

der fault conditions // IECON-2013. Nov. 10–13. Austria, Vienna, 2013. P. 1072–1077.

8. Operation of a medium-voltage drive under faulty conditions / J. Rodríguez, J. Pontt, R. Musalem, P. Hammond // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2005. Vol. 52, № 4. P. 1–5.

9. Пронин М. В., Воронцов А. Г. Электромеханотронные комплексы и их моделирование по взаимосвязанным подсистемам. СПб.: Ладога, 2017. 220 с.

10. Пронин М. В., Воронцов А. Г. Силовые полностью управляемые полупроводниковые преобразователи (моделирование и расчет) / ОАО «Электросила». СПб., 2003. 172 с.

---

A. G. Vorontcov  
Ltd «NPC SES»

V. V. Glushakov, M. V. Pronin  
PJSC «Power machines»

## HYBRID CASCADE FREQUENCY CONVERTERS AND THE FEATURES OF THEIR CONTROL

*Structures and control algorithms of hybrid cascade frequency converters are offered. These converters contain powerful high-voltage and less powerful low-voltage converter blocks. In high-voltage blocks are used diode rectifiers and three-phase VSI inverters working with low frequency PWM. The low-voltage active rectifiers and the single-phase inverters are used in low-voltage blocks which work with high frequency PWM. Diode rectifiers are connected to mains through choke, active rectifiers are connected to networks through the transformer. The transformer is executed on partial capacity of loading that allows to improve weight-dimensions properties of the equipment and to reduce energy losses. Low-voltage blocks of frequency converters, besides transmission of electrical energy to load and its recuperation, filter phase currents of mains and load. The operating mode of the converter and balancing of load currents is considered at emergency switching-off of one of low-voltage blocks of frequency converter.*

**3 level frequency converter, cascade multi-level converter, hybrid converter, diode rectifier, AFE, VSI, distortions of currents, emergency mode, simulation**

---

УДК 519.71:62-50

Нгуен Дык Фу, В. В. Путов, Чу Чонг Шы  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Адаптивные системы управления жестким четырехзвенным манипуляционным роботом с электроприводами постоянного тока

*Разработаны и исследованы адаптивные системы управления жестким четырехзвенным манипуляционным роботом с электроприводами постоянного тока. В условиях параметрических неопределенностей объекта в зависимости от степени разработанной математической модели и возможности измерения угловой скорости вращения звена манипулятора рассмотрены три подхода к настройке адаптивных систем, основанные на использовании регрессорной матрицы, прямого и модифицированного методов приближения функций. Проведены компьютерные исследования построенных систем в среде Matlab-Simulink. Показаны результаты исследований в условиях трехкратных изменений массоинерционных параметров в большую и меньшую стороны от средних значений. Проведен сравнительный анализ качества работы адаптивных систем при отработке ступенчатого и синусоидального сигналов, а также программ траекторий круговой формы. Проанализированы преимущества и недостатки трех выбранных подходов. Расчеты матрицы регрессора и уравнений Лагранжа, описывающих динамику четырехзвенного манипулятора, выполнены с помощью стандартного математического обеспечения пакета Mathcad.*

**Адаптивная система управления, жесткий четырехзвенный манипуляционный робот, электропривод постоянного тока, регрессорная матрица, метод приближения функций**

На сегодняшний день манипуляционные роботы широко используются в различных отраслях

науки и техники [1]. Манипуляционный робот – это электромеханический объект, и его важной

---

частью является система автоматического управления (САУ). В разработке САУ в условиях неопределенности параметров объекта, а также при существенной нелинейности и нестационарности параметров используется адаптивное управление, позволяющее повышать стабильность динамических характеристик [2], [3].

Проблема управления жесткими манипуляционными роботами была хорошо проработана в условиях, когда вся динамика привода игнорируется. Однако чтобы иметь хорошие характеристики отслеживания, особенно в случаях высокоскоростного движения и сильно меняющихся нагрузок, задача управления роботом должна учитывать динамику привода.

В известном подходе к построению точных алгоритмов адаптивного управления манипуляционными роботами предполагается, что модель робота линейно параметризуется в форме регрессора [4]–[7]. Однако расчет матрицы регрессора зачастую весьма сложен, что приводит к необходимости разработки адаптивных законов управления неиспользования матрицы регрессора. Одним из таких подходов является подход с использованием метода приближения функций (function approximation technique – FAT) [8]–[10]. Основная идея FAT состоит в том, что можно представить нестационарный неопределенный элемент (параметр) как конечную сумму известных базисных функций с членом разложения (ряда), и для этих членов ряда можно вывести надлежащие законы обновления (настройки), построенные на основе функции Ляпунова, позволяющие обеспечить хорошее качество управления и устранить недостатки точного метода. Предложенный метод FAT также имеет свои преимущества и недостатки. К недостаткам метода FAT относятся большие размерности алгоритмов настройки, что в свою очередь приводит к потребности в больших ресурсах вычислительной техники. На основании этого в данной работе авторами предложен модифицированный (упрощенный) FAT.

В статье разработаны и исследованы адаптивные системы управления жестким четырехзвенным манипуляционным роботом (рис. 1) с электроприводами постоянного тока, построенные на основе использования регрессорной матрицы (метода вычисленного момента) [4], а также на основе прямого метода приближения функций и предлагаемой в статье его модификации.

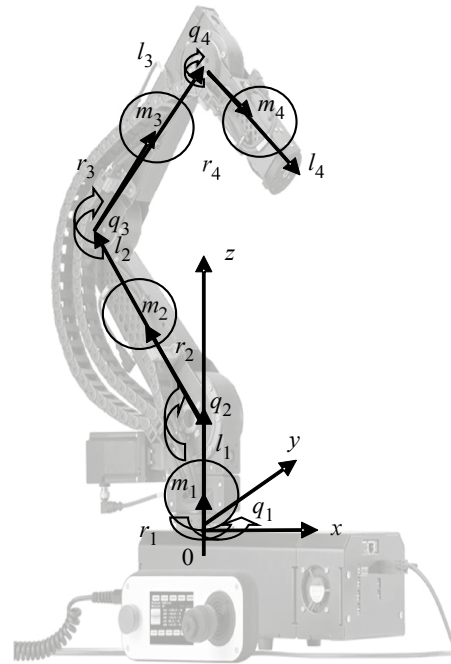


Рис. 1

**Математическая модель.** Дифференциальные уравнения, описывающие движение манипуляционного робота с электроприводами постоянного тока, имеют вид

$$\begin{cases} D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{M}_d; \\ \mathbf{M}_d = k_M \mathbf{I}_я; \\ L_я \dot{\mathbf{I}}_я = \mathbf{u}_я - \mathbf{e}_я - R_я \mathbf{I}_я; \\ \mathbf{e}_я = k_e \dot{\mathbf{q}}. \end{cases} \quad (1)$$

где  $\mathbf{q} = \{q_i\}$  – обобщенные координаты (углы вращения сочленений) манипулятора;  $D = \{D_{ij}\}$  – матрица инерции манипулятора, симметричная и положительно определенная;  $C = \{C_{ij}\}$  – матрица кориолисовых и центробежных сил, зависящих от скоростей;  $\mathbf{G} = \{G_i\}$  – вектор гравитационных сил или сил тяжести;  $\mathbf{M}_d = \{M_{di}\}$  – обобщенные силы, создаваемые силовыми приводами в сочленениях манипулятора;  $\mathbf{u}_я = \{u_{яi}\}$  – напряжение усилителя мощности, подаваемое на якорную обмотку;  $\mathbf{I}_я = \{I_{яi}\}$  – ток якоря;  $L_я = \text{diag} \{L_{яi}\}$ ,  $R_я = \text{diag} \{R_{яi}\}$  – индуктивность и активное сопротивление якорной цепи двигателя соответственно;  $k_M = \text{diag} \{k_{Mi}\}$ ,  $k_e = \text{diag} \{k_{ei}\}$  – постоянные коэффициенты, определяемые конструктивными данными электрической машины;  $\mathbf{e}_я = \{e_{яi}\}$  – ЭДС якорной обмотки двигателя;  $i, j = \overline{1,4}$ .

Для расчета параметры матриц  $D$ ,  $C$  и  $\mathbf{G}$  введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 q_5 &= q_3 + q_4; \quad q_6 = 2q_2; \quad q_7 = 2q_2 + 2q_3; \\
 q_8 &= 2q_2 + 2q_3 + 2q_4; \quad q_9 = 2q_2 + q_3; \\
 q_{10} &= 2q_2 + 2q_3 + q_4; \quad q_{11} = 2q_2 + q_3 + q_4; \\
 c_i &= \cos(q_i), \quad s_i = \sin(q_i), \quad i = \overline{1,11}; \quad a_1 = m_4 r_4^2 I_{y_4}; \\
 a_2 &= m_4 r_4 l_3; \quad a_3 = I_{y_3} + m_3 r_3^2 + m_4 l_3^2; \quad a_4 = m_4 r_4 l_2; \\
 a_5 &= l_2 m_4 r_4; \quad a_6 = l_2 l_3 m_4 + l_2 m_3 r_3; \\
 a_7 &= I_{y_2} + l_2^2 m_3 + l_2^2 m_4 + m_2 r_2^2; \\
 a_8 &= \frac{m_4 r_4^2}{2} - \frac{I_{x_4}}{2} + \frac{I_{z_4}}{2}; \\
 a_9 &= \frac{m_4 l_3^2}{2} + \frac{m_3 r_3^2}{2} - \frac{I_{x_3}}{2} + \frac{I_{z_3}}{2}; \\
 a_{10} &= \frac{I_{z_2}}{2} - \frac{I_{x_2}}{2} + \frac{l_2^2 m_3}{2} + \frac{l_2^2 m_4}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2}; \\
 a_{11} &= \frac{I_{x_2}}{2} + \frac{I_{x_3}}{2} + I_{z_1} + \frac{I_{x_4}}{2} + \frac{I_{z_2}}{2} + \frac{I_{z_3}}{2} + \frac{I_{z_4}}{2} + \\
 &+ \frac{l_2^2 m_3}{2} + \frac{l_2^2 m_4}{2} + \frac{l_3^2 m_4}{2} + \frac{m_2 r_2^2}{2} + \frac{m_3 r_3^2}{2} + \frac{m_4 r_4^2}{2}; \\
 a_{12} &= g(l_2 m_3 + l_2 m_4 + m_2 r_3); \quad a_{13} = g(m_4 l_3 + m_3 r_3); \\
 a_{14} &= g m_4 r_4,
 \end{aligned}$$

где  $m_i, r_i, l_i, I_{x_i}, I_{y_i}, I_{z_i}$  – соответственно, масса  $i$ -го звена, расстояние от соединения  $(i - 1)$ -го звена до центра масс  $i$ -го звена, длина  $i$ -го звена, моменты инерции  $i$ -го звена относительно осей  $x, y, z, i = \overline{1,4}$ .

С помощью реализованных алгоритмов расчета в программе Mathcad получаются:

$$D = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ 0 & D_{23} & D_{33} & D_{34} \\ 0 & D_{24} & D_{34} & D_{44} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \text{где } D_{11} &= a_{11} + a_{10}c_6 + a_9c_7 + a_8c_8 + a_6c_9 + a_6c_3 + \\
 &+ a_2c_{10} + a_4c_{11} + a_2c_4 + a_4c_5; \quad D_{22} = a_7 + a_3 + a_1 + \\
 &+ 2a_6c_3 + 2a_4c_5 + 2a_2c_2; \quad D_{23} = a_1 + a_3 + a_6c_3 + \\
 &+ 2a_2c_4 + a_5c_5; \quad D_{24} = a_1 + a_4c_5 + a_2c_4; \quad D_{33} = a_1 + \\
 &+ a_3 + 2a_2c_4; \quad D_{34} = a_1 + a_2c_4; \quad D_{44} = a_1;
 \end{aligned}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
 C_{11} &= -\left[ \frac{dq_4(s_{10} + s_4)}{2} + (dq_2 + dq_3)s_{10} \right] a_2 - \\
 &- \left[ \frac{(dq_3 + dq_4)(s_{11} + s_5)}{2} + dq_2s_{11} \right] a_4 - \\
 &- \left[ dq_2s_9 + \frac{dq_3(s_9 + s_3)}{2} \right] a_6 - \\
 &- (dq_2 + dq_3 + dq_4)s_8a_8 - (dq_2 + dq_3)s_7a_9 - dq_2s_6a_{10}; \\
 C_{12} &= -dq_1s_{10}a_2 - dq_1s_{11}a_4 - dq_1s_9a_6 - \\
 &- dq_1s_8a_8 - dq_1s_7a_9 - dq_1s_6a_{10}; \\
 C_{13} &= -dq_1s_{10}a_2 - \frac{dq_1(s_{11} + s_5)}{2} a_4 - \\
 &- \frac{dq_1(s_9 + s_3)}{2} a_6 - dq_1s_8a_8 - dq_1s_7a_9; \\
 C_{14} &= -\frac{dq_1(s_{10} + s_4)}{2} a_2 - \frac{dq_1(s_{11} + s_5)}{2} a_4 - dq_1s_8a_8; \\
 C_{21} &= dq_1s_{10}a_2 + dq_1s_{11}a_4 + dq_1s_9a_6 + dq_1s_8a_8 + \\
 &+ dq_1s_7a_9 + dq_1s_6a_{10}; \\
 C_{22} &= -dq_4s_4a_2 - (dq_3s_5 + dq_4s_5)a_4 - dq_3s_3a_6; \\
 C_{23} &= -dq_4s_4a_2 - \left( dq_2s_5 + \frac{dq_4s_5}{2} \right) a_4 - \\
 &- \left( dq_3s_5 + \frac{dq_4s_5}{2} \right) a_5 - (dq_2s_3 + dq_3s_3)a_6; \\
 C_{24} &= -(dq_2s_4 + dq_3s_4 + dq_4s_4)a_2 - \\
 &- \left( dq_2s_5 + \frac{dq_3s_5}{2} + dq_4s_5 \right) a_4 - \frac{dq_3s_5}{2} a_5; \\
 C_{31} &= dq_1s_{10}a_2 + \frac{dq_1(s_{11} + s_5)}{2} a_4 + \\
 &+ \frac{dq_1(s_9 + s_3)}{2} a_6 + dq_1s_8a_8 + dq_1s_7a_9; \\
 C_{32} &= -dq_4s_4a_2 + \left( dq_2s_5 + \frac{dq_4s_5}{2} \right) a_4 - \\
 &- \frac{dq_4s_5}{2} a_5 + dq_2s_3a_6; \\
 C_{33} &= -dq_4s_4a_2; \\
 C_{34} &= -(dq_2s_4 + dq_3s_4 + dq_4s_4)a_2 + \\
 &+ \left( \frac{dq_2s_5}{2} \right) a_4 - \frac{dq_2s_5}{2} a_5; \\
 C_{41} &= \frac{dq_1(s_{10} + s_4)}{2} a_2 + \frac{dq_1(s_{11} + s_5)}{2} a_4 + dq_1s_8a_8; \\
 C_{42} &= (dq_2s_4 + dq_3s_4)a_2 + \\
 &+ \left( dq_2s_5 - \frac{dq_3s_5}{2} \right) a_4 + \frac{dq_3s_5}{2} a_5; \\
 C_{43} &= (dq_2s_4 + dq_3s_4)a_2 - \frac{dq_2s_5}{2} a_4 + \frac{dq_2s_5}{2} a_5
 \end{aligned}$$

и

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{bmatrix},$$

где  $G_2 = a_{12}c_2 + a_{13}c_{12} + a_{14}c_{13}$ ;  $G_3 = a_{13}c_{12} + a_{14}c_{13}$ ;  $G_4 = a_{14}c_{13}$ .

Полученные матрицы  $D$ ,  $C$  и  $G$  позволяют рассчитать матрицу регрессора  $Y$  по формуле

$$D(\mathbf{q})\dot{\mathbf{v}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{v} + G(\mathbf{q}) = Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})\mathbf{a},$$

где  $\mathbf{a} = \{a_i\}_{14 \times 1}$  – вектор неизвестных массоинерционных параметров;  $Y = \{Y_{ij}\}_{4 \times 14}$ ;  $\mathbf{v}$  – некий вектор, зависящий от состояния объекта (см. ниже).

С помощью реализованных алгоритмов расчета в программе Mathcad все элементы матрицы регрессора получены и приведены далее:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Y_{13} = Y_{15} = Y_{17} = Y_{112} = Y_{113} = Y_{114} = \\ &= Y_{211} = Y_{37} = Y_{310} = Y_{311} = Y_{312} = Y_{43} = Y_{46} = \\ &= Y_{47} = Y_{49} = Y_{410} = Y_{411} = Y_{412} = Y_{413} = 0; \\ Y_{12} &= dv_1(c_4 + c_{10}) - v_1 \left[ \frac{dq_4(s_4 + s_{10})}{2} + dq_2s_{10} + \right. \\ &\left. + dq_3s_{10} \right] - \frac{dq_1v_4(s_4 + s_{10})}{2} - dq_1v_2s_{10} - dq_1v_3s_{10}; \\ Y_{14} &= dv_1(c_5 + c_{11}) - v_1 \left[ \frac{dq_3(s_5 + s_{11})}{2} + \right. \\ &\left. + \frac{dq_4(s_5 + s_{11})}{2} + dq_2s_{11} \right] - \frac{dq_1v_3(s_5 + s_{11})}{2} - \\ &\quad - \frac{dq_1v_4(s_5 + s_{11})}{2} - dq_1v_2s_{11}; \\ Y_{16} &= dv_1(c_3 + c_9) - v_1 \left[ \frac{dq_3(s_3 + s_9)}{2} + dq_2s_9 \right] - \\ &\quad - \frac{dq_1v_3(s_3 + s_9)}{2} - dq_1v_2s_9; \\ Y_{18} &= c_8dv_1 - v_1(dq_2s_8 + dq_3s_8 + dq_4s_8) - \\ &\quad - dq_1v_2s_8 - dq_1v_3s_8 - dq_1v_4s_8; \\ Y_{19} &= c_7dv_1 - v_1(dq_2s_7 + dq_3s_7) - dq_1v_2s_7 - dq_1v_3s_7; \\ Y_{110} &= c_6dv_1 - dq_1v_2s_6 - dq_2v_1s_6; \quad Y_{111} = dv_1; \\ Y_{21} &= dv_2 + dv_3 + dv_4; \quad Y_{23} = dv_2 + dv_3; \\ Y_{25} &= c_5dv_3 - v_3 \left( dq_3s_5 + \frac{dq_4s_5}{2} \right) - \frac{dq_3v_4s_5}{2}; \\ Y_{22} &= 2c_4dv_2 - v_4(dq_2s_4 + dq_3s_4 + dq_4s_4) + \\ &\quad + 2c_4dv_3 + c_4dv_4 - dq_4v_2s_4 - dq_4v_3s_4 + dq_1v_1s_{10}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{24} &= 2c_5dv_2 - v_3 \left( dv_2s_5 + \frac{dq_4s_5}{2} \right) - \\ &\quad - v_4 \left( dq_2s_5 + \frac{dq_3s_5}{2} + dq_4s_5 \right) - \\ &\quad - v_2(dq_3s_5 + dq_4s_5) + c_5dv_4 + dq_1v_1s_{11}; \\ Y_{26} &= 2c_3dv_2 - v_3(dq_2s_3 + dq_3s_3) + \\ &\quad + c_3dv_3 - dq_3v_2s_3 + dq_1v_1s_9; \\ Y_{27} &= dv_2; \quad Y_{28} = dq_1v_1s_8; \quad Y_{29} = dq_1v_1s_7; \\ Y_{210} &= dq_1v_1s_6; \quad Y_{212} = c_2; \quad Y_{213} = c_{12}; \quad Y_{214} = c_{13}; \\ Y_{31} &= dv_2 + dv_3 + dv_4; \quad Y_{33} = dv_2 + dv_3; \\ Y_{32} &= 2c_4dv_2 - v_4(dq_2s_4 + dq_3s_4 + dq_4s_4) + \\ &\quad + 2c_4dv_3 + c_4dv_4 - dq_4v_2s_4 - dq_4v_3s_4 + dq_1v_1s_{10}; \\ Y_{34} &= v_2 \left( dq_2s_5 + \frac{dq_4s_5}{2} \right) + \frac{dq_1v_1(s_5 + s_{11})}{2} + \frac{dq_2v_4s_5}{2}; \\ Y_{35} &= c_5dv_2 - \frac{dq_2v_4s_5}{2} - \frac{dq_4v_2s_5}{2}; \\ Y_{36} &= c_3dv_2 + \frac{dq_1v_1(s_3 + s_9)}{2} + dq_2v_2s_3; \\ Y_{38} &= dq_1v_1s_8; \\ Y_{39} &= dq_1v_1s_7; \quad Y_{313} = c_{12}; \quad Y_{314} = c_{13}; \\ Y_{41} &= dv_2 + dv_3 + dv_4; \\ Y_{42} &= v_2(dq_2s_4 + dq_3s_4) + v_3(dq_2s_4 + dq_3s_4) + \\ &\quad + c_4dv_2 + c_4dv_3 + \frac{dq_1v_1(s_4 + s_{10})}{2}; \\ Y_{44} &= v_2(dq_2s_5 - \frac{dq_3s_5}{2}) + c_5dv_2 + \\ &\quad + \frac{dq_1v_1(s_5 + s_{11})}{2} - \frac{dq_2v_3s_5}{2}; \\ Y_{45} &= \frac{dq_2v_3s_5}{2} + \frac{dq_3v_2s_5}{2}; \quad Y_{48} = dq_1v_1s_8. \end{aligned}$$

**Разработка системы управления.** Систему уравнений (1) можно переписать как

$$D(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}(\mathbf{q}) = \mathbf{I}; \quad (2)$$

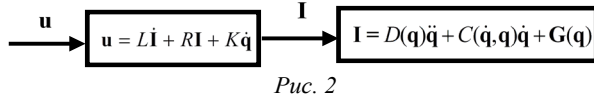
$$L\dot{\mathbf{I}} + R\mathbf{I} + K\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{u}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{I} = k_M \mathbf{I}_я$ ;  $L = L_я k_M^{-1}$ ;  $R = R_я k_M^{-1}$ ;  $K = k_e$ ;  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_я$  – синтезируемое управление.

Пусть массоинерционные параметры ( $a_1 \dots a_{14}$ ) в матрицах  $D_{4 \times 4}$ ,  $C_{4 \times 4}$ ,  $\mathbf{G}_{4 \times 1}$  и параметры в матрицах  $L_{4 \times 4}$ ,  $R_{4 \times 4}$  и  $K_{4 \times 4}$  постоянны и могут принимать значения из некоторых интервалов:

$$\theta = \{ \theta \in \mathbb{R} : |\theta - \theta^*| \leq \Delta\theta \},$$

$\theta^*$  – номинальное значение. Предполагается, что объект полностью управляем и наблюдаем, а компоненты векторов  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\mathbf{I}$  доступны измерению.



Система уравнений (2), (3) имеет каскадную структуру соединения (рис. 2), что позволяет использовать метод обхода интегратора (backstepping) [5]–[7], который заключается в том, что сначала необходимо найти закон управления для  $\mathbf{I}$  в (2):

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_d, \quad (4)$$

чтобы манипулятор выполнял заданную траекторию  $\mathbf{q}_d(t)$ . После этого надо найти закон управления для  $u$  в (3), чтобы получить  $\mathbf{I}$  как выходной сигнал в (3), следующий за сигналом  $\mathbf{I}_d$  в (4). Преимуществом данного подхода является возможность отдельно и просто найти закон управления для каждой каскадной части объекта со своей степенью сложности описания, и не надо одновременно решать одну большую дифференциальную систему с разными степенями сложности.

Как указано во введении, для построения управления используем три метода, синтез которых будет приведен далее.

#### Адаптивное управление на основе использования регрессорной матрицы (Li-Slotine).

Пусть

$$\mathbf{e} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d; \quad \mathbf{s} = \dot{\mathbf{e}} + \Lambda \mathbf{e}; \quad \mathbf{v} = \dot{\mathbf{q}}_d - \Lambda \mathbf{e} \quad (5)$$

где  $\Lambda$  – симметричная, в частности диагональная, числовая матрица с положительными собственными значениями, т. е.  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ ;  $\lambda_{(i)} > 0$ .

Тогда (2) становится уравнением

$$D\dot{\mathbf{s}} + C\mathbf{s} + \mathbf{G} + D\dot{\mathbf{q}}_d - D\Lambda\dot{\mathbf{e}} + C\dot{\mathbf{q}}_d - C\Lambda\mathbf{e} = \mathbf{I}.$$

Закон управления для  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}_d$  будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_d &= \hat{D}\dot{\mathbf{q}}_d - \hat{D}\Lambda\dot{\mathbf{e}} + \hat{C}\dot{\mathbf{q}}_d - \hat{C}\Lambda\mathbf{e} + \hat{\mathbf{G}} - K_d\mathbf{s} = \\ &= \hat{D}\dot{\mathbf{v}} + \hat{C}\dot{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{G}} - K_d\mathbf{s} = Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{a}} - K_d\mathbf{s}. \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом (6) преобразуем (2) и получим

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_d &= \hat{D}\dot{\mathbf{q}}_d - \hat{D}\Lambda\dot{\mathbf{e}} + \hat{C}\dot{\mathbf{q}}_d - \hat{C}\Lambda\mathbf{e} + \hat{\mathbf{G}} - K_d\mathbf{s} = \\ &= \hat{D}\dot{\mathbf{v}} + \hat{C}\dot{\mathbf{v}} + \hat{\mathbf{G}} - K_d\mathbf{s} = Y(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}})\hat{\mathbf{a}} - K_d\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\tilde{D} = D - \hat{D}$ ;  $\tilde{C} = C - \hat{C}$ ;  $\tilde{\mathbf{G}} = \mathbf{G} - \hat{\mathbf{G}}$ ;  $\hat{D}$ ,  $\hat{C}$ ,  $\hat{\mathbf{G}}$  – оценочные матрицы для  $D$ ,  $C$  и  $\mathbf{G}$ .

Закон управления для  $u$  будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{u} = \hat{L}\dot{\mathbf{I}}_d + \hat{R}\mathbf{I} + \hat{K}\dot{\mathbf{q}} - K_c\mathbf{e}_I, \quad (8)$$

где  $\mathbf{e}_I = \mathbf{I} - \mathbf{I}_d$ .

Введем следующие обозначения:

$$\boldsymbol{\Phi} = [\hat{\mathbf{I}}_d^T \quad \mathbf{I}^T \quad \dot{\mathbf{q}}^T]^T; \quad a_I = [L^T \quad R^T \quad K^T]^T;$$

$$\hat{a}_I = [\hat{L}^T \quad \hat{R}^T \quad \hat{K}^T]^T; \quad \tilde{a}_I = a_I - \hat{a}_I.$$

Тогда (8) имеет вид:

$$\mathbf{u} = \hat{a}_I^T \boldsymbol{\Phi} - K_c\mathbf{e}_I. \quad (9)$$

С учетом (9) преобразуем (3) и получаем

$$L\dot{\mathbf{e}}_I + K_c\mathbf{e}_I = -\tilde{a}_I^T \boldsymbol{\Phi}.$$

Рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$\begin{aligned} V(\mathbf{s}, \mathbf{e}_I, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{a}_I) &= \frac{1}{2} \mathbf{s}^T D \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_I^T L \mathbf{e}_I + \\ &+ \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{a}}^T \Gamma \tilde{\mathbf{a}} + \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{a}_I^T \Gamma_I \tilde{a}_I). \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} \mathbf{s}^T (\dot{D} - 2C) \mathbf{s} - \mathbf{s}^T K_d \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{e}_I - \mathbf{e}_I^T K_c \mathbf{e}_I - \\ &- \tilde{\mathbf{a}}^T (\Gamma \dot{\tilde{\mathbf{a}}} + Y^T \mathbf{s}) - \text{Tr}[\tilde{a}_I^T (\Gamma_I \dot{\tilde{a}}_I + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{e}_I^T)]. \end{aligned} \quad (10)$$

Выбираем следующие законы настройки:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{a}}} = -\Gamma^{-1} Y^T \mathbf{s}; \\ \dot{\tilde{a}}_I = -\Gamma_I^{-1} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{e}_I^T. \end{cases} \quad (11)$$

Поставив (11) в (10), получаем:

$$\dot{V} = -[\mathbf{s}^T \quad \mathbf{e}_I^T] Q \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{e}_I \end{bmatrix} < 0.$$

Выбираем  $K_d$  и  $K_c$  так, чтобы  $Q =$

$$= \begin{bmatrix} K_d & -\frac{1}{2} E_{4 \times 4} \\ -\frac{1}{2} E_{4 \times 4} & K_c \end{bmatrix} > 0; \quad E - \text{единичная матрица.}$$

рица.

Известно, что  $N = \dot{D} - 2C$  – кососимметричная матрица [11], [12], по свойству этой матрицы  $\mathbf{s}^T N \mathbf{s} = 0$  для любого вектора  $\mathbf{s}$  [13].

*Замечание.* Данный метод управления требует матрицы регрессора, доступной для измерения угловой скорости вращения и угла каждого звена манипулятора. Матрица регрессора имеет размерность  $[14 \times 4]$ , расчет занимает много времени и достаточно трудоемок. Каждый элемент матрицы регрессора – это сложное выражение, и его

вычисление будет снижать быстродействие управления.

**Адаптивное управление на основе прямого метода приближения функций (FAT).** Так как все элементы матриц  $D$ ,  $C$  и  $G$  непрерывно ограничены, эти матрицы можно представить как

$$D = W_D^T Z_D + \varepsilon_D; C = W_C^T Z_C + \varepsilon_C; \\ G = W_G^T Z_G + \varepsilon_G,$$

где  $W_D \in \mathfrak{R}^{4^2 \beta_D \times 4}$ ,  $W_C \in \mathfrak{R}^{4^2 \beta_C \times 4}$ ,  $Z_D \in \mathfrak{R}^{4^2 \beta_D \times 4}$ ,  $Z_C \in \mathfrak{R}^{4^2 \beta_C \times 4}$  – матрицы весовых констант и матрицы базисных функций соответственно;  $W_G \in \mathfrak{R}^{4 \beta_G \times 4}$ ,  $Z_G \in \mathfrak{R}^{4 \beta_G \times 1}$  – матрица соответственно весовых констант и вектор базисных функций;  $\beta_D, \beta_C, \beta_G$  – числа разложения при приближении функций;  $\varepsilon_{(\cdot)}$  – ошибки приближений.

С использованием выражения (5) и с учетом (6) закон управления для  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}_d$  будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{I}_d = \hat{D}\dot{\mathbf{v}} + \hat{C}\mathbf{v} + \hat{\mathbf{G}} - K_d \mathbf{s} = \\ = \hat{W}_D^T Z_D \dot{\mathbf{v}} + \hat{W}_C^T Z_C \mathbf{v} + \hat{W}_G^T Z_G - K_d \mathbf{s}. \quad (12)$$

Тогда (7) имеет вид  $D\dot{\mathbf{s}} + C\mathbf{s} + K_d \mathbf{s} = \mathbf{I} - \mathbf{I}_d + (\hat{D} - D)\dot{\mathbf{v}} + (\hat{C} - C)\mathbf{v} + (\hat{\mathbf{G}} - \mathbf{G})$ .

Аналогично (9) будем выбирать закон управления для  $\mathbf{u}$  в таком виде:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{f}} - K_c \mathbf{e}_I, \quad (13)$$

где  $\mathbf{f}(\mathbf{I}_d, \mathbf{I}, \dot{\mathbf{q}}) = L\dot{\mathbf{I}}_d + R\mathbf{I} + K\dot{\mathbf{q}}$ .

Подставив (13) в (3), получим:

$$L\dot{\mathbf{e}}_I + K_c \mathbf{e}_I = \hat{\mathbf{f}} - \mathbf{f}. \quad (14)$$

Используем метод приближения функции для вектора  $\mathbf{f}$ :

$$\mathbf{f} = W_f^T \mathbf{Z}_f + \varepsilon_f; W_f \in \mathfrak{R}^{4 \beta_f \times 4}, \mathbf{Z}_f \in \mathfrak{R}^{4 \beta_f \times 1}.$$

Тогда

$$\hat{D} = \hat{W}_D^T Z_D; \hat{C} = \hat{W}_C^T Z_C; \hat{\mathbf{G}} = \hat{W}_G^T Z_G; \hat{\mathbf{f}} = \hat{W}_f^T \mathbf{Z}_f,$$

в результате чего (7) и (14) становятся следующими:

$$D\dot{\mathbf{s}} + C\mathbf{s} + K_d \mathbf{s} = \mathbf{I} - \mathbf{I}_d - \tilde{W}_D^T Z_D \dot{\mathbf{v}} - \\ - \tilde{W}_C^T Z_C \mathbf{v} - \tilde{W}_G^T Z_G + \varepsilon_I;$$

$$L\dot{\mathbf{e}}_I + K_c \mathbf{e}_I = -\tilde{W}_f^T \mathbf{Z}_f + \varepsilon_2,$$

где  $\tilde{W}_{(\cdot)} = W_{(\cdot)} - \hat{W}_{(\cdot)}$ ;  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon_D, \varepsilon_C, \varepsilon_G, \mathbf{s}, \dot{\mathbf{q}}_d)$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_f, \mathbf{e}_I)$ .

Рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$V(\mathbf{s}, \mathbf{e}_I, \tilde{W}_D, \tilde{W}_C, \tilde{W}_G, \tilde{W}_f) = \\ = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T D \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{e}_I^T L \mathbf{e}_I + \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{W}_D^T Q_D \tilde{W}_D + \\ + \tilde{W}_C^T Q_C \tilde{W}_C + \tilde{W}_G^T Q_G \tilde{W}_G + \tilde{W}_f^T Q_f \tilde{W}_f),$$

где

$$Q_D \in \mathfrak{R}^{4^2 \beta_D \times 4^2 \beta_D}; Q_C \in \mathfrak{R}^{4^2 \beta_C \times 4^2 \beta_C}; \\ Q_G \in \mathfrak{R}^{4 \beta_G \times 4 \beta_G}; Q_f \in \mathfrak{R}^{4 \beta_f \times 4 \beta_f}$$

– положительно определенные весовые матрицы. Тогда:

$$\dot{V} = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T (\dot{D} - 2C) \mathbf{s} - \mathbf{s}^T K_d \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{e}_I + \mathbf{s}^T \varepsilon_1 + \mathbf{e}_I^T \varepsilon_2 - \\ - \text{Tr}[\tilde{W}_D^T (Z_D \dot{\mathbf{v}} \mathbf{s}^T + Q_D \dot{\tilde{W}}_D) + \tilde{W}_C^T (Z_C \mathbf{v} \mathbf{s}^T + Q_C \dot{\tilde{W}}_C) + \\ + \tilde{W}_G^T (Z_G \mathbf{s}^T + Q_G \dot{\tilde{W}}_G) + \tilde{W}_f^T (Z_f \mathbf{e}_I^T + Q_f \dot{\tilde{W}}_f)].$$

Выбираем следующие законы настройки:

$$\dot{\tilde{W}}_D = -Q_D^{-1} (Z_D^T \dot{\mathbf{v}} \mathbf{s} + \sigma_D \tilde{W}_D); \\ \dot{\tilde{W}}_C = -Q_C^{-1} (Z_C^T \mathbf{v} \mathbf{s} + \sigma_C \tilde{W}_C); \\ \dot{\tilde{W}}_G = -Q_G^{-1} (Z_G^T \mathbf{s} + \sigma_G \tilde{W}_G); \\ \dot{\tilde{W}}_f = -Q_f^{-1} (Z_f^T \mathbf{e}_I + \sigma_f \tilde{W}_f).$$

Тогда

$$\dot{V} = -[\mathbf{s}^T \quad \mathbf{e}_I^T] Q \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{e}_I \end{bmatrix} + [\mathbf{s}^T \quad \mathbf{e}_I^T] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} + \\ + \sigma_D \text{Tr}(\tilde{W}_D^T \tilde{W}_D) + \sigma_C \text{Tr}(\tilde{W}_C^T \tilde{W}_C) + \\ + \sigma_G \text{Tr}(\tilde{W}_G^T \tilde{W}_G) + \sigma_f \text{Tr}(\tilde{W}_f^T \tilde{W}_f).$$

Имеет место  $\dot{V} \leq 0$  при правильном выборе  $K_d$ ,  $K_c$  и  $\sigma_{(\cdot)}$ , где  $\sigma_{(\cdot)}$  – положительные числа, являющиеся сигма-модификациями ( $\sigma$ -modification) соответствующих матриц или векторов  $(\cdot)$ ; они подбираются для сохранения робастности системы управления с ошибкой приближения и учетом внешнего возмущения [10], [14].

*Замечание.* При данном методе управления не требуется матрица регрессора, не требуется измерять угловые скорости вращения звеньев. Но в то же время в законе управления и законах настрой-

ки требуется большой объем вычислений из-за большой размерности матриц.

**Адаптивное управление на основе предложенного метода приближения функций (FAT).** Из уравнения (2) следует:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{I}_d + \mathbf{e}_1 + \mathbf{L}_1, \quad (15)$$

где  $\mathbf{L}_1 = [E_4 - D(\mathbf{q})]\ddot{\mathbf{q}} - C(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{G}(\mathbf{q})$ ; находим, что закон управления для  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}_d$  будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{I}_d = -K_p \mathbf{q} - K_d \dot{\mathbf{q}} + K_p \mathbf{v}(t), \quad (16)$$

где  $\mathbf{v}(t)$  – некий подобранный сигнал управления для получения  $\mathbf{I} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \mathbf{I}_d$ ;  $K_p$  и  $K_d$  – положительные матрицы пропорциональной и дифференциальной частей.

Тогда (15) с учетом (16) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B[\mathbf{e}_1 + K_p \mathbf{v}(t) + \mathbf{L}_1], \quad (17)$$

где  $A = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} & E_{4 \times 4} \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{8 \times 8}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 4} \\ E_{4 \times 4} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{8 \times 4}$ ;

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T & \dot{\mathbf{q}}^T \end{bmatrix}.$$

В качестве эталонной модели возьмем

$$\dot{\mathbf{x}}_d(t) = A\mathbf{x}_d(t) + BK_p \mathbf{v}_d(t), \quad (18)$$

где

$$\mathbf{v}_d(t) = K_p^{-1}(\ddot{\mathbf{q}}_d + K_d \dot{\mathbf{q}}_d + K_p \mathbf{q}_d). \quad (19)$$

Из (17) и (18) следует:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = A\tilde{\mathbf{x}}(t) + B[\mathbf{e}_1 + K_p \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_1], \quad (20)$$

где

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t), \quad \mathbf{L}_2 = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_d(t).$$

Так как все элементы матриц  $D$ ,  $C$  и  $\mathbf{G}$  непрерывно ограничены, выражение  $\mathbf{L}_1$  можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{L}_1 = \tilde{W}_{L_1}^T \mathbf{Z}_{L_1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{L_1}; \quad \tilde{W}_{L_1} \in \mathfrak{R}^{4\beta_{L_1} \times 4}; \quad \mathbf{Z}_{L_1} \in \mathfrak{R}^{4\beta_{L_1} \times 1}.$$

Из выражения (20) с отношением  $\mathbf{L}_1$  и  $\mathbf{L}_2$ , так, чтобы система (20) была устойчива, получаем, что

$$\mathbf{L}_2 = -K_p^{-1} \hat{W}_{L_1}^T \mathbf{Z}_{L_1}.$$

Тогда (20) имеет вид

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = A\tilde{\mathbf{x}}(t) + B\left(\mathbf{e}_1 + \tilde{W}_{L_1}^T \mathbf{Z}_{L_1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{L_1}\right),$$

где

$$\tilde{W}_{L_1} = W_{L_1} - \hat{W}_{L_1}.$$

Аналогично (13) выберем закон управления для  $u$  в таком виде:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{f}} - K_c \mathbf{e}_1,$$

где  $\mathbf{f}(\dot{\mathbf{I}}_d, \mathbf{I}, \dot{\mathbf{q}}) = L\dot{\mathbf{I}}_d + R\mathbf{I} + K\dot{\mathbf{q}}$ .

Рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$V(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_1, \tilde{W}_{L_1}, \tilde{W}_f) = \frac{1}{2} \left[ \tilde{\mathbf{x}}^T P \tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{e}_1^T L \mathbf{e}_1 + \text{Tr} \left( \tilde{W}_{L_1}^T \Gamma_{L_1} \tilde{W}_{L_1} \right) + \text{Tr} \left( \tilde{W}_f^T \Gamma_f \tilde{W}_f \right) \right],$$

где  $\Gamma_{L_1} \in \mathfrak{R}^{4\beta_D \times 4\beta_D}$ ;  $\Gamma_f \in \mathfrak{R}^{4\beta_f \times 4\beta_f}$  – положительно определенные весовые матрицы.

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_1, \tilde{W}_{L_1}, \tilde{W}_f) &= \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T (A^T P + PA) \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{e}_1^T K_c \mathbf{e}_1 + \\ &+ \tilde{\mathbf{x}}^T P B \mathbf{e}_1 + \tilde{\mathbf{x}}^T P B \boldsymbol{\varepsilon}_{L_1} + \mathbf{e}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_f + \tilde{\mathbf{x}}^T P B \tilde{W}_{L_1}^T \mathbf{Z}_{L_1} - \\ &- \mathbf{e}_1^T \tilde{W}_f^T \mathbf{Z}_f - \text{Tr} \left( \tilde{W}_{L_1}^T \Gamma_{L_1} \dot{\tilde{W}}_{L_1} + \tilde{W}_f^T \Gamma_f \dot{\tilde{W}}_f \right). \quad (21) \end{aligned}$$

В уравнении (21) выберем такое  $P$ , чтобы  $Q$  была положительно определенная матрица:

$$A^T P + PA = -Q.$$

Тогда (21) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_1, \tilde{W}_{L_1}, \tilde{W}_f) &= -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T Q \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{e}_1^T K_c \mathbf{e}_1 + \\ &+ \tilde{\mathbf{x}}^T P B \mathbf{e}_1 + \tilde{\mathbf{x}}^T P B \boldsymbol{\varepsilon}_{L_1} + \mathbf{e}_1^T \boldsymbol{\varepsilon}_f - \\ &- \text{Tr} \left[ \tilde{W}_{L_1}^T (\Gamma_{L_1} \dot{\tilde{W}}_{L_1} - Z_{L_1} \tilde{\mathbf{x}}^T P B) \right] - \\ &- \text{Tr} \left[ \tilde{W}_f^T (\Gamma_f \dot{\tilde{W}}_f + \mathbf{Z}_f \mathbf{e}_1^T) \right]. \end{aligned}$$

Выбираем следующие законы настройки:

$$\dot{\tilde{W}}_{L_1}^T = \Gamma_{L_1}^{-1} \left( \mathbf{Z}_{L_1} \tilde{\mathbf{x}}^T P B - \sigma_{L_1} \hat{W}_{L_1} \right);$$

$$\dot{\tilde{W}}_f^T = -\Gamma_f^{-1} \left( \mathbf{Z}_f \mathbf{e}_1^T + \sigma_f \hat{W}_f \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_1, \tilde{W}_{L_1}, \tilde{W}_f) &= - \left[ \tilde{\mathbf{x}}^T \quad \mathbf{e}_1^T \right] \Lambda_1 \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{e}_1 \end{bmatrix} + \\ &+ \left[ \tilde{\mathbf{x}}^T \quad \mathbf{e}_1^T \right] \Lambda_2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{L_1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_f \end{bmatrix} + \sigma_{L_1} \text{Tr} \left( \tilde{W}_{L_1}^T \hat{W}_{L_1} \right) + \\ &+ \sigma_f \text{Tr} \left( \tilde{W}_f^T \hat{W}_f \right), \end{aligned}$$

где

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}Q & -\frac{1}{2}PB \\ -\frac{1}{2}(PB)^T & K_c \end{bmatrix}; \Lambda_2 = \begin{bmatrix} PB & 0_{8 \times 4} \\ 0_{4 \times 8} & E_{4 \times 4} \end{bmatrix}.$$

При правильном выборе  $K_c$ ,  $Q$  и  $P$  обеспечивается  $\dot{V}(\tilde{x}, e_1, \tilde{W}_{L_1}, \tilde{W}_f) < 0$ .

*Замечание.* Данный метод управления не требует матрицы регрессора, но требует измерения угловых скоростей вращения звеньев манипулятора. По сравнению с прямым методом (FAT) данный упрощенный метод уменьшает размерности настраиваемых матриц в законе управления и законах настройки (от  $\mathcal{R}^{4^2 \beta_{() \times 4}}$  к  $\mathcal{R}^{4 \beta_{() \times 4}}$  в 4 раза), что позволяет уменьшить объем вычислений.

**Результаты компьютерного моделирования и анализа.** В качестве номинальных параметров (или средних значений) объекта были выбраны следующие значения  $m_1 = 50$  кг;  $m_2 = 30$  кг;  $m_3 = 20$  кг;  $m_4 = 10$  кг;  $I_{x_1} = 0.1$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{y_1} = 0.1$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{z_1} = 0.1$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{x_2} = 0.07$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{y_2} = 0.07$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{z_2} = 0.07$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{x_3} = 0.05$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{y_3} = 0.05$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{z_3} = 0.05$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{x_4} = 0.03$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{y_4} = 0.03$  кг·м<sup>2</sup>;  $I_{z_4} = 0.03$  кг·м<sup>2</sup>;  $l_1 = 0.4$  м;  $l_2 = 1.5$  м;  $l_3 = 1.2$  м;  $l_4 = 0.6$  м;  $r_1 = 0.2$  м;  $r_2 = 0.7$  м;  $r_3 = 0.6$  м;  $r_4 = 0.3$  м;  $g = 9.8$  м/с<sup>2</sup>;  $L_i = 0.025$  Гн;  $R_i = 1$  Ом;  $Km_i = 10$  Н·м/А;  $Ke_i = 1$  В·с/рад);  $i = \overline{1, 4}$ .

Для системы управления, построенной на основе использования регрессорной матрицы, параметры управления:  $K_d = 6.10^4 \text{diag}(1, 1, 1, 0.1)$ ;  $K_c = 18 \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ ;  $\Gamma_a^{-1} = 0.3E_{14 \times 14}$ ;  $\Gamma_I^{-1} = 9.10^{-15}E_{12 \times 12}$ ;  $\lambda_1 = 23$ ;  $\lambda_2 = 22$ ;  $\lambda_3 = 22$ ;  $\lambda_4 = 22$ .

Для системы управления, построенной на основе прямого метода FAT, параметры управления в модели с разложением в ряд Фурье:  $\beta_f = 11$ ;  $\omega_0 = \pi/10$ ;  $K_d = 6.10^4 \text{diag}(1, 1, 1, 0.1)$ ;  $K_c = 18 \times \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ ;  $Q_D^{-1} = 0.01E_{176 \times 176}$ ;  $Q_C^{-1} = 0.1E_{176 \times 176}$ ;  $Q_G^{-1} = 1E_{44 \times 44}$ ;  $Q_f^{-1} = 0.1E_{44 \times 44}$ ;  $\lambda_1 = 23$ ;  $\lambda_2 = 22$ ;  $\lambda_3 = 22$ ;  $\lambda_4 = 22$ .

Параметры управления в модели с разложением в полином Лежандра:  $\beta_f = 5$ ;  $\omega_0 = \pi/10$ ;  $K_d = 6.10^4 \text{diag}(1, 1, 1, 0.1)$ ;  $K_c = 18 \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ ;  $Q_D^{-1} = 0.01E_{80 \times 80}$ ;  $Q_C^{-1} = 0.1E_{80 \times 80}$ ;  $Q_G^{-1} = 1E_{20 \times 20}$ ;  $Q_f^{-1} = 0.1E_{20 \times 20}$ ;  $\lambda_1 = 23$ ;  $\lambda_2 = 22$ ;  $\lambda_3 = 22$ ;  $\lambda_4 = 22$ .

Для системы управления, построенной на базе упрощенного метода FAT, параметры управления в модели с разложением в ряд Фурье:  $\beta_f = 11$ ;  $\omega_0 = \pi/10$ ;  $K_d = 6.10^4 \text{diag}(1, 1, 1, 0.1)$ ;  $K_p = 2.10^6 \times \text{diag}(1, 1, 1, 0.1)$ ;  $K_c = 18 \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ ;  $P = 0.1 \times E_{8 \times 8}$ ;  $\Gamma_f^{-1} = 0.1E_{44 \times 44}$ ;  $\Gamma_{L_1}^{-1} = 0.1E_{44 \times 44}$ .

Параметры управления в модели с разложением в полином Лежандра:  $\beta_f = 5$ ;  $\omega_0 = \pi/10$ ;  $K_d = 6.10^4 \text{diag}(1, 1, 1, 0.1)$ ;  $K_p = 2.10^6 \text{diag}(1, 1, 1, 0.1)$ ;  $K_c = 18 \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ ;  $P = 0.1E_{8 \times 8}$ ;  $\Gamma_f^{-1} = 0.1E_{20 \times 20}$ ;  $\Gamma_{L_1}^{-1} = 0.1E_{20 \times 20}$ .

Результаты компьютерного моделирования для построенных в среде Matlab-Simulink моделей:

1. Подача на вход системы единичного ступенчатого задающего воздействия (рис. 3).

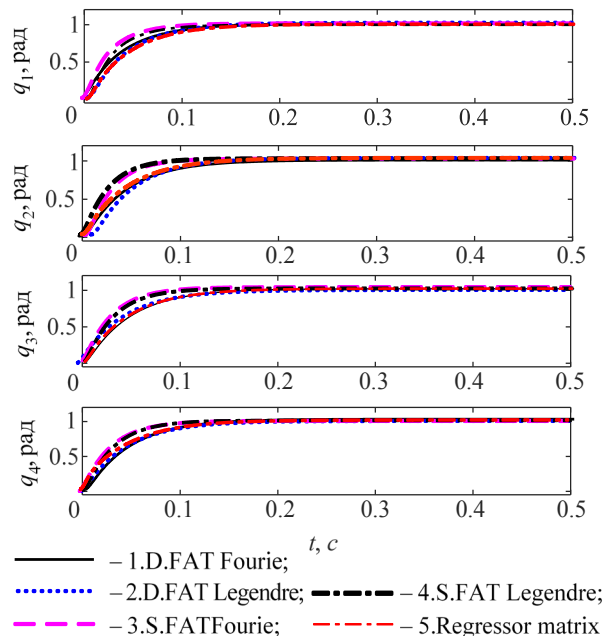


Рис. 3

Рассмотрим изменение четвертой массы (увеличение/уменьшение до 3 раз):

– увеличение до 3 раз (рис. 4);



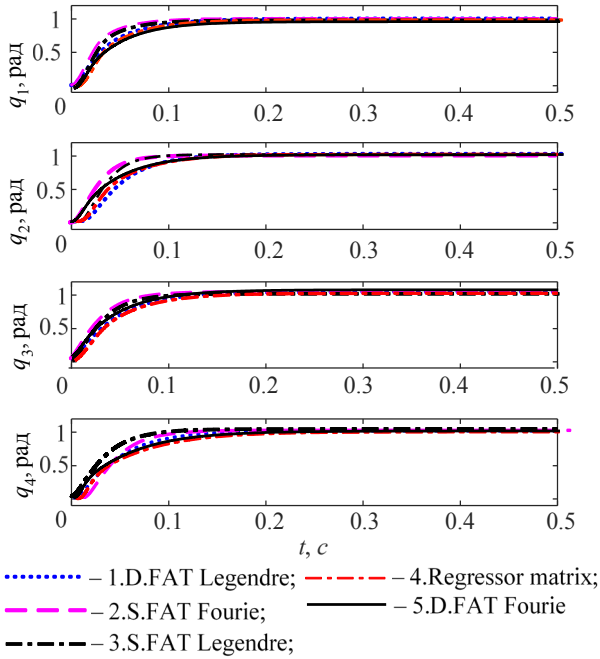


Рис. 4

– уменьшение до 3 раз (рис. 5).

2. Подача на вход системы синусоидального сигнала задающего воздействия (рис. 6).

3. Воспроизведение движения по окружности (рис. 7, а и б).

Для оценки качества работы робота-манипулятора с рассмотренными адаптивными законами были рассчитаны ошибки выполнения его движения по заданной траектории в течение заданного времени  $t_B$  (в данной работе  $t_B = 2 c$ ) по следующей формуле:

$$A = \int_0^{t_B} |e(t)| dt = \sum_{i=1}^4 \int_0^{t_{B_i}} |\mathbf{q}_i(t) - \mathbf{q}_{di}(t)| dt.$$

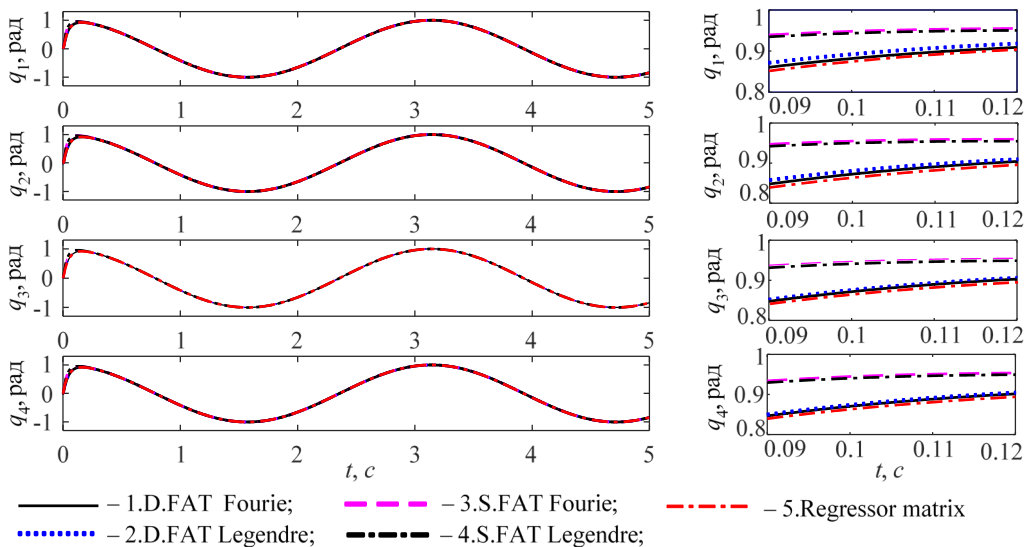


Рис. 6

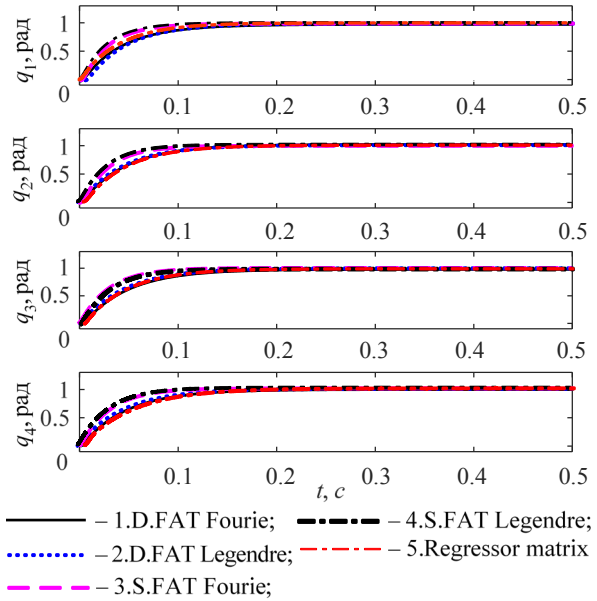


Рис. 5

Результаты расчета значений ошибки  $A$  приведены в таблице.

Из результатов моделирования, приведенных в таблице и на рис. 3–7, следует, что качество управления у адаптивной системы, разработанной на основе регрессорной матрицы, самое худшее, а наилучшее качество наблюдается у прямого FAT с разложением Фурье (напоминаем, что число членов разложения в ряде Фурье  $\beta = 11$ , что в два с небольшим раза больше, чем в разложении на основе полинома Лежандра ( $\beta = 5$ )). Однако если сравнивать ошибки у «упрощенного FAT» и «прямого FAT», видим, что разница в ошибке не очень велика (напоминаем, что размерности матриц настройки у «прямого FAT» в 4 раза больше, чем у «упрощенного FAT»). Ошибка слежения за задан-

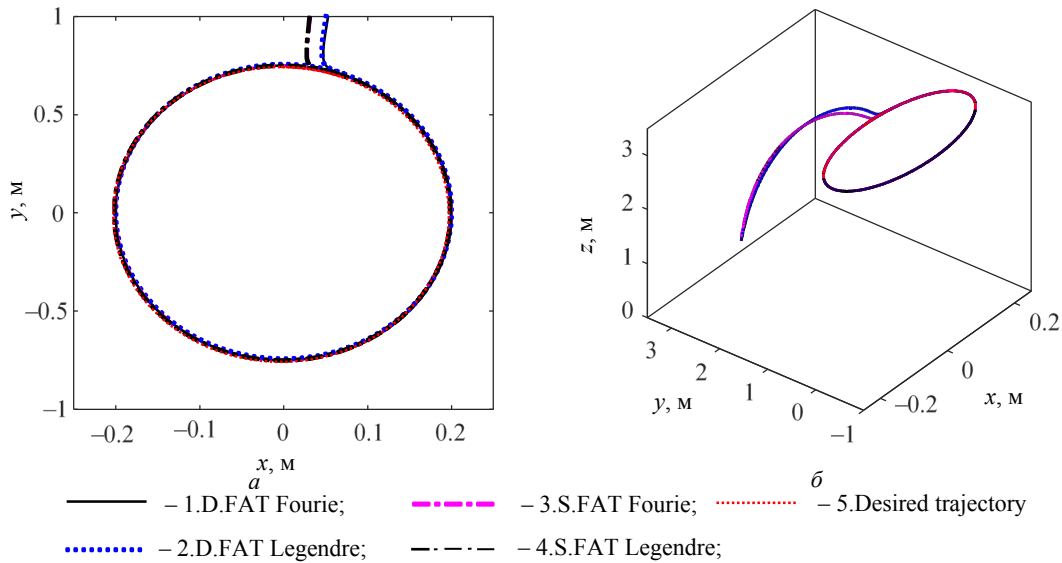


Рис. 7

Характеристика	Адаптация на основе								
	регрессорной матрицы			прямого FAT (Фурье   Лежандра)			упрощенного FAT (Фурье   Лежандра)		
	1/3	1	3	1/3	1	3	1/3	1	3
Изменение параметров объекта, кратность									
Ошибка обработки ступенчатого сигнала, рад/с	0.1826	0.1853	0.1878	0.1842	0.185	0.1877	0.1212	0.1229	0.1278
				0.1806	0.1815	0.1844	0.1214	0.1229	0.1284
Ошибка обработки синусоидального сигнала, рад/с	0.1934	0.1964	0.2024	0.1864	0.1899	0.1953	0.1231	0.1258	0.1345
				0.1832	0.1857	0.1939	0.1238	0.1267	0.1361
Ошибка при движении по окружности, рад/с	-	-	-	0.07519	0.07645	0.08044	0.04804	0.04928	0.05318
				0.07245	0.07377	0.07785	0.04943	0.05092	0.05556

ной траекторией при синусоидальном сигнале самая большая, минимальная же ошибка наблюдается при движении по окружности.

**Заключение.** При разработке адаптивной системы управления жестким четырехзвенным манипуляционным роботом с электроприводами постоянного тока были показаны:

- Расчет математической модели, описывающей точную динамику типовой модели робота-манипулятора. Работа трудоемкая, но реализованный алгоритм расчета позволяет ограничить ошибку и ускорить процесс расчета; также его можно применять для других многозвенных роботов-манипуляторов. Показанный расчет позволяет рассчитать матрицу регрессора для дальнейшего использования в задачах управления.

- Использование рекурсивной итеративной адаптивной процедуры синтеза значительно облегчило решение задачи. Во всех разработанных

системах сначала синтезировались управляемые параметры для робота-манипулятора без учета электродинамики привода, после этого синтезировались параметры для полной системы. Этот подход позволяет уменьшить время разработки и ограничить ошибку в процессе синтеза.

- Три разработанные адаптивные системы имеют свои преимущества и недостатки в синтезе алгоритма управления, поэтому на практике используется компромиссное решение между качеством (оценивается по ошибке  $A$ ), числом и типами датчиков, вычислительным ресурсом и требованием точного описания типовой модели объекта. В работе показано, что по качеству, игнорируя требование о точном описании объекта, можно выбрать систему на основе упрощенного FAT; по вычислительному ресурсу можно выбрать систему на основе регрессорной матрицы; по числу и типу датчиков можно выбрать систему на основе прямого FAT.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kemp C. C., Edsinger A., Torres-Jara E. Challenges for robot manipulation in human environments: Developing robots that perform useful work in everyday settings // IEEE Robot. Autom. Mag. Mar. 2007. Vol. 14, № 1. P. 20–29.

2. Путов В. В., Шелудько В. Н. Адаптивные и модальные системы управления многомассовыми нелинейными упругими механическими объектами. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2007. 24 с.

3. Борцов Ю. А., Поляхов Н. Д., Путов В. В. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. Л.: Энергоатомиздат, 1984. 216 с.

4. Slotine J. J. E., Li W. On the adaptive control of robot manipulators // Int. J. of Robotics Research. 1987. Vol. 6, № 3. P. 49–58.

5. Chun-Yi S., Stepanenko Y. Backstepping based hybrid adaptive control of robot manipulators incorporating actuator dynamics // Proc. of the 1996 IEEE IECON. 22<sup>nd</sup> Intern. Conf. on Industrial Electronics, Control and Instrumentation. Taipei, Taiwan, 1996. Vol. 2. P. 1258–1263.

6. Qinglei H., Liang X., Aihua Z. Adaptive backstepping trajectory tracking control of robot manipulator // J. of the Franklin Institute. 2012. Vol. 349, № 3. P. 1087–1105.

7. Patel B., Pan Y., Ahmad U. Adaptive backstepping control approach for the trajectory tracking of mobile manipulators // 2017 IEEE Intern. Conf. on Robotics and Biomimetics (ROBIO). Macau, 2017. P. 1769–1774. URL: <http://ieeexplore.ieee.org/stamp/stamp.jsp?tp=&arnumber=8324674&isnumber=8324378> (дата доступа 12.07.2019).

8. Al-Shuka H. F. N. On local approximation-based adaptive control with applications to robotic manipula-

tors and biped robots // Int. J. Dynam. Control. 2018. Vol. 6, № 1. P. 339–353.

9. Huang A. C., Kuo Y. S. Sliding control of nonlinear systems containing time-varying uncertainties with unknown bounds // Int. J. Control. 2001. Vol. 74, № 3. P. 252–264.

10. An-Chyau Huang, Ming-Chih Chien. Adaptive control of robot manipulators: a unified regressor-free approach. Singapore: World Scientific, 2010. 276 p.

11. Hayder Al-Shuka, Song R. Decentralized adaptive partitioned approximation control of high degrees-of-freedom robotic manipulators considering three actuator control modes // Intern. J. of Dynamics and Control. Berlin, Heidelberg: Springer, 2018. URL: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01930453> (дата доступа 12.07.2019).

12. Murray R. M., Li Z., Sastry S. S. A Mathematical introduction to robotic manipulation. Boca Raton, FL: CRC Press, Published, 1994. 480 p.

13. Duff I. S. The design and use of a sparse direct solver for skew symmetric matrices // J. of Computational and Applied Mathematics. 2009. Vol. 226, № 1. P. 50–54.

14. Ioannou P., Sun J. Robust adaptive control. URL: [http://www-rcf.usc.edu/~ioannou/Robust\\_Adaptive\\_Control.htm](http://www-rcf.usc.edu/~ioannou/Robust_Adaptive_Control.htm) (дата доступа 12.07.2019).

---

Nguyen Duc Phu, V. V. Putov, Chu Trong Su  
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

## ADAPTIVE CONTROL SYSTEMS OF A RIGID 4-DOF ROBOT MANIPULATOR WITH DIRECT CURRENT DRIVES

*Adaptive control systems for a rigid 4-DOF (degree of freedom) robotic manipulator with direct current drives have been developed and investigated. Under the conditions of the parametric uncertainties of the object, depending on the degree of the developed mathematical model and the possibility of measuring the angular velocity of rotation of the manipulator link, three approaches to adapting the system were considered, based on the use of a regressor matrix, on the direct method of function approximation technique and on the modified method of function approximation technique. Computer investigations of designed models in the Matlab-Simulink environment were carried out. Results are shown in conditions of parametric uncertainty three times more or less from the mean values. It is shown and compared the quality of work of the adaptive system when applying to the input of a unit step signal, a sinusoidal signal and the signal to reproduce the given circular motion. The main advantages and disadvantages of the three selected approaches were noted. The calculations of the regressor matrix and the Lagrange equations describing the dynamics of the 4-DOF manipulator were performed using standard mathematical Mathcad program.*

**Adaptive control system, rigid 4-DOF robotic manipulator, direct current drive, regressor matrix, function approximation technique**

---