УДК 681.32

Кирьянчиков В. А.
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Анализ эффективности и надежности вычислительных систем на основе стохастических сетей Петри

Рассматривается применение одного из наиболее популярных расширений сетей Петри – стохастических сетей Петри (ССП) – для анализа эффективности и надежности аппаратных и программных средств вычислительных систем (ВС). Отмечается изоморфизм между ССП и марковскими цепями с непрерывным временем, служащий основой количественного анализа ССП средствами анализа марковских цепей. Описываются подходы к построению операционных моделей программных и аппаратных средств ВС, отмечается специфика поведенческого и алгоритмического подходов и особенности задания абсолютной и относительной нагрузок в ССП-моделях программ. Приводится методика анализа ССП на основе аппарата марковских цепей и рассматриваются примеры построения ССП-моделей ВС, на основе которых выполняется расчет характеристик эффективности и надежности ВС. Для модели отказоустойчивой ВС оценивается средняя ожидаемая работоспособность системы в стационарном режиме. Указывется необходимость использования иерархического подхода к построению ССП-моделей из-за большой вычислительной сложности выполнения расчета характеристик ВС на их основе.

Эффективность, надежность, стохастическая сеть Петри, параметры потребления ресурсов, операционная ССП-модель ВС, множество достижимых состояний, марковская цепь с непрерывным временем, эргодическая марковская цепь, интенсивность перехода, вектор финальных вероятностей

Сети Петри представляют собой удобный аппарат для моделирования параллельных и асинхронных процессов в дискретных системах [1]. Поведение современных вычислительных систем (ВС), содержащих большое число параллельно работающих процессоров, в большой степени характеризуется использованием именно данного вида процессов, вследствие чего при моделировании и анализе поведения ВС сети Петри в настоящее время получили широкое применение.

Простую, или ординарную, сеть Петри [1] формально можно представить в виде набора из двух множеств P и T, двух двуместных функций F и H и одноместной функции μ_0:

$$\mathrm{PN} = \langle P, T, F, H, \mu_0 \rangle,$$

где $P = \{p_1, p_2, ..., p_m\}$ – множество позиций, которое задает множество условий в системе; $T = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ – множество переходов, которые задают множество событий, происходящих при функционировании системы; $F : P \times T \to N$ – входная функция инцидентности, которая каждой паре (p, t) ставит в соответствие натуральное число из множества $N = \{0, 1, \ldots\}$; $H : T \times P \to N$ – выходная функция инцидентности, которая каждой паре (t, p) ставит в соответствие элемент множества N; $\mu : P \to N$ – функция, называемая маркировкой сети, которая каждой позиции p из P ставит в соответствие натуральное число k, задающее число маркеров (фишек) в позиции p. В исходном состоянии сеть определяется начальной маркировкой, обозначаемой μ.

Сеть Петри в графическом виде представляется как ориентированный двудольный граф с двумя типами вершин: вершины-позиции p из P, которые изображаются в виде кружков, и вершины-переходы t из T, которые изображаются с помощью черточек. Дуги орграфа соответствуют входным и выходным функциям инцидентности F и H. Кратность дуги из позиции p в переход t равна $F(p, t)$, кратность дуги из перехода t в позицию p – $H(t, p)$. Маркеры на графе представляются в виде точек или цифр в соответствующих позициях.

Элементы сети Петри могут интерпретироваться произвольным образом как с точки зрения представляемого фрагмента в случае моделирования программы, так и с точки зрения аппаратного компонента обработки при моделировании аппаратных средств системы.

Стохастические сети Петри. Для учета затрат времени при оценке эффективности выполнения процессов в вычислительных системах были предложены временные сети Петри, переходам которых приписывалось некоторое время срабатывания, и активный переход срабатывал только по прошествии этого времени. На основе временных сетей М. Моллой в [2] ввел понятие стохастических сетей Петри (ССП, или в английской мнемонике SPN), в которых время срабатывания перехода было экспоненциально распределенной случайной величиной, благодаря чему ССП становились изоморфны цепям Маркова с непрерывным временем.

Таким образом, стохастическую сеть Петри можно определить в виде

$$\mathrm{SPN} = <\mathrm{PN}, \Lambda>,$$

где PN – ординарная сеть Петри, а Λ – множество усредненных интенсивностей переходов $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$, характеризующихся экспоненциально распределенным временем срабатывания $W_i = \lambda_i e^{-\lambda_i t}$. Приписывание временам срабатывания переходов экспоненциального распределения позволяет исключить из рассмотрения предшествующее поведение процесса и рассматривать его как марковский процесс.

Построение операционных моделей программ на основе стохастических сетей Петри. Поскольку в данной работе основное внимание уделяется анализу характеристик эффективности одного из важнейших компонентов ВС – программного обеспечения (ПО), то построение моделей на основе ССП рассматривается применительно к анализу программ. Это приводит к выбору определенных методов задания нагрузки элементов модели при построении операционных моделей программ.

Стохастическая сеть Петри, с одной стороны, позволяет описать структуру модели, а с другой – задать для нее интенсивности срабатывания переходов как основные нагрузочные параметры модели. При этом точность создаваемой модели в большой степени определяется точностью задания нагрузки. Назначение параметров нагрузки при построении ССП-моделей программ обычно выполняется на основе двух подходов [3]:

– первый предусматривает использование классического для сетей Петри метода конструирования модели посредством выделения состояний объекта и переходов между ними;

– второй непосредственно использует преобразование конструкций исходного текста программы в ССП-модель в соответствии с определенными правилами трансформации конструкций языка в элементы ССП-модели.

Модель, реализуемая на основе первого подхода, обычно оказывается более компактной и удобной для анализа, но при ее построении возникают существенные сложности, связанные как с необходимостью установления соответствия между фрагментами программы и состояниями модели, так и с заданием переходов между выбранными состояниями и определением интенсивностей срабатывания этих переходов.

К особенностям второго подхода относятся укрупнение модели, вызванное ее большей детализацией, и возрастание вычислительной сложности проведения анализа аналитическими методами теории марковских цепей. Преимущество этого подхода состоит в легче формализуемом и более простом алгоритме построения точной ССП-модели программы. Хотя следует отметить, что при формализации алгоритма преобразования конструкций программы в элементы модели приходится сталкиваться с необходимостью учета сложных зависимостей между языком программирования, транслятором и назначаемыми параметрами нагрузки.

Задание нагрузки в ССП-модели программы. По аналогии с методикой построения операционных графовых моделей программ (ОГМП), описанной в [4], в качестве ресурса, потребляемого программой, будем рассматривать время. В ССП-моделях программ потребление ресурсов характеризуют интенсивности срабатывания переходов, связанные с временами выполнения моделируемых участков программ.

Если в ОГМП для задания нагрузки перехода используются два параметра: вероятность перехода – относительный параметр, задающий выбор направления перехода, и среднее время выполнения перехода – параметр, определяющий абсолютное значение нагрузки, то интенсивность перехода в ССП-модели – единственный параметр, задающий и направление, и скорость перехода.

Из вышесказанного следует, что в ССП-модели необходимо искусственно организовать раздельный учет потребления ресурса времени и выбора направления перехода. Для этого потребление моделируемым участком программы ресурса времени T следует считать абсолютной нагрузкой и для моделирующего его перехода задать интенсивность срабатывания

$$\lambda = 1/T ,$$

а для задания вероятности p выбора ветви выполнения программы – ввести дополнительный переход с интенсивностью срабатывания λ, задаваемой таким образом, чтобы ее значение значительно превышало значение абсолютной нагрузки и не искажало потребление времени фрагментом программы. В этом случае интенсивность срабатывания λ дополнительного перехода должна выбираться в соответствии с выражением

$$\lambda_{ij} = Kp_{ij},$$

где значение K должно выбираться так, чтобы λ_{ij} для всех i значительно превышало максимальную из всех абсолютных нагрузок модели, представленной в виде ССП.

Методика количественного анализа ССП на основе аппарата марковских цепей. Доказанная в [2] М. Моллоем теорема об изоморфности ССП и марковских цепей с непрерывным временем (МЦНВ) позволяет проводить количественный анализ стохастических сетей Петри на основе теоретического аппарата марковских цепей. В этом случае под состояниями цепи Маркова, изоморфной заданной ССП, понимаются маркировки сети Петри, взятые из ее множества достижимых состояний (МДС), образованного множеством всех возможных маркировок сети $\{M_i\}$.

Преобразование ССП в статистически эквивалентную ей марковскую цепь обеспечивает возможность расчета установившихся вероятностей достижения состояний цепи, на основе которых можно рассчитать различные оценки характеристик эффективности и надежности ВС – средней задержки обработки, средней пропускной способности, работоспособности, среднего времени до отказа и др.

Методика расчета характеристик эффективности и надежности ВС на основе ССП требует выполнения следующих этапов:

1. Создание сети Петри, моделирующей динамику выполнения анализируемых процессов в ВС.
2. Задание начальной маркировки, определение МДС построенной сети Петри и формирование ее графа достижимых состояний (ГДС).
3. Формирование стохастической сети Петри посредством оценки и назначения интенсивностей срабатывания переходов.
4. Построение марковской цепи, изоморфной ССП, вершины которой соответствуют состояниям ГДС, а дуги нагружаются интенсивностями срабатывания переходов.
5. Расчет установившихся вероятностей состояний полученной МЦНВ, на основе которых вычисляются характеристики эффективности и надежности ВС.

Для анализа МЦНВ ее следует привести к виду эргодической марковской цепи [5]. Обычно это достигается замыканием конечной вершины графа с начальной вершиной, в результате чего все состояния цепи становятся эргодическими. В процессе развития эргодической марковской цепи во времени в ней устанавливается стационарный режим, при котором вектор $\mathbf{\Pi}(t)$ вероятностей пребывания цепи в различных состояниях перестает изменяться с течением времени. Этот вектор называется вектором финальных вероятностей и обозначается $\mathbf{\Pi}_{\text{ф}}$.

Как показал А. Н. Колмогоров [5], поведение однородного марковского процесса определяется системой дифференциальных уравнений для вероятностей состояний

$$d\mathbf{\Pi}(t)/dt = \mathbf{\Pi}(t)\Lambda .$$

Поскольку в стационарном режиме вектор $\mathbf{\Pi}_{\text{ф}}(t)$ не изменяется, то $d\mathbf{\Pi}(t)/dt = 0$ и вектор финальных вероятностей можно найти, решив систему линейных уравнений (СЛУ)

$$\mathbf{\Pi}_{\text{ф}}\Lambda = 0, \tag{1}$$

где Λ – матрица интенсивностей ЭМЦ, с заменой одного из уравнений системы на уравнение $\sum \pi_i = 1$ для обеспечения линейной независимости.

В соответствии с существующей для эргодических марковских цепей (ЭМЦ) теоремой [5], по которой среднее время $M\{t_{\text{в}i}\}$ возврата цепи в состояние S обратно пропорционально финальной вероятности $\pi_{\text{ф}i}$ пребывания в состоянии S

$$M\{t_{\text{в}i}\} = k/\pi_{\text{ф}i},\ k = 1/\sum \lambda_{ij} \quad (i \neq j),$$

среднее время выполнения моделируемой программы $M\{T_{\text{пр}}\}$ можно определить, вычислив время возврата цепи в начальное состояние из выражения

$$M\{T_{\text{пр}}\} = (1/\pi_{\text{ф}1})\left(1/\sum \lambda_{1j}\right), \quad j \neq 1.$$

Рассмотрим примеры использования ССП-моделей для расчета характеристик эффективности и надежности ВС.

Пример 1. *Переход от ССП к ЭМЦ и расчет вектора финальных вероятностей и вектора времен возврата в состояния цепи.* Рассмотрим представленный на рис. 1, *а* граф ССП, для которого в скобках указаны интенсивности срабатывания переходов. На рис. 1, *б* показано множество достижимых состояний ССП {M} ($\{P_i\}$ – множество позиций, $\{T_i\}$ – множество переходов, $\{M_i\}$ – множество маркировок).

Граф ЭМЦ, полученной из данной ССП, будет иметь вид, показанный на рис. 2.

Матрица интенсивностей дуг ЭМЦ

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

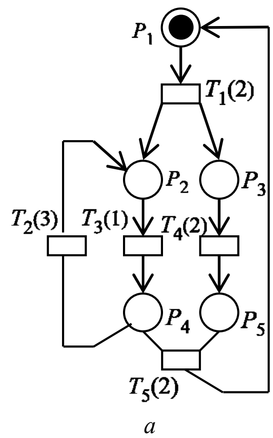
В соответствии с (1) получим систему уравнений

$$\begin{cases} -2\pi_1 + 2\pi_2 = 0; \\ 2\pi_1 - 3\pi_2 + 3\pi_2 = 0; \\ \pi_2 - 5\pi_3 = 0; \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1; \\ 2\pi_3 + \pi_4 - 5\pi_5 = 0. \end{cases}$$

Решением системы является вектор **П** = = {0.1304; 0.1087; 0.0217; 0.1304; 0.6087}. Вектор времен возврата в состояния цепи будет **Т** = = (3.8333; 3.0667; 9.2000; 1.5333; 1.6429). Соответственно, если ССП моделирует выполнение некоторой программы, то среднее время ее выполнения $T = 3.8333$ ед. врем.

Пример 2. *Модель оценки работоспособности компьютерной системы.* Рассмотрим пример отказоустойчивой компьютерной системы, модель которой представлена на рис. 3. Система состоит из одного процессора и двух разделяемых модулей памяти. Процессор подвергается сбоям с интенсивностью $\lambda_p = 0.002$, а модули памяти – с интенсивностью $\lambda_m = 0.008$; ремонт процессора осуществляется с интенсивностью $\lambda_{pr} =$ 0.01, а модулей памяти – с интенсивностью $\lambda_{mr} =$ = 0.015.

У процессора и блоков памяти есть маркеры. Когда процессор неисправен, его маркер сдвига-



а

Маркировка	Позиция				
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
M_1	1	0	0	0	0
M_2	0	1	1	0	0
M_3	0	0	1	1	0
M_4	0	1	0	0	1
M_5	0	0	0	1	1

б

Рис. 1

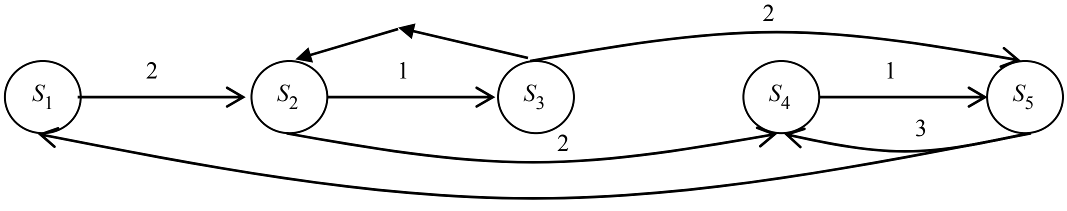


Рис. 2

ется из позиции ppup (процессор исправен) через переход tpfail (процессор выходит из строя) в состояние pprep (процессор ожидает ремонт). Ремонт процессора представляется движением маркера из состояния pprep через переход tprep в позицию ppup. Ингибиторные дуги из pprep в tmfail и из pmrep в tpfail отражают предположение о том, что система уже имеет неисправность. Так как процессор или оба блока памяти неисправны, остающиеся работать узлы будут считаться исправными, пока они не вступили в работу. Ингибиторная дуга из pprep в tmrep отражает наши предположения о возможности только одной неисправности; если неисправен процессор, то ремонт памяти невозможен.

Требуется выполнить моделирование работоспособности системы с использованием ССП и оценить среднюю ожидаемую работоспособность системы в стационарном режиме. Будем считать, что возможен ремонт только одного узла одновременно. При этом ремонт процессора имеет приоритетное значение.

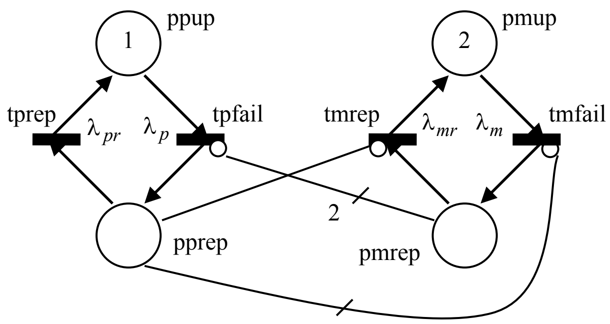


Рис. 3

Определим множество достижимых маркировок ССП и построим эргодическую цепь Маркова с непрерывным временем, изоморфную ССП.

Множество достижимых маркировок представлено на рис. 4, *а*, а граф ЭМЦ – на рис. 4, *б*.

Матрица интенсивностей и система линейных уравнений имеют вид

$$\Lambda =$$

$$= \begin{pmatrix} -(\lambda_p+\lambda_m) & \lambda_p & \lambda_m & 0 & 0 \\ \lambda_{pr} & -\lambda_{pr} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{mr} & 0 & -(\lambda_{mr}+\lambda_m+\lambda_p) & \lambda_m & \lambda_p \\ 0 & 0 & \lambda_{mr} & -\lambda_{mr} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{pr} & 0 & -\lambda_{pr} \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} -0.01x_1+0.01x_2+0.015x_3=0; \\ 0.002x_1-0.01x_2=0; \\ 0.008x_1-0.025x_3+0.015x_4+0.01x_5=0; \\ 0.008x_3-0.015x_4=0; \\ 0.002x_3-0.01x_5=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0.01x_1+0.01x_2+0.015x_3=0; \\ 0.002x_1-0.01x_2=0; \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1; \\ 0.008x_3-0.015x_4=0; \\ 0.002x_3-0.01x_5=0. \end{cases}$$

При записи СЛУ используются следующие значения параметров:

а) интенсивности сбоя: $\lambda_p = 0.002$; $\lambda_m = 0.008$

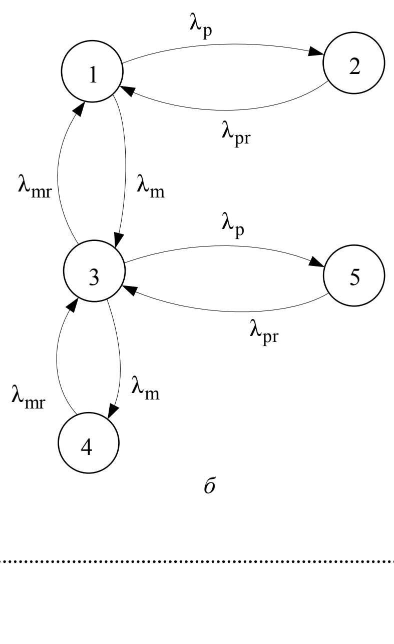
б) интенсивности восстановления: $\lambda_{pr} = 0.001$; $\lambda_{mr} = 0.015$.

Решая СЛУ, получим вектор финальных вероятностей для стационарного режима

$$\mathbf{\Pi}_ф = \{0.47,\ 0.09,\ 0.25,\ 0.13,\ 0.05\}.$$

	ppup	pmup	pmrep	pprep
M_1	1	2	0	0
M_2	0	2	0	1
M_3	1	1	1	0
M_4	1	0	2	0
M_5	0	1	1	1

а



б

Рис. 4

Тогда средняя ожидаемая работоспособность $E[R(t)]$ системы в стационарном режиме, определяемая по выражению

$$E[R(t)] = \sum_{i=1,\,5} r_i \pi_{\text{ф}i},$$

составит $E[R(t)] = 0.47 \cdot 1 + 0.25 \cdot 1 = 0.72$.

При использовании стохастических сетей Петри в практике анализа характеристик эффективности и надежности ВС возникает ряд существенных проблем. Основная проблема состоит в том, что определение и задание интенсивностей срабатывания переходов в ССП-модели требует выполнения большого числа экспериментов по подгонке параметров модели к ее реальному поведению.

Вторая проблема связана с большой вычислительной сложностью расчета характеристик эффективности аналитическими методами теории марковских цепей из-за большого числа состояний графа достижимости модели, приводящего к существенному росту числа уравнений системы при вычислении вектора финальных вероятностей. В качестве основного метода снижения вычислительной сложности анализа ССП-модели может служить широко используемое при моделировании систем применение иерархических моделей.

Наконец, надо отметить, что для увеличения модельной мощности и повышения точности анализа широко используются различные расширения ССП, основные из которых – сети, допускающие использование в ССП мгновенных переходов со временем срабатывания, равным нулю, получившие название обобщенных ССП [6]. В обобщенных ССП при одновременном возбуждении временных и мгновенных переходов сначала срабатывают мгновенные переходы, а порядок их срабатывания при наличии более одного возбужденного мгновенного перехода определяется в соответствии с заданными вероятностями. Кроме того, в обобщенных ССП временные переходы также имеют экспоненциально распределенные времена срабатывания и поэтому при проведении их анализа также может применяться аппарат теории марковских цепей с непрерывным временем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем: пер. с англ. М.: Мир, 1984.

2. Molloy M. K. Performance analysis using stochastic petri nets // IEEE Trans. on Comp. 1982. Vol. C–3, № 9. P. 913–917.

3. Мойсейчук Л. Д. Разработка моделей и методов анализа производительности программного обеспечения на основе строго иерархических стохастических сетей Петри: дис. ... канд. техн. наук. СПб.: СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2002.

4. Кирьянчиков В. А. Методика построения операционных графовых моделей программ // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2018. № 7. С. 53–58.

5. Кирьянчиков В. А. Расчет характеристик эффективности программ на основе марковских цепей // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2019. № 8. С. 46–52.

6. Sahner R., Trivedi K., Puliafito A. Performance and reliability analysis of computer systems. Kluwerr Academic Publishers, 1999.

V. A. Kirianchikov

Saint Petersburg Electrotechnical University

THE EFFICIENCY AND RELIABILITY ANALYSIS OF COMPUTER SYSTEMS BASED ON STOCHASTIC PETRI NETS

The application of one of the most popular extensions of Petri nets - stochastic Petri nets (SSP) for the analysis of the efficiency and reliability of hardware and software of computing systems is considered. An isomorphism between SSP and Markov chains with continuous time is noted, which is the basis of the quantitative analysis of SSP by means of Markov chains analysis tools. The approaches to the construction of operational models of software and hardware of computer system are described. Particularly the specifics of behavioral and algorithmic approaches and the features of setting the absolute and relative load in the SSP-models of programs are considered. A methodology for the analysis of SSP based on the apparatus of Markov chains is presented and examples of constructing SSP-models and calculation of the characteristics of the efficiency and reliability of computer systems based on models of SSP are considered. For the fault-tolerant computer system model, the average expected system performance in stationary mode is estimated. The necessity of using a hierarchical approach to the construction of SSP models due to the high computational complexity of calculating the characteristics of aircraft based on them is noted.

Efficiency, reliability, stochastic Petri net, resource consumption parameter, operational SSP-model, set of reachable states, continuous time Markov chain, ergodic Markov chain, transition intensity, final probability vector