УДК 534.16 Научная статья

https://doi.org/10.32603/2071-8985-2026-19-8-16-23

Зонная структура и собственные моды двумерных фононных кристаллов

З. М. Яшкин✉, М. В. Захарченко, Г. Ф. Глинский

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

✉ a3691215@yandex.ru

Аннотация. Предложен общий подход к анализу собственных мод фононных кристаллов с произвольной анизотропией упругих свойств и геометрией элементарной ячейки. В основе предлагаемого подхода лежит операторное представление уравнения, определяющего стационарные упругие волны в сплошной среде. Показано, что данное операторное уравнение сводится к матричной задаче на поиск собственных чисел и собственных векторов. Развитая теория использована для расчета зонной структуры и пространственного распределения полей смещения двумерного фононного кристалла. Изучено влияние параметров двумерного фононного кристалла на дисперсию собственных мод. Проанализированы эффекты, связанные с поляризацией упругих волн.

Ключевые слова: зонная структура фононного кристалла, анизотропия упругих свойств, поляризация упругих волн

Для цитирования: Яшкин З. М., Захарченко М. В., Глинский Г. Ф. Зонная структура и собственные моды двумерных фононных кристаллов // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2026. Т. 19, № 8. С. 16–23. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-8-16-23.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Финансирование: Исследование проводилось в рамках государственного задания Минобрнауки России по проекту № FSEE-2025-0007 от 25.12.2024.

Original article

Band Structure and Eigenmodes of Two-Dimensional Phononic Crystals

Z. M. Yashkin✉, M. V. Zakharchenko, G. F. Glinskii

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

✉ a3691215@yandex.ru

Abstract. A general approach to analysis of the eigenmodes of phononic crystals with arbitrary anisotropy and unit cell geometry is proposed. The proposed approach is based on the operator representation of the equation for a stationary elastic wave in a continuous medium. It is shown that this operator equation reduces to a matrix problem of finding the eigenvalues and eigenvectors of the matrix. The developed theory was used to calculate the band structure and the spatial distributions of displacement fields in a two-dimensional phononic crystal. The influence of the parameters of a two-dimensional phononic crystal on the dispersion of its eigenmodes was studied. Effects associated with the polarization of elastic waves were analyzed.

Keywords: band structure of phononic crystal, anisotropy of elastic properties, polarization of elastic waves

For citation: Yashkin Z. M., Zakharchenko M. V., Glinskii G. F. Band Structure and Eigenmodes of Two-Dimensional Phononic Crystals // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2026. Vol. 19, no. 8. P. 16–23. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-8-16-23.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interests.

Financing: The study was carried out as part of the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation under project no. FSEE-2025-0007 dated 12.25.2024.

© Яшкин З. М., Захарченко М. В., Глинский Г. Ф., 2026

Введение. Фононные кристаллы (ФнК) представляют собой искусственные среды с периодически изменяющимися в пространстве упругими свойствами. Для таких структур характерно наличие разрешенных и запрещенных полос в частотном спектре упругих колебаний, которые принято называть фононной зонной структурой. Информация о зонной структуре ФнК имеет принципиальное значение для разработки всевозможных приборов на их основе, которые могут быть использованы для акустической фокусировки и фильтрации волн, а также других прикладных задач [1]–[2]. Среди активно развивающихся областей в акустике искусственных материалов также отметим исследования открытых неэрмитовых систем [3]–[4] и структур с топологическими эффектами [5]–[7].

Решающую роль в наблюдении указанных эффектов играет геометрия, а также свойства исходного материала фононного кристалла. Действительно, в последнее десятилетие было опубликовано большое число работ, посвященных исследованию влияния этих факторов на зонную структуру ФнК [8]–[10]. Однако в большинстве теоретических и экспериментальных статей рассматривались лишь изотропные материалы [3]–[7]. Стоит отметить, что влияние анизотропии упругих свойств на зонную структуру ФнК учитывалось лишь в некоторых частных случаях [8]–[10].

В настоящей статье развивается общий подход к анализу собственных мод ФнК с произвольной анизотропией и произвольной формой элементарных ячеек. В макроскопическом приближении предлагается операторная форма записи уравнения колебаний сплошной среды. Применимость рассматриваемого подхода демонстрируется на примере анализа анизотропного двумерного ФнК. Исследуется зонная структура и пространственное распределение полей смещения, а также поляризация упругих волн в ФнК с прямоугольной элементарной ячейкой.

Теория. В рамках механики сплошных сред стационарные упругие волны в кристаллах есть решение следующих уравнений:

$$\sum_{k,l,m} c_{iklm}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 u_m(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_l} = -\omega^2 \mu(\mathbf{x}) u_i(\mathbf{x}). \qquad (1)$$

Здесь $\mu(\mathbf{x})$ – зависящая от координат плотность материала; $u_i(\mathbf{x})$, $u_m(\mathbf{x})$ – компоненты вектора смещения; $c_{iklm}(\mathbf{x})$ – зависящие от координат компоненты тензора упругих постоянных; ω – частота упругих колебаний; i, k, l, m – индексы, пробегающие значения 1, 2, 3; x_k, x_l – компоненты радиус-вектора $\mathbf{x}$.

Можно показать, что уравнение (1) – частный случай координатного представления более общего, операторного уравнения, которое представим в виде

$$(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{q}})^{+}\hat{c}(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{q}})|u\rangle = \omega^2\hat{\mu}|u\rangle, \qquad (2)$$

где $\hat{\mathbf{s}}$ – оператор, определяющий поляризацию акустических волн; $\hat{\mathbf{q}}$ – оператор волнового вектора; $\hat{c}$ и $\hat{\mu}$ – операторы модулей упругости и плотности материала соответственно; $|u\rangle$ – вектор в комплексном гильбертовом пространстве, определяющий поле смещения.

Запишем операторное уравнение (2) в базисе с определенной координатой $\mathbf{x}$ и поляризацией упругой волны $i = x, y, z$, который представим в виде следующего прямого произведения $|i\rangle\otimes|\mathbf{x}\rangle = |i,\mathbf{x}\rangle$. Для определения операторов $\hat{c}$ и $\hat{\mathbf{s}}$ в координатном представлении введем также векторы $|i\rangle\otimes|l\rangle\otimes|\mathbf{x}\rangle = |i,l;\mathbf{x}\rangle$, соответствующие большей размерности рассматриваемых гильбертовых пространств. Для данных базисов справедливы следующие соотношения ортонормированности и полноты:

$$\langle i,l;\mathbf{x}|k,m;\mathbf{x}'\rangle = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\,\delta_{ik}\delta_{lm},$$
$$\sum_i\int_V d\mathbf{x}|i,\mathbf{x}\rangle\langle i,\mathbf{x}| = 1, \sum_{i,l}\int_V d\mathbf{x}|i,l;\mathbf{x}\rangle\langle i,l;\mathbf{x}| = 1, \qquad (3)$$

где V – конечный объем рассматриваемой системы; $\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ – дельта-функция Дирака; δ_{ik} – символ Кронекера [11].

Пользуясь представленным базисом, определим вектор $|u\rangle$ в координатном представлении

$$\sum_i\int_V d\mathbf{x}|i,\mathbf{x}\rangle\langle i,\mathbf{x}|u\rangle = \sum_i\int_V d\mathbf{x}|i,\mathbf{x}\rangle u_i(\mathbf{x}).$$

С помощью выражений (3) также определим вид операторов, входящих в уравнение (2):

$$\langle i,k;\mathbf{x}|\hat{c}|l,m;\mathbf{x}'\rangle = c_{iklm}(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$
$$\langle i,\mathbf{x}|\hat{\mu}|k,\mathbf{x}'\rangle = \mu(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\delta_{ik},$$
$$\langle i,\mathbf{x}|\hat{\mathbf{q}}|k,\mathbf{x}'\rangle = -i[\nabla_{\mathbf{x}}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')]\delta_{ik},$$
$$\langle i,l;\mathbf{x}|\hat{\mathbf{s}}|k,\mathbf{x}'\rangle = \mathbf{s}_{il,k}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$

где $\mathbf{s}_{il,k}$ – матричные элементы следующих трех матриц, определяющих поляризационные эффекты:

$$s_x = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$s_y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Используя выражения (2), (3), можно показать, что

$$\langle i,k;\mathbf{x}|\hat{c}\,(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{q}})|u\rangle =$$
$$= \sum_{l}\int_{V} d\mathbf{x}'\langle i,k;\mathbf{x}|\hat{c}\,(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{q}})|l,\mathbf{x}'\rangle\langle l,\mathbf{x}'|u\rangle = \sigma_{ik}(\mathbf{x}),$$

$$\langle i;\mathbf{x}|(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{q}})^{+}|\sigma\rangle =$$
$$= \sum_{l,m}\int_{V} d\mathbf{x}'\langle i;\mathbf{x}|(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{q}})^{+}|l,m;\mathbf{x}'\rangle\langle l,m;\mathbf{x}'|\sigma\rangle = \sum_{l}\frac{\partial\sigma_{il}(\mathbf{x})}{\partial x_l},$$

где введены компоненты тензора механических напряжений $\sigma_{ik}(\mathbf{x})$ и соответствующий ему вектор в комплексном гильбертовом пространстве $|\sigma\rangle$. Известное соотношение между компонентами тензора механических напряжений и вектора смещений [11]

$$\sum_{k}\frac{\partial\sigma_{ik}(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \sum_{k,l,m} c_{iklm}(\mathbf{x})\frac{\partial^2 u_m(\mathbf{x})}{\partial x_k \partial x_l}$$

доказывает эквивалентность уравнений (1) и (2) в координатном представлении.

Замена векторов $|u\rangle$ на вспомогательные $|\tilde{u}\rangle = \hat{\mu}^{1/2}|u\rangle$ позволяет свести решение уравнения (2) к решению обычной задачи на поиск собственных чисел и собственных векторов эффективного динамического оператора $\hat{D}$:

$$\hat{D}|\tilde{u}\rangle = \omega^2|\tilde{u}\rangle,$$
$$\hat{D} = \hat{\mu}^{-1/2}(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{q}})^{+}\hat{c}(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{q}})\hat{\mu}^{-1/2},$$

где векторы $|\tilde{u}\rangle$ приобретают смысл собственных состояний этого оператора.

ФнК представляет собой среду с периодически изменяющимися характеристиками. Соответственно, компоненты тензора упругости и плотность среды должны быть периодичными функциями, инвариантными относительно смещения на произвольный вектор трансляции **a** ФнК:

$$c_{iklm}(\mathbf{x}+\mathbf{a}) = c_{iklm}(\mathbf{x}),$$
$$\mu(\mathbf{x}+\mathbf{a}) = \mu(\mathbf{x}).$$

Для решения задачи на собственные значения оператора $\hat{D}$ необходимо использовать два набора базисных состояний различной размерности $|i,\mathbf{q}\rangle$ и $|i,l;\mathbf{q}\rangle$ с определенным значением волнового вектора $\mathbf{q}$ и определенной поляризацией. В трансляционно-инвариантной системе волновой вектор удобно представить в виде суммы $\mathbf{q} = \mathbf{b} + \mathbf{k}$, где $\mathbf{b}$ – вектор обратной решетки ФнК; $\mathbf{k}$ – волновой вектор, пробегающий значения в пределах зоны Бриллюэна (ЗБ) ФнК. Используемые наборы состояний считаем ортонормированными и полными

$$\langle i,\mathbf{b}+\mathbf{k}|l,\mathbf{b}'+\mathbf{k}'\rangle = \delta_{\mathbf{bb}'}\delta_{\mathbf{kk}'}\delta_{il},$$
$$\sum_{\mathbf{b},\mathbf{k},i}|i,\mathbf{b}+\mathbf{k}\rangle\langle i,\mathbf{b}+\mathbf{k}| = 1,$$
$$\langle i,l;\mathbf{b}+\mathbf{k}|k,m;\mathbf{b}'+\mathbf{k}'\rangle = \delta_{\mathbf{bb}'}\delta_{\mathbf{kk}'}\delta_{ik}\delta_{lm},$$
$$\sum_{\mathbf{b},\mathbf{k},i,l}|i,l;\mathbf{b}+\mathbf{k}\rangle\langle i,l;\mathbf{b}+\mathbf{k}| = 1.$$

Здесь векторы обратной решетки $\mathbf{b},\mathbf{b}'$ и волновые векторы $\mathbf{k},\mathbf{k}'$ нумеруют элементы базиса.

Данные представления связаны с координатными базисами следующими соотношениями

$$|i,\mathbf{b}+\mathbf{k}\rangle = \sum_{k}\int_{V} d\mathbf{x}|k,\mathbf{x}\rangle\langle k,\mathbf{x}|i,\mathbf{b}+\mathbf{k}\rangle,$$
$$|i,l;\mathbf{b}+\mathbf{k}\rangle = \sum_{k,m}\int_{V} d\mathbf{x}|k,m;\mathbf{x}\rangle\langle k,m;\mathbf{x}|i,l;\mathbf{b}+\mathbf{k}\rangle,$$

где

$$\langle k,\mathbf{x}|i,\mathbf{b}+\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i(\mathbf{b}+\mathbf{k})\mathbf{x}}\,\delta_{ki},$$
$$\langle k,m;\mathbf{x}|i,l;\mathbf{b}+\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{i(\mathbf{b}+\mathbf{k})\mathbf{x}}\,\delta_{ki}\delta_{ml}.$$

Определим матричные элементы операторов в уравнении (2) в выбранном представлении

$$\begin{aligned} \langle i,l;\mathbf{b}+\mathbf{k}|\hat{c}|k,m;\mathbf{b}'+\mathbf{k}'\rangle &= c_{iklm}(\mathbf{b}-\mathbf{b}')\delta_{\mathbf{kk}'}, \\ \langle i,\mathbf{b}+\mathbf{k}|\hat{\mu}|l,\mathbf{b}'+\mathbf{k}'\rangle &= \mu(\mathbf{b}-\mathbf{b}')\delta_{il}\delta_{\mathbf{kk}'}, \\ \langle i,\mathbf{b}+\mathbf{k}|\hat{\mathbf{q}}|l,\mathbf{b}'+\mathbf{k}'\rangle &= (\mathbf{b}+\mathbf{k})\,\delta_{\mathbf{bb}'}\delta_{\mathbf{kk}'}\delta_{il}, \\ \langle i,l;\mathbf{b}+\mathbf{k}|\hat{\mathbf{s}}|m,\mathbf{b}'+\mathbf{k}'\rangle &= s_{il,m}\delta_{\mathbf{bb}'}\delta_{\mathbf{kk}'}, \end{aligned} \qquad (4)$$

где $c_{iklm}(\mathbf{b}-\mathbf{b}')$ и $\mu(\mathbf{b}-\mathbf{b}')$ – Фурье-образы компонент тензора модулей упругости и плотности среды соответственно.

В рассматриваемом представлении вследствие наличия трансляционной симметрии матрица оператора $\hat{D}$ имеет блочно-диагональную структуру, где каждый блок – матрица меньшей размерности, отвечающая некоторому определенному значению вектора **k**. Это позволяет представить операторное уравнение (2) в виде следующего матричного уравнения

$$D(\mathbf{k})\tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{k}) = \omega_j{}^2(\mathbf{k})\tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{k}),$$

где $\omega_j{}^2(\mathbf{k})$ и $\tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{k})$ – собственные числа и собственные векторы эффективной динамической матрицы $D(\mathbf{k})$, параметрически зависящей от волнового вектора **k**. Таким образом, задача определения зонной структуры ФнК сводится к решению задачи определения собственных чисел $\omega_j{}^2(\mathbf{k})$ и собственных столбцов $\tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{k})$ динамической матрицы. При этом вспомогательные векторы $\tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{k})$ связаны с искомыми $\mathbf{u}_j(\mathbf{k})$ следующим соотношением

$$\mathbf{u}_j(\mathbf{k}) = \mu^{-1/2}\tilde{\mathbf{u}}_j(\mathbf{k}),$$

где элементы матрицы μ определяются по формулам (4). Тогда для определения пространственного распределения поля смещения необходимо воспользоваться обратным преобразованием Фурье:

$$u_{i,j}(\mathbf{x};\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{\Omega}}\sum_{\mathbf{b}} \mathrm{e}^{i\mathbf{b}\mathbf{x}} u_{\mathbf{b}i,j}(\mathbf{k}),$$

где Ω – объем элементарной ячейки ФнК.

Для описания поляризационных свойств акустической моды введем параметр, определяющий вклад состояния с номером j при заданном **k** в смещение с i-й поляризацией

$$p_{i,j}(\mathbf{k}) = \int_{\Omega} d\mathbf{x}\left|u_{i,j}(\mathbf{x};\mathbf{k})\right|^2, \qquad (5)$$

где интегрирование ведется по элементарной ячейке, а собственные моды предполагаются нормированными на единицу:

$$\sum_i \int_{\Omega} d\mathbf{x}\, u^*_{i,j}(\mathbf{x};\mathbf{k})\, u_{i,j'}(\mathbf{x};\mathbf{k}) = \delta_{jj'},$$

где символ * означает комплексное сопряжение.

Будем считать, что ФнК образован двумя материалами, которые обозначим как A и B. Для описания координатной зависимости плотности среды и компонент тензора упругости удобно ввести характеристические функции [12] $f_1(\mathbf{x})$ и $f_2(\mathbf{x}) = 1 - f_1(\mathbf{x})$, где

$$f_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, \mathbf{x} \in A \\ 0, \mathbf{x} \in B \end{cases}.$$

Тогда Фурье-образ плотности среды и компонент тензора упругости для ФнК с двумя материалами можно представить в виде

$$\mu(\mathbf{b}-\mathbf{b}') = \frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} d\mathbf{x}\left[\mu^A f_1(\mathbf{x}) + \mu^B f_2(\mathbf{x})\right] e^{i(\mathbf{b}-\mathbf{b}')\mathbf{x}},$$

$$c_{iklm}(\mathbf{b}-\mathbf{b}') = \\ = \frac{1}{\Omega}\int_{\Omega} d\mathbf{x}\left[c^A_{iklm} f_1(\mathbf{x}) + c^B_{iklm} f_2(\mathbf{x})\right] e^{i(\mathbf{b}-\mathbf{b}')\mathbf{x}},$$

где μ^A, c^A_{iklm} и μ^B, c^B_{iklm} – константы, определяющие плотность и упругие модули материалов A и B.

Зонная структура анизотропного 2*D*-фононного кристалла. Развитая теория далее используется для расчета зонной структуры и пространственного распределения полей смещения в 2*D*-ФнК. На практике ФнК реализуют на основе полупроводниковых кристаллов, диэлектриков и различных эпоксидных соединений, например таких, как GaAs/epoxy, ZnO/epoxy, YBCO/epoxy [8]–[9]. Такой выбор материалов обусловливается тем, что полная запрещенная зона по всем направлениям волнового вектора в зоне Бриллюэна ФнК, как правило, наблюдается при существенной разнице в упругих свойствах материалов, образующих структуру.

В качестве примера рассмотрим 2*D*-ФнК на основе пары материалов GaN/epoxy (рис. 1). Здесь D – период ФнК; d – длина стороны квадрата анизотропного включения (GaN); r – длина стороны квадрата изотропного включения (epoxy). Отношение d/D во всех расчетах предполагалось равным 0.725. Численные значения упругих констант c_{iklm} данной пары материалов взяты из [8], [13]. На рис. 1 справа также представлены точки и направления высокой симметрии в зоне Бриллюэна рассматриваемой структуры.

На рис. 2, *а* представлен результат расчета зонной структуры данного ФнК при значении параметра $r = 0$. Расчеты показывают, что для этого ФнК строгого разделения на продольные и поперечные колебания не наблюдается. Для волнового вектора в направлении высокой симметрии ГХ, вектор поляризации моды $j = 1$ лежит в плоскости xy, тогда как мода $j = 2$ поляризована

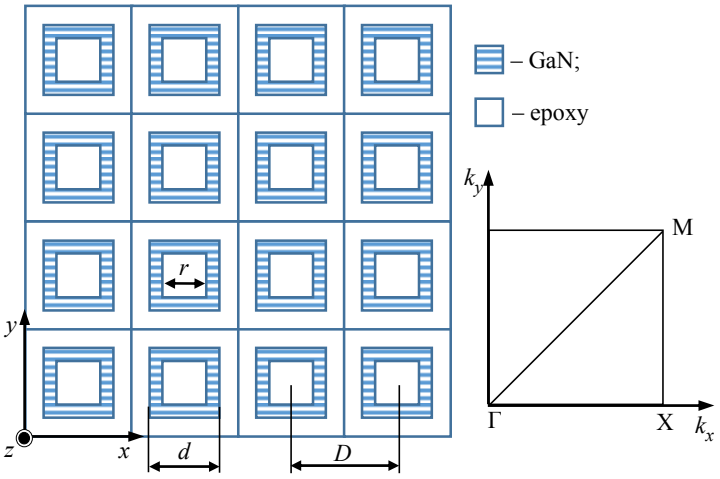


Рис. 1. Схематическое изображение ФнК (слева)
и части зоны Бриллюэна ФнК (справа)
Fig. 1. Schematic representation of the phononic crystal (left).
The corresponding Brillouin zone of the phononic crystal (right)

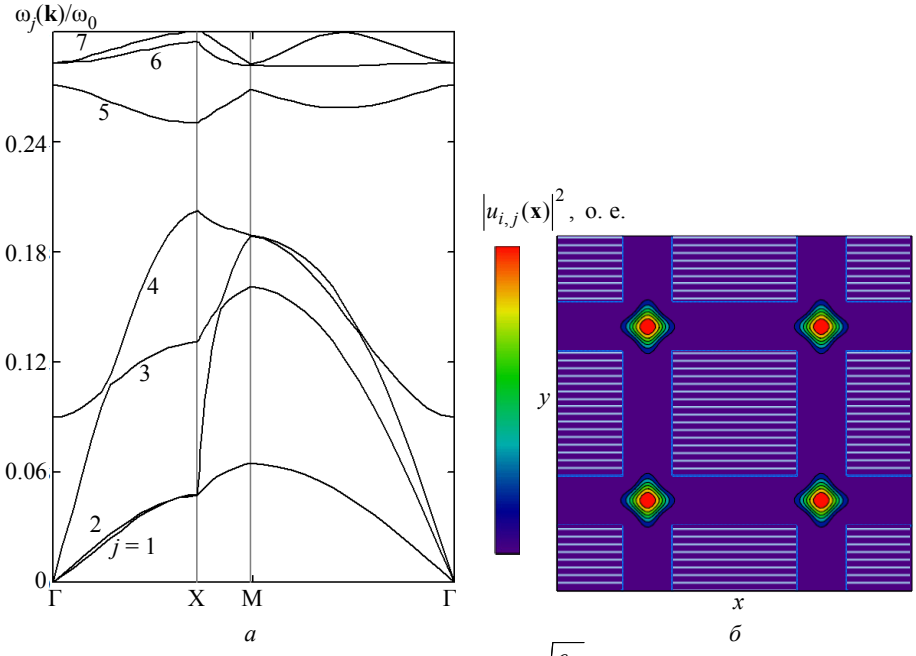


Рис. 2. Зонная структура ФнК при $g = 0$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_0}{\mu_0}}k_0 = 37.2$ МГц; $c_0 = 10$ ГПа;
$\mu_0 = 1$ г/см^3; $k_0 = 2\pi/D$ (*а*). Пространственное распределение квадрата
модуля смещения для фрагмента ФнК (*б*)

Fig. 2. Band structure of the phononic crystal at $g = 0$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{c_0}{\mu_0}}k_0 = 37.2$ MHz;
$c_0 = 10$ GPa; $\mu_0 = 1$ g/cm^3; $k_0 = 2\pi/D$ (*а*). Spatial distribution of the square of the modulus
of the displacement vector for a fragment of the phononic crystal (*б*)

по оси z. Напротив, для направлений волнового вектора XM и MГ низшая собственная мода имеет z-поляризацию.

На рис. 2, *б* показано пространственное распределение квадрата модуля смещения $|u_{z,j}(x, y; \mathbf{k})|^2$ для моды $j = 5$ в точке Γ зоны Бриллюэна ($\mathbf{k} = 0$). Как видно из полученных зависимостей, поле смещения локализуется в области изотропного материала.

Отметим, что для дисперсионных ветвей с номерами $j = 3$, 4 вектор поляризации лежит в плоскости xy для любого направления волнового вектора в ЗБ. На рис. 3 представлены зависимости, характеризующие дисперсию поляризации

этих мод, рассчитанные по (5). Из представленных данных следует, что для *z*-поляризованных волн ширина фононной запрещенной зоны больше, чем для *xy*-поляризованных мод.

На рис. 4 представлены зонные структуры ФнК для различных значений отношения $g = r/d$, определяющего размер изотропного включения в центре элементарной ячейки (при $g = 0$; $g = 0.312$;

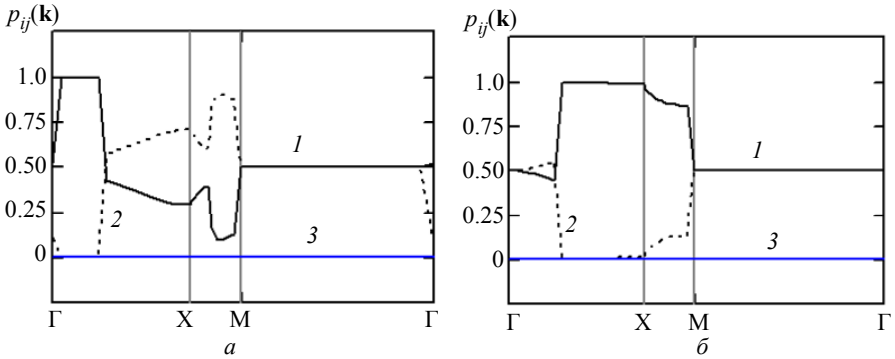


Рис. 3. Величина, характеризующая поляризацию упругой волны вдоль:
1 – оси *x*; *2* – оси *y*; *3* – оси *z* при $j = 3$ (*а*); $j = 4$ (*б*)
Fig. 3. Polarization characteristic of the elastic wave along:
1 – the *x*-axis; *2* – the *y*-axis; *3* – the *z*-axis at $j = 3$ (*a*); $j = 4$ (*б*)

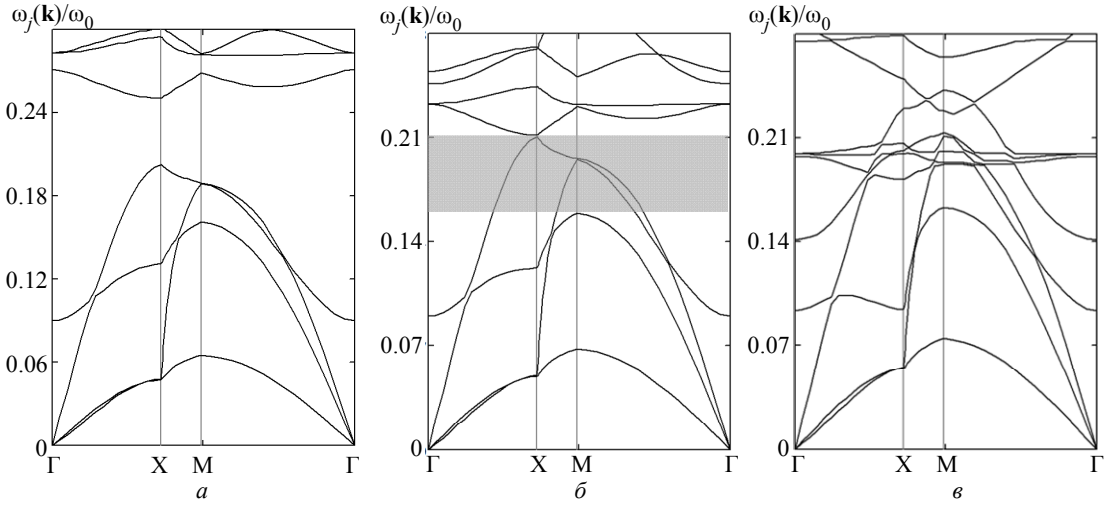


Рис. 4. Зонная структура ФнК при $g = 0$ (*а*); $g = 0.312$ (*б*); $g = 0.625$ (*в*). Закрашенная область – запрещенная зона для *z*-поляризованных волн
Fig. 4. Band structure of the phononic crystal at $g = 0$ (*a*); $g = 0.312$ (*б*); $g = 0.625$ (*в*).
The shaded area is the band gap for *z*-polarized waves

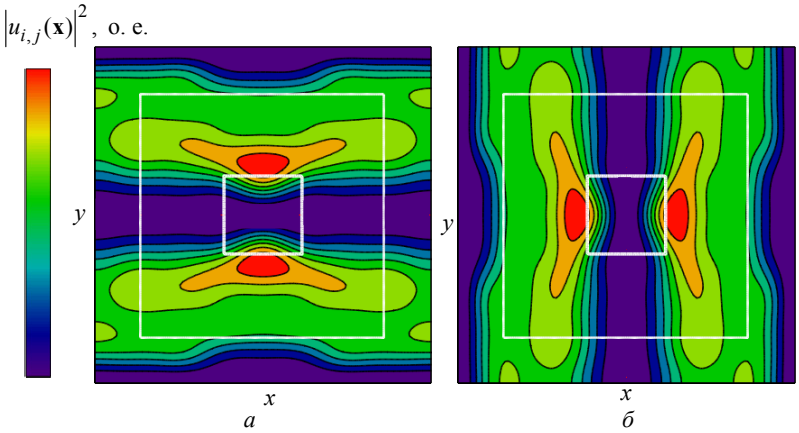


Рис. 5. Пространственное распределение квадрата модуля вектора смещения внутри элементарной ячейки ФнК при $g = 0.312$ для моды $j = 7$, $k = 0$, $i = x$ (*а*); $i = y$ (*б*)
Fig. 5. Spatial distribution of the square of the displacement vector modulus inside the unit cell of the phononic crystal at $g = 0.312$ for the mode $j = 7$, $k = 0$, $i = x$ (*a*); $i = y$ (*б*)

$g = 0.625$). Из полученных данных следует, что увеличение параметра g приводит к уменьшению запрещенной зоны ФнК. Для $g = 0.312$ полная запрещенная зона практически равна нулю (рис. 4, *б*). Однако моды, поляризованные вдоль оси z, имеют запрещенную зону для всех направлений волнового вектора. Эта область частот для ФнК при $g = 0.312$ выделена серым цветом на рис. 4, *б*.

В качестве примера на рис. 5 представлено пространственное распределение квадратов модулей поля смещения для двух x- и y-поляризаций моды $j = 7$ ($\mathbf{k} = 0$).

Заключение. Предложена обобщенная операторная форма записи уравнения, определяющего стационарные упругие волны в сплошной неоднородной среде с произвольной анизотропией ее упругих свойств. Данная теория использована для анализа зонной структуры и собственных колебательных мод ФнК. Показано, что решение данной задачи сводится к определению собственных чисел и собственных векторов эффективной динамической матрицы. В качестве примера рассчитаны зонная структура и пространственное распределение полей смещения для двумерного анизотропного ФнК с включением изотропного материала. Проанализированы поляризационные эффекты в рассматриваемой системе.

Показано, что существует критический размер изотропной области в элементарной ячейке ФнК, при превышении которого полная запрещенная полоса частот отсутствует. В случае малых размеров изотропного включения запрещенная зона для z-поляризованных волн оказывается больше, чем для xy-поляризованных. Таким образом, при определенной геометрии ФнК можно наблюдать запрещенную зону исключительно для z-поляризованных волн.

Список литературы

1. Ji P., Hu W., Yang J. Development of an acoustic filter for parametric loudspeaker using phononic crystals // Ultrasonics. 2016. Vol. 67. P. 160–167. doi: 10.1016/j.ultras.2016.01.013.

2. Acoustic focusing and imaging via phononic crystal and acoustic metamaterials / F. Ma, Zh. Huang, Ch. Liu, J. H. Wu // J. Appl. Phys. 2022. Vol. 131, no. 1. Art. 011103. P. 1–28. doi: 10.1063/5.0074503.

3. Novel acoustic flat focusing based on the asymmetric response in parity-time-symmetric phononic crystals / H. Yang, X. Zhang, Y. Liu, Y. Yao, F. Wu, D. Zhao // Scientific Reports. 2019. Vol. 9. Art. 10048. doi: 10.1038/s41598-019-46467-3.

4. PT-Symmetric acoustics / X. Zhu, H. Ramezani, Ch. Shi, J. Zhu, X. Zhang // Phys. Rev. X. 2014. Vol. 4, no. 3. Art. 031042. P. 1–7. doi: 10.1103/PhysRevX.4.031042.

5. Ma G., Xiao M., Chan Ch. T. Topological phases in acoustic and mechanical systems // Nat. Rev. Phys. 2019. Vol. 1. P. 281–294. doi: 10.1038/s42254-019-0030-x.

6. Li Y., Wu Y., Mei J. Double Dirac cones in phononic crystals // Appl. Phys. Lett. 2014. Vol. 105, no. 1. Art. 014107. P. 1–5. doi: 10.1063/1.4890304.

7. Accidental degeneracy of double Dirac cones in a phononic crystal / Z.-G. Chen, X. Ni, Y. Wu, C. He, X.-C. Sun, L.-Y. Zheng, M.-H. Lu, Y.-F. Chen // Sci. Rep. 2014. Vol. 9. doi: 10.1038/srep04613.

8. Lin Sz-Chin, Huang T. J. Tunable phononic crystals with anisotropic inclusions // Phys. Rev. B. 2011. Vol. 83, no. 17. Art. 174303. doi: 10.1103/PhysRevB.83.174303.

9. Zhan Z., Wei P. Influences of anisotropy on band gaps of 2D phononic crystal // Acta Mech. Solida Sin. 2010. Vol. 23, no. 2. P. 181–188. doi: 10.1016/S0894-9166(10)60020-1.

10. Polarization state and level repulsion in two-dimensional phononic crystals and waveguides in the presence of material anisotropy / Y. Achaoui, A. Khelif, S. Benchabane, V. Laude // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. Vol. 43, no. 18. Art. 185401. doi: 10.1088/0022-3727/43/18/185401.

11. Глинский Г. Ф. Полупроводники и полупроводниковые наноструктуры: симметрия и электронные состояния. СПб.: Технолит, 2008. 324 с.

12. Глинский Г. Ф. Фотонные кристаллы на основе сред с произвольной анизотропией диэлектрической и магнитной проницаемостей // ЖТФ. 2019. Вып. 89. С. 329–337. doi: 10.21883/JTF.2019.03.47163.273-18.

13. Brillouin scattering study of gallium nitride: elastic stiffness constants / M. Yamaguchi, T. Yagi, T. Azuhata, T. Sota, K. Suzuki, B. Chichibu, S. Nakamura // J. Phys.: Condens. Matter. 1997. Vol. 9, no. 1. P. 241–248. doi: 10.1088/0953-8984/9/1/025.

Информация об авторах

Яшкин Захар Михайлович – студент гр. 0282 СПбГЭТУ «ЛЭТИ».
E-mail: a3691215@yandex.ru
https://orcid.org/0009-0003-0633-0596

Захарченко Михаил Владимирович – канд. физ.-мат. наук, ассистент кафедры микро- и наноэлектроники СПбГЭТУ «ЛЭТИ».
E-mail: mikhailvzakh@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4970-9021

Глинский Геннадий Федорович – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры микро- и наноэлектроники СПбГЭТУ «ЛЭТИ».
E-mail: genaglinskii@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-4952-9664

References

1. Ji P., Hu W., Yang J. Development of an acoustic filter for parametric loudspeaker using phononic crystals // Ultrasonics. 2016. Vol. 67. P. 160–167. doi: 10.1016/j.ultras.2016.01.013.

2. Acoustic focusing and imaging via phononic crystal and acoustic metamaterials / F. Ma, Zh. Huang, Ch. Liu, J. H. Wu // J. Appl. Phys. 2022. Vol. 131, no. 1. Art. 011103. P. 1–28. doi: 10.1063/5.0074503.

3. Novel acoustic flat focusing based on the asymmetric response in parity-time-symmetric phononic crystals / H. Yang, X. Zhang, Y. Liu, Y. Yao, F. Wu, D. Zhao // Scientific Reports. 2019. Vol. 9. Art. 10048. doi: 10.1038/s41598-019-46467-3.

4. PT-Symmetric acoustics / X. Zhu, H. Ramezani, Ch. Shi, J. Zhu, X. Zhang // Phys. Rev. X. 2014. Vol. 4, no. 3. Art. 031042. P. 1–7. doi: 10.1103/PhysRevX.4.031042.

5. Ma G., Xiao M., Chan Ch. T. Topological phases in acoustic and mechanical systems // Nat. Rev. Phys. 2019. Vol. 1. P. 281–294. doi: 10.1038/s42254-019-0030-x.

6. Li Y., Wu Y., Mei J. Double Dirac cones in phononic crystals // Appl. Phys. Lett. 2014. Vol. 105, no. 1. Art. 014107. P. 1–5. doi: 10.1063/1.4890304.

7. Accidental degeneracy of double Dirac cones in a phononic crystal / Z.-G. Chen, X. Ni, Y. Wu, C. He, X.-C. Sun, L.-Y. Zheng, M.-H. Lu, Y.-F. Chen // Sci. Rep. 2014. Vol. 9. doi: 10.1038/srep04613.

8. Lin Sz-Chin, Huang T. J. Tunable phononic crystals with anisotropic inclusions // Phys. Rev. B. 2011. Vol. 83, no. 17. Art. 174303. doi: 10.1103/PhysRevB.83.174303.

9. Zhan Z., Wei P. Influences of anisotropy on band gaps of 2D phononic crystal // Acta Mech. Solida Sin. 2010. Vol. 23, no. 2. P. 181–188. doi: 10.1016/S0894-9166(10)60020-1.

10. Polarization state and level repulsion in two-dimensional phononic crystals and waveguides in the presence of material anisotropy / Y. Achaoui, A. Khelif, S. Benchabane, V. Laude // J. Phys. D: Appl. Phys. 2010. Vol. 43, no. 18. Art. 185401. doi: 10.1088/0022-3727/43/18/185401.

11. Glinskij G. F. Poluprovodniki i poluprovodnikovye nanostruktury: simmetrija i jelektronnye sostojanija. SPb.: Tehnolit, 2008. 324 s. (In Russ.).

12. Glinskij G. F. Fotonnye kristally na osnove sred s proizvol'noj anizotropiej dijelektricheskoj i magnitnoj pronicaemostej // ZhTF. 2019. Vyp. 89. S. 329–337. doi: 10.21883/JTF.2019.03.47163.273-18. (In Russ.).

13. Brillouin scattering study of gallium nitride: elastic stiffness constants / M. Yamaguchi, T. Yagi, T. Azuhata, T. Sota, K. Suzuki, B. Chichibu, S. Nakamura // J. Phys.: Condens. Matter. 1997. Vol. 9, no. 1. P. 241–248. doi: 10.1088/0953-8984/9/1/025.

Information about the authors

Zakhar M. Yashkin – student gr. 0282 of Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: a3691215@yandex.ru
https://orcid.org/0009-0003-0633-0596

Mikhail V. Zakharchenko – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assistant of the Department of Micro- and Nanoelectronics, Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: mikhailvzakh@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4970-9021

Gennadii F. Glinskii – Dr Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Micro- and Nanoelectronics, Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: genaglinskii@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-4952-9664

Статья поступила в редакцию 02.04.2026; принята к публикации после рецензирования 17.06.2026; опубликована онлайн 23.10.2026.

Submitted 02.04.2026; accepted 17.06.2026; published online 23.10.2026.