4 s_5)a_4 -$$

$$- (dq_3 s_5 + 0.5dq_4 s_5)a_5 - (dq_2 s_3 + dq_3 s_3)a_6;$$

$$C_{24} = -(dq_2 s_4 + dq_3 s_4 + dq_4 s_4)a_2 -$$

$$- (dq_2 s_5 + 0.5dq_3 s_5 + dq_4 s_5)a_4 - 0.5dq_3 s_5 a_5;$$

$$C_{31} = dq_1 s_{10} a_2 + 0.5dq_1(s_{11} + s_5)a_4 +$$

$$+ 0.5dq_1(s_9 + s_3)a_6 + dq_1 s_8 a_8 + dq_1 s_7 a_9;$$

$$C_{32} = -dq_4 s_4 a_2 + (dq_2 s_5 + 0.5dq_4 s_5)a_4 -$$

$$- 0.5dq_4 s_5 a_5 + dq_2 s_3 a_6;$$

$$C_{33} = -dq_4 s_4 a_2; C_{34} = -(dq_2 s_4 + dq_3 s_4 + dq_4 s_4)a_2 +$$

$$+ 0.5dq_2 s_5(a_4 - a_5);$$

$$C_{41} = 0.5dq_1(s_{10} + s_4)a_2 +$$

$$+ 0.5dq_1(s_{11} + s_5)a_4 + dq_1 s_8 a_8;$$

$$\begin{aligned}
C_{42} &= (dq_2s_4 + dq_3s_4)a_2 + \\
&+ (dq_2s_5 - 0.5dq_3s_5)a_4 + 0.5dq_3s_5a_5; \\
C_{43} &= (dq_2s_4 + dq_3s_4)a_2 - 0.5dq_2s_5a_4 + \\
&+ 0.5dq_2s_5a_5; \\
D_2 &= a_{12}c_2 + a_{13}c_{12} + a_{14}c_{13}; \\
D_3 &= a_{13}c_{12} + a_{14}c_{13}, D_4 = a_{14}c_{13}.
\end{aligned}$$

Для расчета параметров матрицы  $\Theta_\alpha$  и вектора  $\Phi_\alpha(q, \dot{q}, \alpha_1, \dot{\alpha}_1)$  (12) введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
p_1 &= \dot{\alpha}_{11}c_4 + \dot{\alpha}_{11}c_{10} - (1/2)\alpha_{14}\dot{q}_1(s_4 + s_{10}) - \\
&- \alpha_{12}\dot{q}_1s_{10} - \alpha_{13}\dot{q}_1s_{10} - (1/2)\alpha_{11}\dot{q}_4(s_4 + s_{10}); \\
p_{11} &= \dot{\alpha}_{12} + \dot{\alpha}_{13}; \\
p_2 &= \dot{\alpha}_{11}c_5 + \dot{\alpha}_{11}c_{11} + (1/2)\dot{q}_1(s_5 + s_{11})(\alpha_{14} - \alpha_{13}) + \\
&+ \alpha_{12}\dot{q}_1s_{11} + \dot{q}_2s_{11} + (1/2)(s_5 + s_{11})(\dot{q}_3 + \dot{q}_4); \\
p_3 &= \dot{\alpha}_{11}c_3 + \dot{\alpha}_{11}c_9 + \alpha_{12}\dot{q}_1s_9 - \\
&- (1/2)(s_3 + s_9)(\alpha_{13}\dot{q}_1 + \alpha_{11}\dot{q}_3); \\
p_4 &= \dot{\alpha}_{11}c_8 + \alpha_{14}\dot{q}_1s_8 + \alpha_{12}\dot{q}_1s_8 + s_8(\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4); \\
p_5 &= \dot{\alpha}_{11}c_7 + s_7(\dot{q}_2 + \dot{q}_3); \\
p_6 &= \dot{\alpha}_{11}c_6 + \dot{q}_2s_6 + \alpha_{12}\dot{q}_1s_6; p_7 = \dot{\alpha}_{11}; \\
p_8 &= -\dot{\alpha}_{11}s_{10}(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) - \alpha_{11}\dot{q}_2s_9; \\
p_9 &= \dot{\alpha}_{12} + \dot{\alpha}_{13} + \dot{\alpha}_{14}; \\
p_{10} &= \alpha_{14}s_4(\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + 2\dot{\alpha}_{13}c_4 - \alpha_{13}\dot{q}_4s_4 + \\
&+ 2\dot{\alpha}_{12}c_2 + \dot{\alpha}_{14}c_4 + \alpha_{11}\dot{q}_1s_{10} + \alpha_{12}\dot{q}_4s_4; \\
p_{12} &= -\alpha_{14}s_5(\dot{q}_2 + (1/2)\dot{q}_3 + \dot{q}_4) + \\
&+ \alpha_{11}\dot{q}_1s_{11} + 2\dot{\alpha}_{12}c_5 + \dot{\alpha}_{14}c_5 - \alpha_{12}s_5(\dot{q}_3 + \dot{q}_4) - \\
&- \alpha_{13}s_5(\dot{q}_2 + (1/2)\dot{q}_4); \\
p_{13} &= -(1/2)\alpha_{14}\dot{q}_3s_5 - \alpha_{13}s_5(\dot{q}_3 + (1/2)\dot{q}_4) + \dot{\alpha}_{13}c_5; \\
p_{14} &= \dot{\alpha}_{13}c_3 - \alpha_{13}s_3(\dot{q}_2 + \dot{q}_3) + \\
&+ 2\alpha_{12}c_3 - \alpha_{12}\dot{q}_3s_3 + \alpha_{11}\dot{q}_1s_9; \\
p_{15} &= \dot{\alpha}_{12}; p_{16} = \alpha_{11}\dot{q}_1s_8; p_{17} = \alpha_{11}\dot{q}_1s_7; \\
p_{18} &= \alpha_{11}\dot{q}_1s_6; p_{19} = c_2; p_{20} = c_{12}; p_{21} = c_{13}; \\
p_{22} &= 2\alpha_{13}c_4 - \alpha_{14}s_4(\dot{q}_2 + \dot{q}_3 + \dot{q}_4) + 2\dot{\alpha}_{12}c_4 - \\
&- \alpha_{12}\dot{q}_4s_4 + \alpha_{11}\dot{q}_1s_{10} - \alpha_{13}\dot{q}_4s_4 + \dot{\alpha}_{14}c_4; \\
p_{23} &= (1/2)\alpha_{14}\dot{q}_2s_5 + (1/2)\alpha_{12}s_5(\dot{q}_2 + \dot{q}_4) + \\
&+ (1/2)\alpha_{11}\dot{q}_1(s_5 + s_{11}); \\
p_{24} &= -(1/2)\alpha_{14}\dot{q}_2s_5 + \dot{\alpha}_{12}c_5 - (1/2)\alpha_{12}\dot{q}_4s_5; \\
p_{25} &= \alpha_{12}\dot{q}_2s_3 + (1/2)\alpha_{11}\dot{q}_1(s_3 + s_9) + \dot{\alpha}_{12}c_3; \\
p_{26} &= (1/2)\dot{q}_1(s_4 + s_{10}) + \alpha_{13}c_4 + \dot{\alpha}_{12}c_4 + \\
&+ s_4(\dot{q}_2 + \dot{q}_3)(\alpha_{12} + \alpha_{13}); \\
p_{27} &= (1/2)\alpha_{11}\dot{q}_1(s_5 + s_{11}) + \dot{\alpha}_{12}c_5 + \\
&+ (1/2)\alpha_{12}s_5(\dot{q}_2 - \dot{q}_3) - (1/2)\alpha_{13}\dot{q}_2s_5; \\
p_{28} &= (1/2)\alpha_{12}s_5(\dot{q}_2 + \dot{q}_3),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha &= -k_1(\mathbf{q} - \mathbf{q}_d) + \dot{\mathbf{q}}_d; \quad \dot{\alpha} = -k_1(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_d) + \ddot{\mathbf{q}}_d; \\
\alpha &= [\alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad \alpha_{13} \quad \alpha_{14}]^T; \\
\dot{\alpha} &= [\dot{\alpha}_{11} \quad \dot{\alpha}_{12} \quad \dot{\alpha}_{13} \quad \dot{\alpha}_{14}]^T; \\
\mathbf{q}_d &= [q_{1d} \quad q_{2d} \quad q_{3d} \quad q_{4d}]^T
\end{aligned}$$

– программные траектории манипулятора.

С помощью реализованных алгоритмов расчета в программе Mathcad15 получены следующие элементы матрицы  $\Theta_x$  и вектора  $\Phi_\alpha$ :

$$\Theta_\alpha^T = \begin{bmatrix}
a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{11} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & a_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} & a_{12} & a_{13} & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_8 & a_9 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_8 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
a_{13} & a_2 & a_4 & a_5 & a_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & a_4 & a_5 & 0 & & 
\end{bmatrix};$$

$$\Phi_\alpha = [p_1, p_2, \dots, p_{28}]^T.$$

#### Результаты компьютерного исследования.

Для системы адаптивного робастного управления, построенной на основе метода адаптивного обхода интегратора с функциями настройки и регуляризованной алгоритмами параметрической проекции, примем

$$\Gamma_1 = 0.1I_{28 \times 28}; \quad \Gamma_2 = 0.2I_{28 \times 28}; \quad \Gamma_3 = 0.3I_{28 \times 28};$$

$$\Gamma_4 = 0.4I_{28 \times 28}; \quad k_1 = \text{diag}(44, 44, 44, 44),$$

$$k_2 = \text{diag}(75, 75, 75, 75).$$

Для системы адаптивного робастного управления, построенной на основе метода мажорирующих функций, примем коэффициенты локальных эталонных моделей  $a_{Mi} = 2000$ ;  $r_{Mi} = 77$ ;  $b_{Mi} = 2000$ ,  $i = \overline{1, 4}$  и коэффициенты усиления алгоритмов настройки  $p_{i1} = 16$ ;  $p_{i2} = 400$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ;  $\gamma_{i*} = 1$ ;  $\alpha_{i*} = 10$ ;  $* = \overline{1, 4}$ ,  $i = \overline{1, 4}$ ;  $\gamma_{ij*, i \neq j} = 100$ ;  $\alpha_{ij*, i \neq j} = 10$ ,  $i, j = \overline{1, 4}$ ,  $* = \overline{5, 9}$ .

Было проведено моделирование переходных процессов степеней подвижности манипулятора с четырьмя вращательными звеньями, функционирующего в условиях неизвестных параметров.

**Вариант 1. Исследование траекторного движения с переходными процессами во времени. Результаты компьютерного моделирования манипулятора с адаптивным робастным управлением на основе метода мажорирующих функций.**

Пусть  $q_{EM} = [q_M; q_M; q_M; q_M]^T$  – программные траектории эталонных моделей (20), одинаковые для всех звеньев.

На рис. 2 программные траектории  $q_M(t)$  показаны сплошными линиями, тогда как реальные траектории  $q_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  – штриховыми ( $a - q_1; \bar{b} - q_2; \bar{v} - q_3; \bar{z} - q_4$ ). Из рис. 2 видно, что реальные траектории  $q_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , звеньев манипулятора под действием адаптивного робастного управления, построенного методом мажорирующих функций, отслеживают программные траектории  $q_M$  со скоростью сходимости, большей, чем  $1 - \exp\left(-\frac{1}{0.033}t\right)$ , т. е. время сходимости в пятипроцентную «трубку» составляет  $\leq 0.10$  с.

**Результаты компьютерного моделирования манипулятора с адаптивным робастным управлением на основе метода адаптивного обхода интегратора с алгоритмами параметрической проекции.** Пусть  $q_d = [1(t); 1(t); 1(t); 1(t)]^T$  – программные траектории, одинаковые для всех звеньев.

На рис. 3 программные траектории показаны сплошными линиями  $q_{di}(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , а реальные  $q_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  – штриховыми ( $a - q_1; \bar{b} - q_2; \bar{v} - q_3; \bar{z} - q_4$ ). Из рисунка видно, что реальные траектории  $q_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  звеньев манипулятора под действием адаптивного робастного управления, построенного методом адаптивного обхода интегратора, отслеживают программные траектории  $q_{di}(t)$  со скоростью сходимости, большей, чем  $1 - \exp\left(-\frac{1}{0.04}t\right)$ , т. е. время сходимости в пятипроцентную «трубку» составляет  $\leq 0.12$  с.

**Сравнительный анализ эффективности адаптивных робастных систем управления, построенных методом адаптивного обхода**

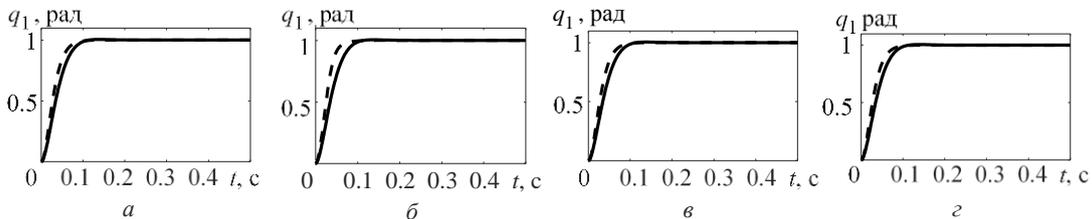


Рис. 2

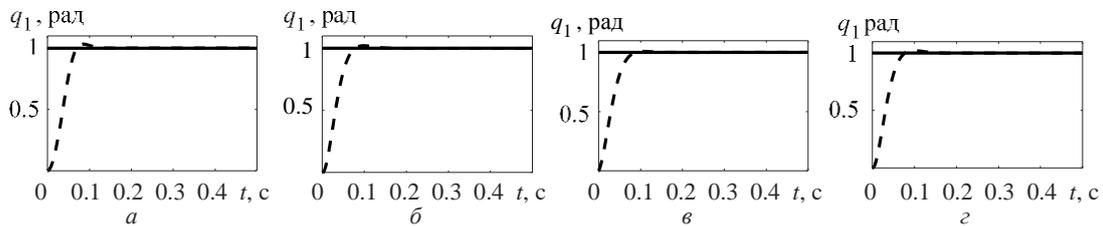


Рис. 3

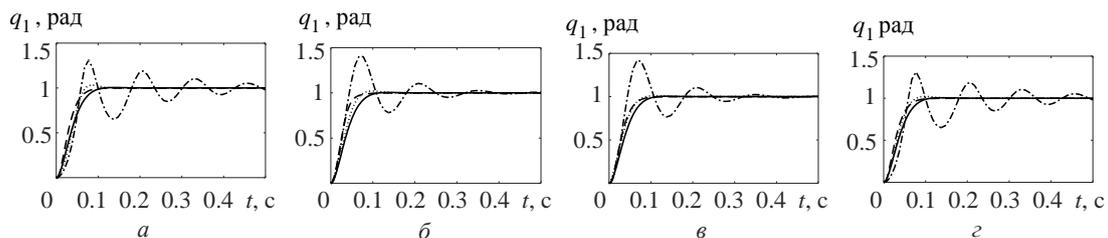


Рис. 4

**интегратора, регуляризованных алгоритмами параметрической проекции, и методом мажорирующих функций.** На рис. 4 показаны траектории: *a* – первого, *б* – второго, *в* – третьего, *г* – четвертого звеньев манипулятора, полученных

в рамках трех видов управлений: неадаптивного (штрихпунктирные линии); адаптивного, построенного по методу адаптивного обхода интегратора с функциями настройки и с параметрической проекцией (пунктирные линии);

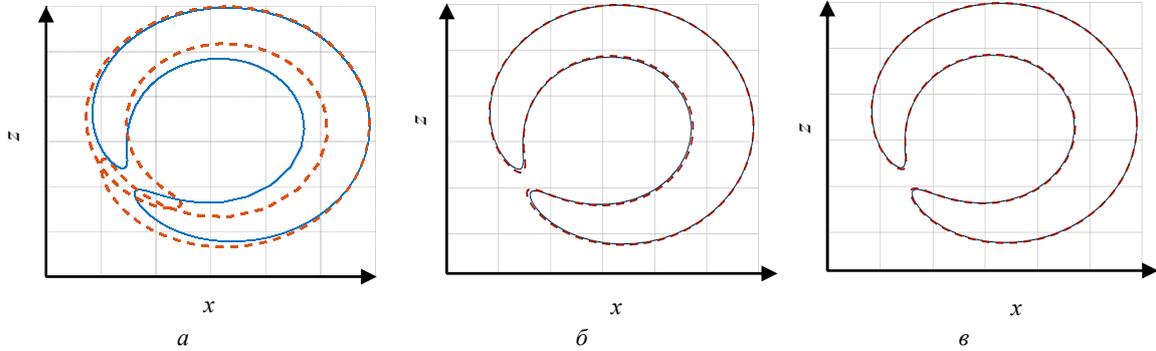


Рис. 5

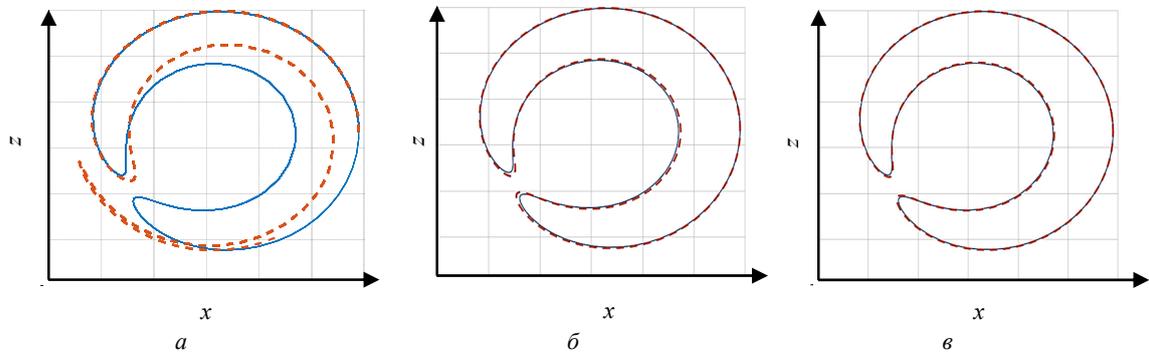


Рис. 6

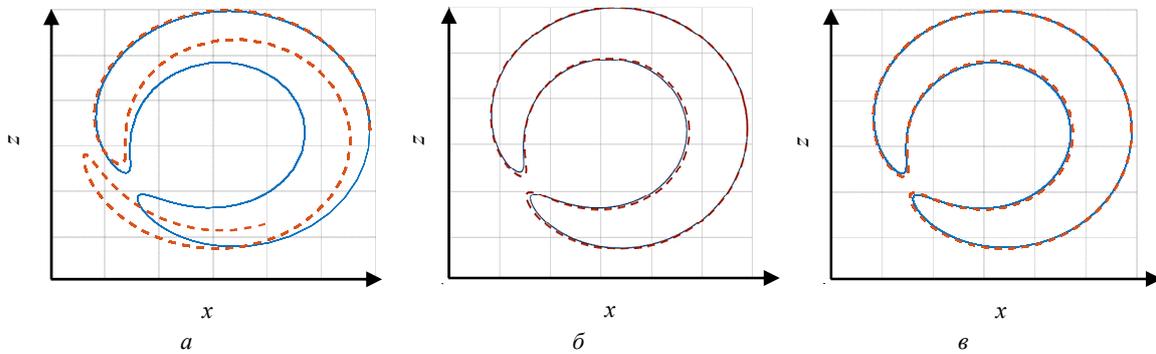


Рис. 7

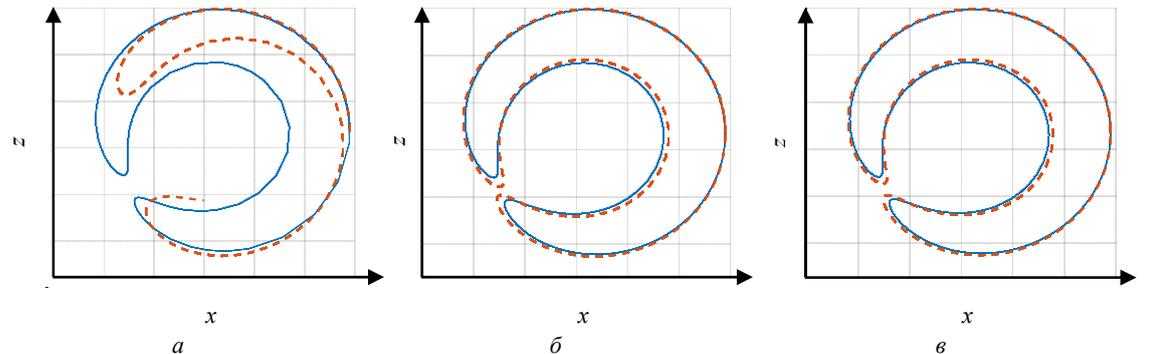


Рис. 8

адаптивного, построенного по методу мажорирующих функций (штриховые линии). Все траектории по каждому из управлений сравниваются между собой и с одной и той же программной траекторией  $q_M$  (сплошные линии).

1. Время сходимости в пятипроцентную «трубку» траекторий, построенных методом адаптивного обхода интегратора с функциями настройки 1–4-го звеньев составляет 0.12 с.
2. Время сходимости в пятипроцентную «трубку» траекторий, построенных методом мажорирующих функций 1–4-го звеньев составляет 0.10 с.
3. Реальные траектории неадаптивного управления так значительно отклоняются от программных траекторий  $q_M$ , что справедливо будет признать их неудовлетворительными.
4. Время сходимости траектории  $q_M$  для всех звеньев составляет 0.10 с.

**Вариант 2. Исследование траекторного движения с двумерными траекториями в виде закруглений. Результаты моделирования.** На рис. 5–8 показаны результаты отработки манипулятором плоской программной траектории (в плоскости  $xOz$ ) при двух значениях массы  $m_4$  четвертого сочленения (схвата): 8 и 40 кг.

- I.  $m_4 = 8$  кг:  $q_{1d} = 0; q_{2d} = 3 \sin 2\pi t;$   
 $q_{3d} = 4 \sin \pi t; q_{4d} = 2 \sin 2\pi t$  (рис. 5);
- II.  $m_4 = 40$  кг:  $q_{1d} = 0; q_{2d} = 3 \sin 2\pi t;$   
 $q_{3d} = 4 \sin \pi t; q_{4d} = 2 \sin 2\pi t$  (рис. 4);
- III.  $m_4 = 40$  кг:  $q_{1d} = 0; q_{2d} = 3 \sin 4\pi t;$   
 $q_{3d} = 4 \sin 2\pi t; q_{4d} = 2 \sin 4\pi t$  (рис. 7);

- IV.  $m_4 = 40$  кг:  $q_{1d} = 0; q_{2d} = 3 \sin 6\pi t;$   
 $q_{3d} = 4 \sin 3\pi t; q_{4d} = 2 \sin 6\pi t$  (рис. 8).

Каждый рисунок содержит три экранные реализации:  $a$  – с неадаптивным управлением;  $b$  – с адаптивным управлением, построенным на основе метода адаптивного обхода интегратора с функциями настройки;  $в$  – с адаптивным робастным управлением, построенным на основе метода мажорирующих функций. В каждой экранной реализации помещены по две траектории: программная – сплошная линия (они одинаковы при одной и той же массе схвата) и реальная – штриховая линия. Из рис. 5,  $a$ – $8, a$  очевидно, что реальные траектории с неадаптивным управлением так значительно отклоняются от программных, что их следует признать неудовлетворительными.

В то же время, реальные траектории на рис. 5,  $b, в$ – $8, b, в$  близки к программным и почти не различимы для обоих видов адаптивных систем, и только на рис. 8,  $b, в$  при увеличении частоты программных траекторий в три раза и изменении массы схвата (с 8 до 40 кг) траекторные ошибки становятся заметными, но остаются удовлетворительными.

**Влияние движения четвертого сочленения на движение третьего сочленения,  $m_4 = 8$  кг:**

$$q_{1d} = q_{2d} = q_{3d} = 0; q_{4d} = 2 \sin 2\pi t \text{ (рис. 9);}$$

$$q_{1d} = q_{2d} = q_{3d} = 0; q_{4d} = 2 \sin 4\pi t \text{ (рис. 10);}$$

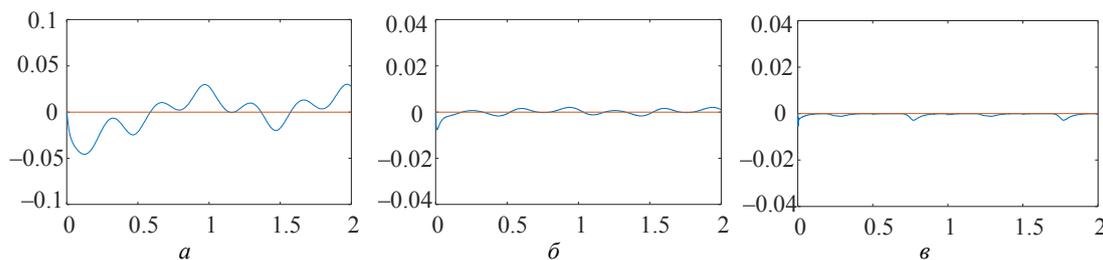


Рис. 9

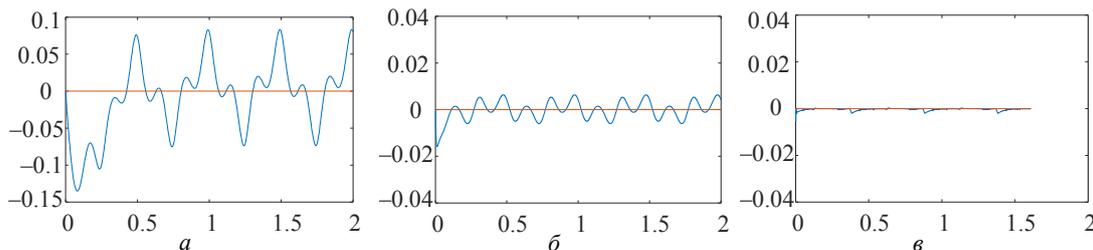


Рис. 10

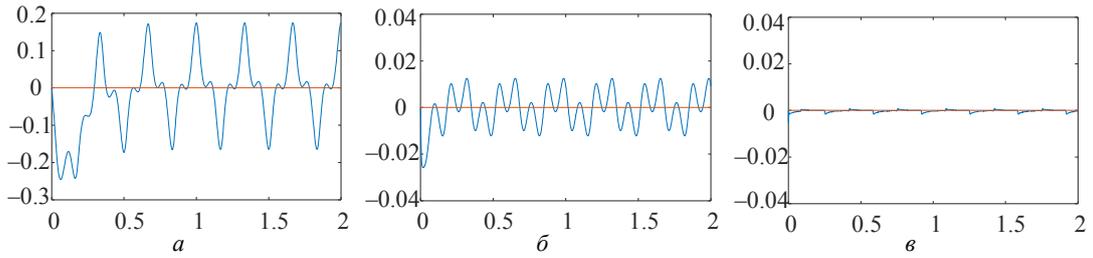


Рис. 11

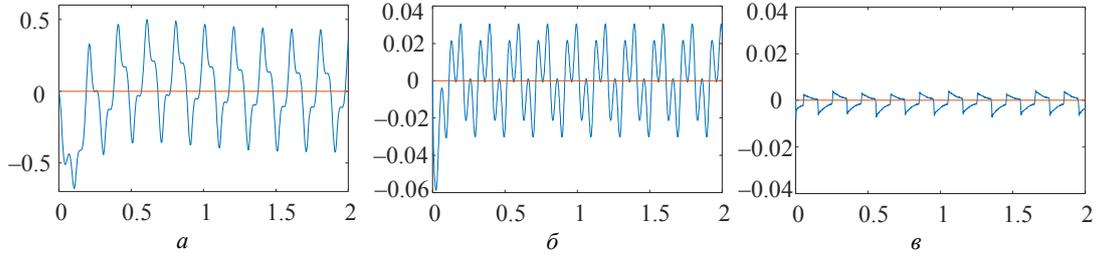


Рис. 12

$q_{1d} = q_{2d} = q_{3d} = 0; q_{4d} = 2 \sin 6\pi t$  (рис. 11);

$q_{1d} = q_{2d} = q_{3d} = 0; q_{4d} = 2 \sin 6\pi t$  (рис. 15);

$q_{1d} = q_{2d} = q_{3d} = 0; q_{4d} = 2 \sin 10\pi t$  (рис. 12).

$q_{1d} = q_{2d} = q_{3d} = 0; q_{4d} = 2 \sin 10\pi t$  (рис. 16).

**Влияние движения четвертого сочленения на движение третьего сочленения,  $m_4 = 40$  кг:**

$q_{1d} = q_{2d} = q_{3d} = 0; q_{4d} = 2 \sin 2\pi t$  (рис. 13);

На рис. 9–16 показаны временные диаграммы в координатах: время, с–угол, рад реального движения третьего сочленения  $q_3(t)$ , иллюстрирующие влияние на него движения четвертого сочленения, когда на вход четвертого сочленения подаются программные движения с различными частотами:

$q_{1d} = q_{2d} = q_{3d} = 0; q_{4d} = 2 \sin 4\pi t$  (рис. 14);

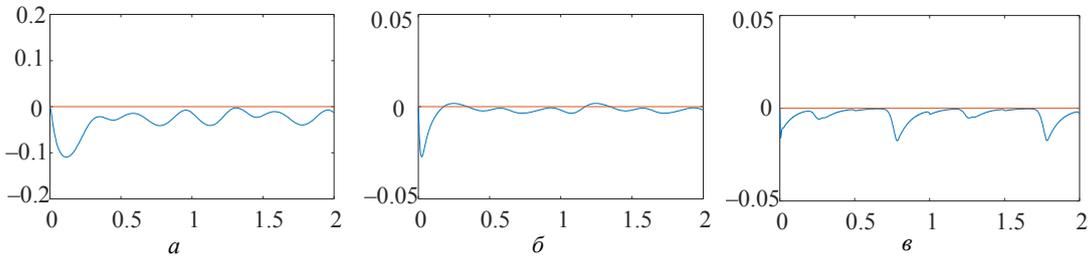


Рис. 13

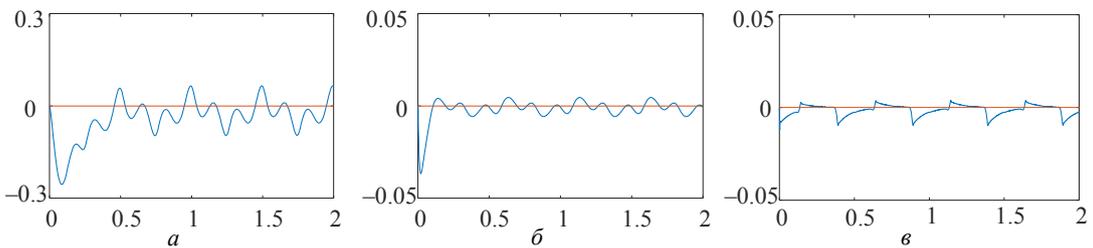


Рис. 14

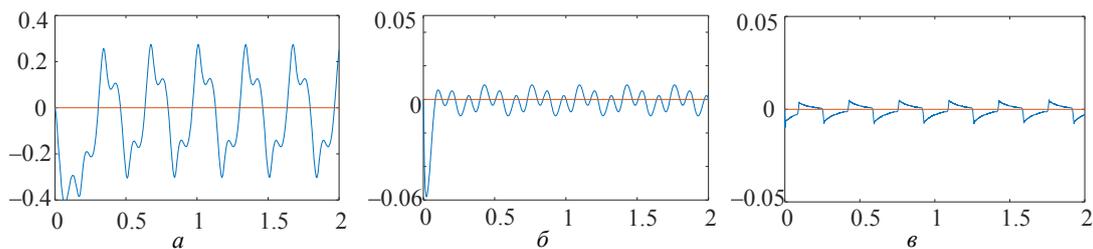


Рис. 15

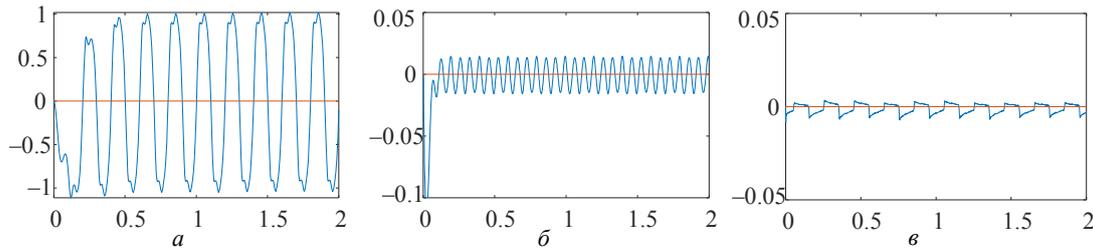


Рис. 16

$$q_{1d} = q_{2d} = q_{3d} = 0; q_{4d} = 2 \sin 2\pi t; 2 \sin 4\pi t; \\ 2 \sin 6\pi t; 2 \sin 10\pi t; \\ m_4 = 8; 40 \text{ кг.}$$

Видно, что отклонение третьего сочленения от нуля при условии, что программные управления, воздействующие на 1–3-е сочленения, равные нулю ( $q_{1d} = q_{2d} = q_{3d} = 0$ ), являются реакцией на движение четвертого сочленения ввиду их динамической взаимосвязанности. Это отчетливо видно на рис. 9, а–16, а при неадаптивном управлении, тогда как при обоих видах адаптивного управления (рис. 9, б, в–16, б, в) реакции взаимовлияния почти полностью подавляются, снижаясь в 10...20 раз по сравнению с неадаптивным управлением.

В статье рассмотрены задачи построения и сравнительного следования двух видов адаптивных робастных систем управления неопределенным многостепенным нелинейным механическим объектом. Одна из них синтезирована по условию параметрической неопределенности объекта на основе точного метода адаптивного обхода интегратора, а другая разработана на базе приближенного метода мажорирующих функций, допускающего функционально-параметрическую неопределенность математической модели объекта.

Синтез адаптивного робастного управления многостепенным нелинейным механическим объектом общего вида методом адаптивного обхода интегратора осуществлен аффинной параметризацией объекта относительно матрицы неизвестных массоинерционных параметров, построением нелинейного вектора-регрессора и реализацией двухшаговой процедуры, свойства ко-

торой позволили использовать для синтеза положительно определенную функцию Ляпунова, удовлетворяющую неравенствам, характерным для квадратичных форм, с тем, чтобы обеспечить экспоненциальную сходимость к максимальному инвариантному множеству, определяемому нулями неположительной полной производной функции Ляпунова, вычисленной в силу уравнений для векторов  $z_1, z_2$  и уравнений настройки столбцов  $\hat{\theta}_i$  оценочной матрицы  $\hat{\Theta}$  неизвестных параметров.

Построена адаптивная робастная система управления многостепенным нелинейным механическим объектом, допускающая функционально-параметрическую неопределенность объекта и не требующая знания конкретного нелинейного описания механического объекта, кроме задания числа степеней подвижности  $n$  и набора степенных функций нелинейной параметризации, мажорирующих правые части дифференциальных уравнений объекта.

В качестве примера многостепенного механического объекта в статье рассмотрен промышленный четырехзвенный манипулятор, выполнен расчет функциональных матриц уравнения Лагранжа вида (1) и произведена аффинная параметризация уравнения Лагранжа (1) с определением  $(4 \times 28)$ -матрицы неизвестных массоинерционных параметров объекта  $\Theta$  и построением  $(28 \times 1)$ -вектора-регрессора  $\phi$ .

Приведены некоторые результаты компьютерных исследований работоспособности построенных адаптивных робастных систем и сравнительного анализа их эффективности в управлении динамикой четырехстепенного манипулятора, проиллюстрированные графиками переходных процессов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фрадков А. Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. М.: Наука, 1990. 296 с.
2. Андриевский Б. Р., Стоцкий А. А., Фрадков А. Л. Алгоритмы скоростного градиента в задачах управ-

- ления и адаптации. Обзор // Автоматика и телемеханика. 1988. № 12. С. 3–39.

3. Slotine J.-J. E., Li W. On the adaptive control of robot manipulators // Int. J. of Robotics Research. 1987. Vol. 6, № 3. P. 49–58.

4. Slotine J.-J. E., Li W. Adaptive manipulator control: a case study // IEEE trans. on Automatic Control. 1988. Vol. 33, № 11. P. 995–1003.
5. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V. Non-linear and adaptive control design. New York: John Wiley and Sons, 1995.
6. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V. Adaptive nonlinear control without over parameterization // Systems and Control Letters. 1992. Vol. 19. P. 177–185.
7. Обобщение метода мажорирующих функций в задачах адаптивного управления нелинейными динамическими объектами / В. В. Путов, И. Г. Полушин, В. В. Лебедев, А. В. Путов // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2013. Вып. 8. С. 85–94.
8. О работоспособности адаптивных систем управления нелинейными механическими объектами, построенными по их упрощенным моделям с мажорирующими функциями / В. В. Путов, А. В. Путов, К. В. Игнатъев, М. М. Копычев, Нгуен Тиен Тхан // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2014. Вып. 7. С. 56–60.
9. Путов В. В., Шелудько В. Н. Новый подход в построении беспоисковых адаптивных систем управления нелинейными динамическими объектами с неопределенным описанием // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2008. Вып. 4. С. 37–50.
10. Nikiforov V. O. Adaptive nonlinear servo-compensation of unknown extremal disturbance // 14<sup>th</sup> IFAC World Congress. Beijing, China, 1999. Vol. I. P., P. 283–289.
11. Fradkov A. L., Miroshnik I. V., Nikiforov V. O. Non-linear and adaptive control of complex systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1999.
12. Iuannon P. A., Kokotovic P. V. Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control // Automatica. 1984. Vol. 20, № 5. P. 583–594.
13. Ikhouane F. I., Krstic V. Adaptive backstepping with parameter projection: robustness and performance // Automatica. 1998. Vol. 34, № 4. P. 429–435.
14. Cai Z., de Queiroz M. S., Dawson D. M. A sufficiently smooth projection operator // IEEE. Trans. Autom. Control. 2006. Vol. 51, № 1. P. 135–139.
15. His L., Costa R. R. Bursting phenomena in continuous-time adaptive systems with a  $\sigma$ -modification // IEEE Trans. on Autom. Control. 1987. Vol. 32, № 1. P. 84–86.
16. Ле Хонг Куанг, Путов В. В., Шелудько В. Н. Робастное управление многостепенным механическим объектом с адаптивной компенсацией неизвестного возмущения // Изв. СПбГЭТУ ЛЭТИ. 2020. Вып. 7. С. 94–102.
17. Адаптивное робастное управление многостепенным нелинейным упругодеформируемым электро-механическим объектом в условиях неопределенности / Ле Хонг Куанг, В. В. Путов, В. Н. Шелудько, А. Д. Скакун // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2021. Вып. 5. С. 43–55.

---

Le Hong Quang, Nguyen Thanh Tien, Doan Van Minh  
*Le Qui Don State Technical University, Hanoi, Vietnam*

V. V. Putov, V. N. Sheludko, A. A. Kuznetsov, M. A. Chernishov  
*Saint Petersburg Electrotechnical University*

## ADAPTIVE ROBUST CONTROL OF A MULTI-STAGE NONLINEAR MECHANICAL OBJECT WITH PARAMETRIC AND FUNCTIONAL UNCERTAINTY (EXACT AND APPROXIMATE APPROACHES)

*Deals with the problems of synthesis and comparative research of adaptive robust control systems for multi-stage nonlinear mechanical objects (for example, multi-link manipulation robots) under conditions of uncertainty in their mathematical models. Namely, robust adaptive control systems for a class of multi-stage mechanical (Lagrangian) objects are constructed and studied, synthesized by two analytical methods: the exact method of adaptive traversal of the integrator with tuning functions, based on the parametric uncertainty of the mathematical model of a nonlinear plant, and the approximate method of majorizing functions, which allows parametric and functional uncertainty of the object model. At the same time, the standard step-by-step procedure for applying the adaptive bypass method of the integrator with tuning functions to the Lagrangian object required some modification proposed in the article. As an example of a multi-stage mechanical object, an industrial four-link manipulation robot is considered, a complete calculation of the functional matrices of its mathematical model is carried out, and an affine parameterization of the equations is carried out with the determination of a  $4 \times 28$ -dimensional matrix of unknown mass-inertial parameters of the object model and a  $28 \times 1$ -dimensional vector function of the regressor. Some results of computer studies of the operability of the constructed adaptive robust systems and a comparative analysis of their effectiveness, illustrated by graphs of transient processes and complex trajectories, are presented.*

**Multi-stage nonlinear mechanical object, adaptive robust control system, cascade structure, parametric and functional uncertainty, adaptive integrator bypass method with customization functions, method of majorizing functions**

---