УДК 621.3.001

А. Г. Дерипаска
АО Концерн «Океанприбор» (СПб)

М. В. Соклакова, Э. П. Чернышев
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

К рациональному применению теории дискретных цепей при разработке общего аналитического метода оценки устойчивости автоколебаний в релейных цепях

Данная статья представляет собой расширение разработанного ранее аналитического метода оценки автоколебаний в релейных системах, основы которого описаны в [1]. Релейные системы обладают высоким быстродействием, хорошей помехозащищенностью и простотой в работе, вследствие чего распространены в системах управления. Возможность получения аналитического описания автоколебаний в релейной системе потребовала разработки новых методов оценки устойчивости решения. Метод анализа устойчивости для симметричных колебаний, когда изменения происходят через половину периода ($M\tau$), показал хорошие результаты в сравнении с известными методами. Здесь описывается дальнейшее развитие этого метода и обобщение его на случай несимметричных колебаний, когда изменения происходят через период (MT). В случае аналитического исследования релейных систем высокого порядка могут возникнуть существенные трудности при формировании характеристического полинома уравнений, оценивающих устойчивость вариаций автоколебаний. Поиску оптимального подхода к составлению характеристического полинома и посвящена настоящая статья. Специфика релейных систем такова, что характер вариаций сигналов позволяет использовать для их анализа теорию дискретных цепей, на которой и базируется предложенный авторами метод оценки устойчивости.

Релейная система, автоколебания, характеристический полином, передаточная функция, устойчивость, дискретная цепь

Системы управления, содержащие релейный элемент, сугубо нелинейные, и для них не существует общих методов расчета [2]. Для каждого класса нелинейных систем разрабатываются свои методы расчета, обычно приближенные. Для систем, содержащих релейный элемент, возможен и расчет автоколебаний аналитическим методом, основы которого были разработаны в [1], [3], [4]. Также для полученного аналитического решения симметричных автоколебаний разработаны основы метода исследования устойчивости с применением аппарата дискретных цепей [1], [5]. Так как симметричные автоколебания – это частный случай, необходимо распространить разработанный метод исследования устойчивости и на более общий случай несимметричных автоколебаний.

Постановка задачи. Рассматривается одноконтурная релейная система с нормированной «запаздывающей» гистерезисной характеристикой релейного элемента

$$y(t) = \operatorname{sign}[x(t) + \operatorname{sign}\ y(t-)], \qquad (1)$$

где x, y – входной и выходной сигналы релейного элемента; t – время; $y(t) = \lim y(t-\gamma)$, $\gamma \to 0$ – значение сигнала y в момент, предшествующий рассматриваемому.

Линейная часть цепи описывается передаточной функцией

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{kB(s)}{A(s)} = \frac{kB(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s-s_i)}, \qquad (2)$$

где $X(s) \div x(t)$, $Y(s) \div y(t)$ – изображения по Лапласу и оригиналы входного и выходного сигналов релейного элемента, s – аргумент преобразования Лапласа, $\div$ – знак соответствия; $B(s)$, $A(s)$ – полиномы, причем порядок полинома знаменателя $n \geq m+2$ минимум на 2 порядка выше порядка m полинома числителя; s_i – корни знаменателя; k – статический коэффициент.

Устойчивость автоколебаний, возникающих в такой релейной системе, оценивается по Ляпунову [3], [6], т. е.

$$x_\xi(0) = \beta \to x_\xi(t) \leq \alpha(\beta),\; t \to \infty, \tag{3}$$

причем в (3) x_ξ – вариация переменной x, обусловленная какой-либо причиной; β, α – бесконечно малые.

Особенности аналитического расчета параметров автоколебаний в методе МТ. В отличие от классического приближенного расчета параметров автоколебаний, описанного, например, в [3], [4], авторами предложена несложная методика точного анализа [1], [7], которая позволяет не только уточнить данные приближенного расчета, но также рассмотреть важные для практики ситуации, в которых приближенные методы не дают решения, например [1], когда в (2) $n = m+1$.

Кратко последовательность расчета в разрабатываемом общем аналитическом методе MT (в сравнении с разработанным $M\tau$) сводится к следующему. Условно предположим, что $y(t) \equiv 0$ при $t < 0$. Записываем описание автоколебаний на выходе релейного элемента при $t > 0$:

$$y(t) = y_1(t) + y_1(t-T) + \\ + y_1(t-2T) + \ldots \div Y(s) = \frac{Y_1(s)}{1-e^{-sT}}. \tag{4}$$

Здесь описание условного первого периода автоколебания при $0 < t < T$ в соответствии с (1) имеет вид

$$Y_1(s) = \frac{1 - 2e^{-s\tau} + e^{-sT}}{s}, \tag{5}$$

где моменты $t = 0$ и $t = T$ соответствуют «движению» по правой ветви гистерезисной характеристики (1), а $t = \tau$ – переключению по левой ветви, т. е. $y(\tau-) = 1$, а $y(\tau+) = -1$.

Сигнал на выходе линейной части при этом

$$X(s) = H(s)\,Y(s) = \frac{kB(s)}{\prod(s-s_i)} \frac{Y_1(s)}{1-e^{-sT}} = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{s-s_i} + \frac{X_1(s)}{1-e^{-sT}} = X_{\text{св}}(s) + X_{\text{вын}}(s), \tag{6}$$

где согласно [8] $X_{\text{св}}(s) = \sum \frac{A_i}{s-s_i}$ – свободная составляющая решения уравнений линейной части (определяется полюсами передаточной функции), а $X_{\text{вын}}(s)$ – вынужденная составляющая, которая должна иметь [8] математическую форму воздействия (4), (5).

Коэффициенты A_i в разложении свободной составляющей определяются согласно [8] как вычеты в полюсах

$$A_i = \lim_{s \to s_i} (s-s_i) X(s). \tag{7}$$

Тогда искомое описание установившихся (вынужденных) автоколебаний в пределах условного первого периода при $0 < t < T$

$$X_1(s) = \left[X(s) - X_{\text{св}}(s)\right]\left(1-e^{sT}\right) = \\ = H(s)Y_1(s) - \sum \frac{A_i}{s-s_i}. \tag{8}$$

С учетом (4), (5) имеем

$$H(s)Y_1(s) = \frac{H(s)}{s}\left(1 - 2e^{-s\tau} + e^{-sT}\right) = \\ = H_1(s)\left(1-2e^{-s\tau}\right), \tag{9}$$

т. е. в (9) согласно (5), (6) используется $H_1(s)$ – изображение переходной характеристики $h_1(t)$, а слагаемые с множителем e^{-sT} отброшены, поскольку они «не работают» в интервале $0 < t < T$.

Переходная характеристика с учетом (2)

$$H_1(s) = \frac{H(s)}{s} = \frac{kB(s)}{s\prod(s-s_i)} = \\ = \frac{B_0}{s} + \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i}{s-s_i} \div h_1(t) = B_0 + \sum B_i e^{s_i t}, \tag{10}$$

где

$$B_i = \lim_{s \to s_i} (s-s_i) H_1(s). \tag{11}$$

В то же время, уточняя (7), имеем

$$A_i = (s - s_i)\left[H_1(s)\frac{1 - 2e^{-s\tau} + e^{-sT}}{1 - e^{-sT}}\right]_{s=s_i} =$$

$$= B_i\frac{1 - 2e^{-s_i\tau} + e^{-s_iT}}{1 - e^{-s_iT}}. \qquad (12)$$

С учетом (9)–(12) описание установившихся автоколебаний (8) в интервале $0 < t < T$ можно записать в виде

$$X_1(s) = \left[\frac{B_0}{s} + \sum\frac{B_i}{s - s_i}\right]\left(1 - 2e^{-s\tau}\right) - \sum\frac{A_i}{s - s_i}. \qquad (13)$$

На основании (13) описание автоколебаний в t-области до момента переключения релейного элемента (т. е. при $0 < t < T$) будет

$$x_1(t) = B_0 + \sum(B_i - A_i)e^{s_it}. \qquad (14)$$

На основании (11), (12) разность коэффициентов

$$B_i - A_i = B_i\frac{-2e^{-s_iT} + 2e^{-s_i\tau}}{1 - e^{-s_iT}}. \qquad (15)$$

Далее находим параметры автоколебаний τ и T. При этом учитываем, что $n \geq m - 2$ в (2), т. е. функции $x_1(t)$ и $\dot{x}(t)$ непрерывны. Зная значения координаты $x_1(t)$ в моменты переключения релейного элемента, можем записать систему

$$\begin{aligned} x_1(0) &= B_0 + \sum\left(B_i - A_i\right) = 1; \\ x_1(\tau) &= B_0 + \sum\left(B_i - A_i\right)e^{s_i\tau} = -1. \end{aligned} \qquad (16)$$

Поскольку разность $\left(B_i - A_i\right)$ согласно (15) зависит от T и τ, решая систему (16), находим искомые моменты переключения релейного элемента.

Таким образом, расчет автоколебаний в описанном общем методе MT незначительно усложняется в сравнении с анализом симметричных автоколебаний в методе $M\tau$, предложенном в [1].

Уравнения дискретной цепи, описывающей вариации автоколебаний. Для анализа устойчивости автоколебаний в разрабатываемом методе MT используем идею перехода к дискретной цепи из [1], [7]. Допустим, при $t = 0$ к релейной системе приложено (аналогично [3]) «исчезающее» воздействие $f_{\text{вх}}(t) = \beta\delta(t)$ вида дельта-функции [8] с бесконечно малой площадью β. Это приведет к преждевременному срабатыванию релейного элемента и возникновению вариаций сигналов как на выходе релейного элемента $y_\xi = \tilde{y} - y$, так и на выходе линейной части $x_\xi = \tilde{x} - x$, где $\tilde{y}$, $\tilde{x}$ – «возмущенные» сигналы [3].

В соответствии с (1) вид вариации сигналов на выходе релейного элемента очевиден – это будут короткие прямоугольные импульсы длительностью Δt:

$$\begin{aligned} y_\xi(t) = 2\Delta t_0\delta(t) - 2\Delta t_{01}\delta(t - \tau) + 2\Delta t_1\delta(t - T) - \\ - 2\Delta t_{12}\delta(t - T - \tau) + 2\Delta t_2\delta(t - 2T) - ..., \end{aligned} \qquad (17)$$

что во многом соответствует описанию дискретных сигналов [8], чем и обусловлен переход к использованию теории дискретных цепей для анализа устойчивости автоколебаний.

Длительность импульсов Δt_n (при $n = 1, 2, \ldots$) приближенно можно определить по формуле

$$\Delta t_n = \frac{f_{\text{вх}}(t) + x_\xi(nT)}{\dot{x}_0}, \qquad (18)$$

где $\dot{x}_0 = \dot{x}(0-) = \dot{x}_1(0-) = \dot{x}_1(T-)$ – значение скорости изменения координаты x в моменты переключения релейного элемента $t = 0$, $t = T$.

Уравнения дискретной цепи, соответствующей (17), (18) и (2), можно записать в виде

$$Y_\xi(z) = \frac{2\left[\beta + X_\xi(z)\right]}{\dot{x}_0}; \; X_\xi(z) = H_{\text{д}}(z)Y_\xi(z), \qquad (19)$$

где используется z-преобразование дискретных значений соответствующих переменных релейной системы; $H_{\text{д}}(z)$ – передаточная функция линейной части дискретной цепи, определяется по (2); «исчезающее» воздействие $f_{\text{вх}}(t) = \beta\delta_0(nT) \div$ $\div F_{\text{вх}}(z) = \beta$ заменено дискретной дельта-функцией [8] бесконечно малой величины β.

Передаточная функция замкнутой линейной системы (19) для вариаций

$$H_{\text{з}}(z) = \frac{X_\xi(z)}{\beta} = \frac{2H_{\text{д}}(z)}{\dot{x}_0 - 2H_{\text{д}}(z)}, \qquad (20)$$

при этом ее знаменатель

$$P(z) = \dot{x}_0 - 2H_{\text{д}}(z) = 0 \qquad (21)$$

является характеристическим полиномом системы (19), а корни z_k характеристического полинома (21) определяют устойчивость автоколебаний. Действительно, решение (20) будет

$$x_\xi(nT) = \sum D_k z_k^n \beta, \qquad (22)$$

где D_k – это коэффициенты разложения (20) на простейшие дроби по полюсам z_k. Автоколебания устойчивы, если

$$|z_k| \le 1, \qquad (23)$$

т. е. корни характеристического полинома по модулю не должны быть больше «1» для устойчивых автоколебаний в (22) в соответствии с критерием устойчивости по Ляпунову (3).

Так как для релейной системы характерны незатухающие, повторяющиеся через период автоколебания, то в методе *MT* им в (23) должен соответствовать корень «единичного» модуля

$$z_1 = 1. \qquad (24)$$

Особенности выбора вариантов записи передаточной функции дискретной цепи. Поскольку на основании (17) вариация сигнала на выходе релейного элемента приближенно описывается дельта-функциями, то при переходе к уравнениям дискретной цепи логично использовать метод соответствия импульсных характеристик $h(t)$ аналоговой и дискретной цепей, описывающих линейную часть в дискретные моменты времени $t = nT$, т. е.

$$h_{д0}(nT) = h(nT) - h(nT - \tau), \qquad (25)$$

причем вторая составляющая учитывает наличие четных слагаемых в (17), т. е. влияние обратного переключения релейного элемента внутри периода через $t = \tau$.

При уточнении (25) следует, как указано в [1], отбросить начальное значение результирующей импульсной характеристики, поскольку при $m < n$ в (2) скачок вариации с выхода релейного элемента при $t = 0$ не проходит на вход релейного элемента. Следовательно, импульсная характеристика дискретной цепи должна иметь вид

$$h_д(nT) = h_{д0}(nT) - h_{д0}(0) =$$
$$= h(nT) - h(nT - \tau) - h(0) - h(\tau). \qquad (26)$$

Используя (10), (11), записываем импульсную характеристику [7]

$$h(t) = h_1'(t) = \sum B_i s_i e^{s_i t} \delta_1(t), \qquad (27)$$

где $\delta_1(t)$ – единичная ступенчатая функция [8].

Таким образом, импульсная характеристика дискретной цепи на основании (26), (27)

$$h_д(nT) = \sum B_i s_i e^{s_i nT} \delta_1(nT) - \sum B_i s_i e^{-s_i \tau} \delta_1(nT) -$$
$$- \sum B_i s_i e^{s_i t} \delta_0(nT) + \sum B_i s_i e^{-s_i \tau} \delta_0(nT), \qquad (28)$$

где $\delta_1(nT)$ – дискретная единичная ступенчатая последовательность [8].

На основании (28) передаточная функция дискретной цепи будет [8]

$$H_д(z) = \sum B_i s_i \left[\frac{z}{z - e^{s_i T}} - \frac{e^{-s_i \tau} z}{z - e^{s_i T}} - 1 + e^{s_i \tau} \right]. \qquad (29)$$

Особенностью (26), (28), (29) при $m \le n - 2$ в (2) является то, что начальное значение импульсной характеристики по теореме о начальном значении [8]

$$h(0) = sH(s) = 0 = \sum B_i s_i \; ; \; s \to \infty. \qquad (30)$$

Следовательно, третья сумма в (28) и « -1 » в (29) могут быть опущены. В этом случае вместо (29) с учетом (30) можно записать

$$H_д(z) = \sum B_i s_i \left[e^{-s_i \tau} + \frac{z\left(1 - e^{-s_i \tau}\right)}{z - e^{-s_i T}} \right]. \qquad (31)$$

Начальное значение скорости изменения координаты $\dot{x}_0$, используемое в характеристическом полиноме (21), определяется, как указано в экспликации к (18), на основании (14), (15) и с учетом $n \ge m + 2$ будет:

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_1(0) = \sum (B_i - A_i) s_i =$$
$$= \sum 2 B_i s_i \frac{e^{-s_i \tau} - e^{-s_i T}}{1 - e^{-s_i T}}. \qquad (32)$$

С учетом (30), где $\sum B_i s_i = 0$, возможен второй вариант записи:

$$\dot{x}_0 = -\sum A_i s_i \, , \qquad (33)$$

что (при подстановке (29) или (31), (32) или (33) в характеристический полином (21) при передаточной функции (2) второго порядка и выше) может существенно усложнить расчет характеристического полинома.

Особенности рациональной записи характеристического полинома дискретной цепи. С учетом двух различных вариантов (29) и (31) записи передаточной функции дискретной цепи, а также вторых вариантов (32) и (33) начального значения скорости приходим к выводу, что возможны четыре варианта записи характеристического полинома

(21), определяющего устойчивость автоколебаний. В трех случаях это приводит к существенному усложнению анализа характеристического полинома при оценке устойчивости автоколебаний, в частности к потере «физичности» при поиске корня (24), характеризующего автоколебательный характер процессов в релейной системе через период T.

Опуская детальный перебор вариантов, укажем оптимальный – это использование выражений (31) и (32). Действительно, подстановка их в характеристический полином (21) дает

$$P(z)=\sum 2B_i s_i \frac{e^{-s_i\tau}-e^{-s_iT}}{1-e^{-s_iT}}-$$

$$-\sum 2B_i s_i\left[e^{-s_i\tau}+\frac{z\left(1-e^{-s_i\tau}\right)}{z-e^{-s_iT}}\right]=0,$$

или

$$P(z)=\sum\frac{B_i s_i M(z)}{\left(1-e^{-s_iT}\right)\left(z-e^{s_iT}\right)}=0, \qquad (34)$$

причем в числителе (34) после преобразований

$$M(z)=z\left(e^{-s_i\tau}-1\right)+\left(1-e^{-s_i\tau}\right).$$

Итак, получим

$$P(z)=\sum\frac{B_i s_i\left(z-1\right)}{\left(1-e^{-s_iT}\right)\left(z-e^{s_iT}\right)}=0. \qquad (35)$$

Таким образом, первый корень характеристического полинома (35)

$$z_1=1,$$

что соответствует утверждению (24), а остальные корни характеристического полинома определяются из решения уравнения

$$\sum\frac{B_i s_i}{\left(1-e^{-s_iT}\right)\left(z-e^{s_iT}\right)}=0. \qquad (36)$$

При этом, как указано ранее, (36) справедливо, только если знаменатель передаточной функции (2) минимум на 2 порядка больше числителя.

Таким образом, определены основные черты общего аналитического метода MT оценки устойчивости автоколебаний в релейной системе через период T, что позволяет проводить анализ устойчивости также несимметричных автоколебаний.

Обосновано обязательное наличие единичного корня характеристического полинома дискретной цепи, описывающей вариации автоколебаний.

Указан наиболее рациональный способ формирования характеристического полинома уравнений для оценки устойчивости вариаций автоколебаний и приведена простая результирующая формула (36) для определения остальных корней характеристического полинома.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Морозов Д. А., Соклакова М. В., Чернышев Э. П. Аналитический расчет релейных цепей и систем. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012.

2. Goncalves J. M., Megretsk A., Dahleh M. A. Global stability of relay feedback systems // Proc. of the 2000 Am. Control Conf. ACC (IEEE Cat. No.00CH36334), Chicago, IL, USA, 2000. Vol. 1. P. 220–224.

3. Цыпкин Я. З. Теория релейных систем. М.: Наука, 1995.

4. Цыпкин Я. З. Частотный метод анализа автоколебаний и вынужденных колебаний в релейных системах автоматического регулирования // Техническая кибернетика. Кн. 3, ч. II. Теория нестационарных, нелинейных и самонастраивающихся систем автоматического регулирования / под ред. В. В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1969. С. 101–124.

5. Цыпкин Я. З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1974.

6. Попов Е. П. Теория нелинейных систем автоматического управления и регулирования. М.: Наука, 1988.

7. Aspects of the stability analysis of self-oscillations in relay circuits with an integrator in the feedback circuit / A. G. Deripaska, M. A. Sitnikov, M. V. Soklakova, E. P. Chernishev // Proc. of the 2020 IEEE Conf. of Russian young researchers in electrical and electronic engineering (ElConRus) St. Petersburg and Moscow, Russia, 2020. P. 626-631.

8. Основы теоретической электротехники: учеб. пособие / под ред. А. Н. Белянина, Ю. А. Бычкова, В. М. Золотницкого. СПб.: Лань, 2009.

A. G. Deripaska
JSC Concern «Oceanpribor»

M. V. Soklakova, E. P. Chernishev
Saint Petersburg Electrotechnical University

THE RATIONAL APPLICATION OF THE THEORY OF DISCRETE CHAINS IN THE DEVELOPMENT OF A GENERAL ANALYTICAL METHOD FOR EVALUATING THE STABILITY OF SELF-OSCILLATIONS IN RELAY SYSTEMS

This work is an extension of the previously developed analytical method for evaluating self-oscillations in relay systems, the basics of which are described in [1]. Relay systems have high speed, good noise immunity and easy to operate, and as a consequence, are common in control systems. The possibility of obtaining an analytical description of self-oscillations in a relay system required the development of new methods for assessing the stability of a solution. The stability analysis method for symmetric vibrations, when changes occur after half a period (Mτ), showed good results in comparison with known methods. Here we describe the further development of the method and its generalization to the case of asymmetric oscillations, when changes occur after a period (MT). In the case of an analytical study of high-order relay systems, significant difficulties may arise in the formation of a characteristic polynomial of equations that evaluate the stability of variations in self-oscillations. The present work is devoted to the search for the optimal approach to composing the characteristic polynomial.
The specificity of relay systems is such that the nature of the signal variations makes it possible to use the theory of discrete circuits for their analysis, on which the stability assessment method proposed by the authors is based.

Relay system, self-oscillations, characteristic polynomial, transfer function, stability, discrete chain

УДК 621.314.223.2

А. Г. Лавров
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

А. С. Шляпников
ООО «Вольтс Бэтэри» (Москва)

Режимы работы и математическое описание силовых трехобмоточных автотрансформаторов

Рассмотрены трехобмоточные силовые автотрансформаторы. Указано на отсутствие в научно-технических источниках математических моделей работы трехобмоточных автотрансформаторов, позволяющих проводить подробный качественный и количественный анализ протекающих в них физических процессов. Рассмотрены и проанализированы режимы работы на холостом ходу и под нагрузкой силового трехобмоточного понижающего и повышающего автотрансформатора, работающего в комбинированном режиме. Продемонстрирована важность выделения компонентов самоиндукци и взаимной индукции при описании работы силового трехобмоточного понижающего и повышающего автотрансформатора на холостом ходу и под нагрузкой в комбинированном режиме. Полученные математические модели уточняют существующие, универсальны, отражают действительные физические процессы работы силового трехобмоточного понижающего и повышающего автотрансформатора.

Трехобмоточный силовой автотрансформатор, комбинированный режим работы, математические модели, полные системы уравнений, коэффициенты трансформации

В [1] подробно рассмотрены недостатки представленных на сегодняшний день в научно-технической литературе [2]–[5] математических моделей автотрансформатора (АТ) и указано на