

## Разработка адаптивного робастного алгоритма управления движением сложных электромеханических подвижных объектов на основе метода инвариантного погружения в условиях неопределенной матрицы входа и ограничения входных воздействий

З. Х. Нгуен<sup>✉</sup>, В. В. Путов, В. Н. Шелудько, Н. А. Доброскок

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

<sup>✉</sup> [khanhnguyen.mta@gmail.com](mailto:khanhnguyen.mta@gmail.com)

**Аннотация.** Рассматривается разработка адаптивного робастного алгоритма управления движением сложных электромеханических подвижных объектов (СЭМПО) с компенсацией или минимизацией влияния неопределенности матрицы входа и ограничения входных воздействий. Строится нелинейная математическая модель СЭМПО в виде уравнений Лагранжа–Эйлера с учетом ограничения на входные воздействия. Предлагается новая адаптивная робастная система управления СЭМПО, синтезированная на основе сочетания методов инвариантного погружения и аппроксимации функций. Компенсация влияния ограничения входных воздействий осуществляется с использованием вспомогательной динамической системы, переменные которой зависят от отклонения между фактическим управляющим воздействием и управляющим воздействием на выходе регулятора. Введение  $\sigma$ -модификации в предлагаемый адаптивный робастный закон управления обеспечивает ограничение всех сигналов замкнутой системы. С использованием методов функций Ляпунова доказана робастная устойчивость разработанной адаптивной робастной системы при одновременном воздействии неопределенности матрицы входа и ограничения входных воздействий. Результаты компьютерного моделирования в среде MatLab/Simulink подтверждают превосходящую эффективность предлагаемого в статье алгоритма по сравнению с существующими адаптивными алгоритмами.

**Ключевые слова:** сложные электромеханические подвижные объекты (СЭМПО), адаптивный робастный алгоритм управления, методы инвариантного погружения (I&I), методы аппроксимации функций, методы функций Ляпунова, неопределенность матрицы входа, ограничение входных воздействий, моделирование

**Для цитирования:** Разработка адаптивного робастного алгоритма управления движением сложных электромеханических подвижных объектов на основе метода инвариантного погружения в условиях неопределенной матрицы входа и ограничения входных воздействий / З. Х. Нгуен, В. В. Путов, В. Н. Шелудько, Н. А. Доброскок // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2025. Т. 18, № 8. С. 98–112. doi: 10.32603/2071-8985-2025-18-8-98-112.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

## Development of an Adaptive Robust Motion Control Algorithm for Complex Electromechanical Moving Objects Based on Invariant Immersion Method Under Conditions of Uncertain Input Matrix and Input Constraints

D. Kh. Nguyen<sup>✉</sup>, V. V. Putov, V. N. Sheludko, N. A. Dobroskok

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

<sup>✉</sup> [khanhnguyen.mta@gmail.com](mailto:khanhnguyen.mta@gmail.com)

**Abstract.** The article considers the problem of developing an adaptive robust motion control algorithm for complex electromechanical moving objects (CEMMO), compensating for or minimizing the influence of input matrix uncertainty and input constraints. A nonlinear mathematical model of CEMMO is constructed in the

form of Lagrange–Euler equations, accounting for input constraints. A novel adaptive robust control system for CEMMO is proposed, synthesized based on a combination of invariant immersion and function approximation techniques. Compensation for the influence of input constraints is achieved through an auxiliary dynamic system, the variables of which depend on the deviation between the actual control action and the control action at the controller output. The introduction of  $\sigma$ -modification into the proposed adaptive robust control law ensures boundedness of all closed-loop system signals. Using Lyapunov functions method, the robust stability of the developed adaptive robust system under simultaneous effects of input matrix uncertainty and input constraints is proven. The results of computer simulation in MatLab/Simulink environment confirm the superior effectiveness of the proposed algorithm compared to existing adaptive control algorithms.

**Keywords:** complex electromechanical moving objects (CEMMO), adaptive robust control algorithm, invariant immersion methods (I&I), function approximation methods, Lyapunov functions methods, input matrix uncertainty, input constraints, modeling.

**For citation:** Development of an Adaptive Robust Motion Control Algorithm for Complex Electromechanical Moving Objects Based on Invariant Immersion Method Under Conditions of Uncertain Input Matrix and Input Constraints / D. Kh. Nguyen, V. V. Putov, V. N. Sheludko, N. A. Dobroskok // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2025. Vol. 18, no 8. P. 98–112. doi: 10.32603/2071-8985-2025-18-8-98-112.

**Conflict of interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Введение.** За последние десятилетия точное управление движением сложных электромеханических подвижных объектов (СЭМПО) нашло ряд важных применений во многих областях, в том числе в авиации, аэрокосмической промышленности и робототехнике. Первоначально задачи управления СЭМПО часто решались с помощью простых линейных или нелинейных методов управления – ПИД-, ЛКР-, линейный или нелинейный ПД-регуляторы и т. п. [1]–[3]. Однако в реальных условиях параметры СЭМПО не могут быть точно определены или могут изменяться под воздействием различных факторов. Эти неопределенности, наряду с влиянием существенных нелинейностей и перекрестных связей в модели объекта управления, а также внешних возмущений, могут привести к существенному ухудшению качества управления и даже к потере устойчивости системы [4], [5]. Данная проблема может быть успешно решена с помощью адаптивного управления [6]. Ряд значимых исследовательских работ в области адаптивного управления, демонстрирующих высокую эффективность в условиях параметрической неопределенности, опубликован как в отечественной [7]–[10], так и в зарубежной научной литературе [11]–[15]. Современная теория адаптивного управления традиционно опирается на построение функций Ляпунова как на основной инструмент обеспечения устойчивости. Однако этот подход сталкивается с двумя принципиальными сложностями:

1. Требование линейной (аффинной) параметризации. Классические методики предполагают возможность представления нелинейной системы

в виде линейной комбинации известных базисных функций с неопределенными коэффициентами. Однако для ряда сложных нелинейных динамических систем высокого порядка (например, содержащих мультипликативные нелинейности, явления гистерезиса или неголономные ограничения) подобная параметризация либо принципиально неосуществима, либо приводит к чрезмерно громоздким регрессорным моделям.

2. Проблема синтеза функций Ляпунова. В случае сложных нелинейных динамических систем высокого порядка явное построение подходящей функции Ляпунова представляет значительные трудности ввиду отсутствия в литературе универсальных методов их конструирования.

В связи с этими сложностями особый интерес представляют методы, позволяющие преодолеть указанные ограничения. В последнее время появился новый подход к синтезу адаптивного управления – метод инвариантного погружения (Immersion and Invariance – I&I) [16]–[18], который не требует выполнения условий линейной параметризации и позволяет избежать необходимости нахождения функций Ляпунова. Фундаментальный принцип данного алгоритма заключается в разработке адаптивного закона, обеспечивающего сходимость динамики ошибок оценивания к заданному аттрактивному многообразию ошибок. В отличие от классических методов адаптивного управления, где функция Ляпунова используется для нахождения закона адаптивной настройки параметров, в методе инвариантного погружения функция Ляпунова служит лишь для анализа устойчивости системы [4]. Дополнительно

ной отличительной особенностью адаптивного управления на основе метода инвариантного погружения служит введение в закон адаптивной настройки параметров пропорциональной составляющей в сочетании с интегральной составляющей, что формирует так называемую нелинейную ПИ-адаптацию [4]. Это придает адаптивному методу инвариантного погружения гибкость и робастность в условиях параметрической неопределенности и обеспечивает превосходящее качество управления по сравнению с классическими адаптивными алгоритмами. Таким образом, метод I&I служит перспективным инструментом в адаптивном управлении, сочетающим простоту реализации с высокой эффективностью. Его использование особенно целесообразно в задачах управления, где традиционные методы слишком сложны.

В научной литературе метод инвариантного погружения находит применение как для ряда классов нелинейных систем, так и, в частности, для СЭМПО. В [4] представлен адаптивный алгоритм управления угловым положением твердого тела, сочетающий метод инвариантного погружения и скользящего режима с приближенными нелинейностями. Этот подход обеспечивает робастную стабилизацию при наличии параметрических неопределенностей и внешних возмущений. В [5] предложен алгоритм адаптивного управления, синтезированный на основе метода инвариантного погружения с так называемым модульным динамическим масштабированием, предназначенный для неопределенных динамических объектов, описываемых уравнениями Эйлера–Лагранжа. В [19], [20] представлен синтез адаптивной системы управления сложными неопределенными объектами на основе метода инвариантного погружения и динамического поверхностного управления. В [21], [22] рассматривается задача стабилизации углового положения мультироторных летательных аппаратов при наличии параметрических неопределенностей и внешних возмущений, где применяется комбинированный подход, объединяющий метод инвариантного погружения и управление в скользящем режиме. Публикация [23] расширяет данный методологический аппарат, предлагая адаптивную систему управления с  $\sigma$ -модификацией, которая гарантирует ограниченность сигналов контура управления и требуемую точность позиционирования в условиях неполной информации о параметрах объекта и действующих возмущениях.

Важно отметить, что в системах управления неизбежны ограничения управляющего сигнала, обусловленные предельной мощностью исполнительных механизмов, максимально допустимыми уровнями тока и напряжения или механическими и другими ограничениями. Эффект насыщения управляющего сигнала вызывает искажение сигнала на выходе регулятора, что приводит к снижению качества управления, появлению в системе высокочастотных колебаний и может вызвать потерю устойчивости. Эта проблема создает особые сложности при проектировании адаптивных систем, поскольку непрерывная адаптация в условиях насыщения входного сигнала может легко привести к неустойчивости системы [24]. В научных исследованиях было разработано множество методов, направленных на компенсацию или минимизацию негативного влияния эффекта насыщения входных воздействий. В [24] предлагается «положительная  $\mu$ -модификация» для адаптации при наличии входных ограничений, гарантирующая, что управляющий сигнал на выходе регулятора не достигнет насыщения, т. е. всегда остается в пределах реальных ограничений управляющего воздействия. В [25] для противодействия влиянию насыщения управляющих сигналов, рассматриваемому как известное возмущение, разработан метод адаптивного управления с эталонной моделью и компенсатором эффекта насыщения входных сигналов. В [26] представлена система управления летательными аппаратами, разработанная с использованием функций Нуссбаума и метода обхода интегратора для решения проблемы ограничений входных воздействий и скорости полета. В [27], [28] рассматривается задача синтеза адаптивных систем управления летательными аппаратами при насыщении входного управляющего сигнала, обладающих робастными свойствами. Эти предложенные подходы основаны на методе инвариантного погружения, дополненном либо техникой обхода интегратора, либо алгоритмом скользящего режима управления. В [29] предложена конструкция адаптивного регулятора, сочетающего методы нечеткой логики и адаптивного обхода интегратора, обеспечивающего удержание ошибки слежения в заданных пределах даже при насыщении входного управляющего сигнала. [30] предлагает нейросетевой адаптивный алгоритм управления, предназначенный для сложных нелинейных динамических систем, функционирующих в условиях неопределенностей, ограничений на управ-

ляющие сигналы и влияния внешних возмущающих факторов.

Существенно ограничивает рассмотренные исследования отсутствие учета одновременного воздействия параметрической неопределенности входной матрицы и ограничений на управляющие сигналы. Данное обстоятельство существенно осложняет разработку адаптивных систем управления, поскольку традиционные адаптивные системы управления становятся особенно склонными к потере устойчивости при совместном наличии этих двух факторов в системе.

Настоящая статья направлена на решение задачи синтеза адаптивной робастной системы управления трикоптером с поворотными винтами (подробнее об объекте управления см. [31]–[33]), представленным в качестве иллюстративного примера СЭМПО. В статье предлагается новый алгоритм управления, сочетающий метод инвариантного погружения с функциональной аппроксимацией, который позволяет осуществлять адаптивную настройку как неизвестных параметров объекта, так и элементов входной матрицы управления. Далее с помощью метода функций Ляпунова в сочетании со вспомогательной динамической системой разрабатывается адаптивный робастный закон управления, компенсирующий влияние эффекта насыщения управляющего сигнала. Устойчивость системы анализируется с использованием методов функций Ляпунова. Разработанный в статье адаптивный робастный алгоритм может быть расширен для применения к классам СЭМПО, динамика которых описывается уравнениями Эйлера–Лагранжа.

**Математическая модель СЭМПО.** Динамика пространственного движения объекта управления, характеризуемого шестью степенями свободы, формулируется посредством векторно-матричного представления следующим образом [31]–[33]:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} = \\ = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_p(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\mathbf{q} = [\xi^T \ \eta^T]^T \in \mathbb{R}^6$  – вектор обобщенных координат,  $\xi = [x \ y \ z]^T$  – координаты центра масс в инерциальной системе,  $\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$  – углы Эйлера (крен, тангаж и рыскание),  $\phi, \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $\psi \in (-\pi, \pi)$ ,  $\mathbb{R}^n$  – вещественное пространство размерности  $n$ ;  $\mathbf{M}(\mathbf{q}) =$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_a \end{bmatrix}, \text{ где } \mathbf{M}_a = m\mathbf{E}_3, \ m - \text{масса трикоптера, } \mathbf{O}_{m \times n} - \text{нулевая матрица размера } m \times n;$$

$\mathbf{E}_n$  – единичная матрица  $n$ -го порядка;  $\mathbf{J}_a(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_{eb}^T \mathbf{J} \mathbf{P}_{eb}$ , где  $\mathbf{P}_{eb}$  – матрица кинематического преобразования, характеризующая связь между угловыми скоростями в инерциальной и связанной системах координат;  $\mathbf{J}$  – симметричная матрица моментов инерции;

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \dot{\mathbf{J}}_a - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbf{J}_a) \end{bmatrix}; \\ \mathbf{B}(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{be} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{P}_{eb}$  – матрица вращения, осуществляющая преобразование координат из связанной системы  $X_B Y_B Z_B$  в земную систему  $X_E Y_E Z_E$  и определяющаяся через углы Эйлера;  $\mathbf{G} = [0 \ 0 \ mg \ 0 \ 0 \ 0]^T$ ,  $g$  – ускорение свободного падения;

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \\ = \begin{bmatrix} k_f & k_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_f & k_f & k_f \\ -k_\tau & k_\tau & 0 & -k_f l_s & k_f l_s & 0 \\ 0 & 0 & k_\tau & -k_f l_f & -k_f l_f & k_f l_b \\ k_f l_s & -k_f l_s & -k_f l_b & -k_\tau & k_\tau & -k_\tau \end{bmatrix} \in \\ \in \mathbb{R}^{6 \times 6} \end{aligned}$$

– матрица входа, где  $l_b$  – расстояние от заднего несущего винта до центра масс трикоптера в направлении  $X_B$ ;  $l_f$  и  $l_s$  – расстояния от передних винтов до центра масс трикоптера в направлениях  $X_B$  и  $Y_B$  соответственно;  $k_f$  и  $k_\tau$  – аэродинамические коэффициенты сил тяги и крутящего момента;

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = [\omega_1^2 \sin(\alpha_1) \ \omega_2^2 \sin(\alpha_2) \ \omega_3^2 \sin(\alpha_3) \\ \omega_1^2 \cos(\alpha_1) \ \omega_2^2 \cos(\alpha_2) \ \omega_3^2 \cos(\alpha_3)]^T \in \mathbb{R}^6 \end{aligned}$$

– вектор входных воздействий, где  $\omega_i$  – скорость вращения  $i$ -го винта,  $\alpha_i$  – угол наклона  $i$ -го винта ( $i = 1, 2, 3$ );

$$\mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}) = [-(\mathbf{R}_{be} \mathbf{d}_\xi \mathbf{D}_\xi(\dot{\mathbf{q}}))^T - (\mathbf{d}_\eta \mathbf{D}_\eta(\dot{\mathbf{q}}))^T]^T \in \mathbb{R}^6$$

– вектор обобщенных сил и моментов сопротивления атмосферы, где  $\mathbf{D}_\xi = [u|u| \quad v|v| \quad w|w|]^T$ ,  $\mathbf{D}_\eta = [\dot{\phi}|\dot{\phi}| \quad \dot{\theta}|\dot{\theta}| \quad \dot{\psi}|\dot{\psi}|]^T$ ,  $\mathbf{d}_\xi = \text{diag}[d_x \quad d_y \quad d_z]$ ,  $\mathbf{d}_\eta = \text{diag}[d_\phi \quad d_\theta \quad d_\psi]$ ,  $d_x, d_y, d_z, d_\phi, d_\theta, d_\psi$  – коэффициенты аэродинамического сопротивления атмосферы,  $u, v, w$  – элементы вектора скорости центра масс трикоптера в системе координат  $X_B Y_B Z_B$ ;  $\mathbf{F}_p(t) \in \mathbb{R}^6$  – вектор обобщенных внешних возмущений.

Рассматривая случай, когда управляющие воздействия ограничены по амплитуде ( $|u_i| \leq u_M$ ), а внешние возмущения отсутствуют ( $\|\mathbf{F}_p(t)\| = 0$ ), уравнение динамики (1) пространственного движения рассматриваемой трикоптерной платформы может быть представлено в следующей форме:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{H}\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}), \quad (2)$$

где  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$  – вектор расчетных управляющих сигналов;  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$  – вектор реализуемых (ограниченных) управляющих воздействий;

$$u_i(\tau_i) = \text{sat}(\tau_i) = \begin{cases} \text{sign}(\tau_i)u_M, & \text{если } |\tau_i| \geq u_M; \\ \tau_i, & \text{если } |\tau_i| < u_M, \end{cases} \quad (i = \overline{1, 6}).$$

**Синтез адаптивного робастного управления СЭМПО.** На основе комбинированного подхода, объединяющего метод инвариантного погружения и функциональную аппроксимацию, преобразуем исходную модель (2) к виду, учитывающему неопределенности параметров:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{M}_k(\mathbf{q}) + \Delta\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{q}} + \\ & + [\mathbf{C}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Delta\mathbf{C}]\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{G}_k + \Delta\mathbf{G}] = \\ & = \mathbf{B}(\mathbf{q})[\mathbf{H}_k - \mathbf{H}_0]\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}), \end{aligned} \quad (3)$$

где структурные компоненты системы включают:  $\mathbf{M}_k(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{C}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\mathbf{G}_k$  – матрицы с известными функциональными элементами;  $\mathbf{H}_k$ ,  $\mathbf{H}_0 = (\mathbf{H}_k - \mathbf{H})$  – известная и неизвестная части входной матрицы управления соответственно ( $\mathbf{H}_k$  – невырожденная матрица);  $\Delta\mathbf{M}$ ,  $\Delta\mathbf{C}$ ,  $\Delta\mathbf{G}$  – неопределенные части матриц  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$ ,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ ,  $\mathbf{G}$ , вызванные неопределенностями параметров трикоптера.

Введем обозначение для дефицита управления из-за насыщения входных воздействий, определяемого разницей между фактическими управляющими воздействиями  $\mathbf{u}(t)$  и управляющими воздействиями  $\boldsymbol{\tau}(t)$ , формируемыми регуляторами, как

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{u}(t) - \boldsymbol{\tau}(t). \quad (4)$$

Пусть введены следующие переменные:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d; \\ \mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{K}_1\mathbf{e}_1, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\mathbf{e}_1$  – вектор ошибок слежения;  $\mathbf{q}_d$  – вектор желаемых движений трикоптера;  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1^T \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  – симметричная положительно определенная матрица.

Тогда, учитывая (3)–(5), получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_1 = -\mathbf{K}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \\ \dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{g}_0\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_0 + \Delta\mathbf{F} + \mathbf{g}_0\boldsymbol{\delta}, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0 &= \mathbf{M}_k^{-1}\mathbf{B}\mathbf{H}_k; \\ \boldsymbol{\tau}_0 &= -\mathbf{M}_k^{-1}[\mathbf{C}_k\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}_k] + \mathbf{K}_1\dot{\mathbf{e}}_1 - \ddot{\mathbf{q}}_d; \\ \Delta\mathbf{F}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \mathbf{u}) &= \end{aligned}$$

$$= \mathbf{M}_k^{-1}[\mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{H}_0\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}) - \Delta\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} - \Delta\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} - \Delta\mathbf{G}]$$

– неопределенная часть математической модели трикоптера, обусловленная неопределенностями параметров трикоптера и входной матрицы.

Таким образом, поставленная в статье задача эквивалентна устранению (или минимизации) влияния неопределенной части  $\Delta\mathbf{F}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \mathbf{u})$  и эффекта насыщения входных воздействий, рассматриваемого как известное возмущение  $\mathbf{g}_0\boldsymbol{\delta}$ , при одновременном обеспечении высокой точности отслеживания заданного движения. Для решения поставленной задачи управления предлагается новый алгоритм, сочетающий функциональную аппроксимацию на основе ортогональных разложений и параметрическую идентификацию методом инвариантных многообразий.

С помощью ортогональных разложений, рассмотренных в [34], [35], неизвестная нелинейная вектор-функция  $\Delta\mathbf{F}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \mathbf{u})$  допускает следующее параметрическое представление:

$$\Delta\mathbf{F} = \mathbf{W}^T\mathbf{z} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N \times 6}$  – матрица неизвестных весовых коэффициентов;  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^N$  – система ортогональных базисных функций, содержащий первые

$N$  членов ряда Фурье;  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^6$  – вектор ошибки аппроксимации;

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & \dots \\ \sin\left(\frac{N-1}{2}\omega t\right) & \cos\left(\frac{N-1}{2}\omega t\right) & \dots \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^N,$$

$$\omega > 0;$$

$$\mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} a_{01} & a_{11} & b_{11} & \dots & a_{\frac{N-1}{2}1} & b_{\frac{N-1}{2}1} \\ a_{02} & a_{12} & b_{12} & \dots & a_{\frac{N-1}{2}2} & b_{\frac{N-1}{2}2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{06} & a_{16} & b_{16} & \dots & a_{\frac{N-1}{2}6} & b_{\frac{N-1}{2}6} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times N}.$$

С целью синтеза алгоритма настройки неизвестных параметров матрицы  $\mathbf{W}$  методом инвариантного погружения преобразуем  $\mathbf{W}^T \mathbf{z}$  к виду произведения вектора неизвестных элементов на матрицу-регрессор:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}^T \mathbf{z}(t) &= \sum_{k=1}^N \mathbf{W}_k z_k = \\ &= \sum_{k=1}^N (z_k \mathbf{E}_6) \mathbf{W}_k = \mathbf{z}_0(t) \mathbf{W}_0, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\mathbf{W}_k \in \mathbb{R}^6$  –  $k$ -й столбец матрицы  $\mathbf{W}^T$ ;  $z_k \in \mathbb{R}$  –  $k$ -й элемент вектора  $\mathbf{z}$ , ( $k = \overline{1, N}$ );  $\mathbf{z}_0(t) = [z_1 \mathbf{E}_6 \ z_2 \mathbf{E}_6 \ \dots \ z_N \mathbf{E}_6] \in \mathbb{R}^{6 \times 6N}$  – матрица-регрессор;  $\mathbf{W}_0 = [\mathbf{W}_1^T \ \mathbf{W}_2^T \ \dots \ \mathbf{W}_N^T]^T \in \mathbb{R}^{6N}$  – вектор неизвестных параметров.

Фактически,  $\mathbf{e}$  представляет собой медленно изменяющуюся во времени переменную и значение  $\|\mathbf{e}\|$  достаточно мало, поэтому можно рассматривать  $\mathbf{e}$  как вектор с неизвестными постоянными элементами. Пусть  $\chi(t) = [\mathbf{z}_0(t) \ \mathbf{E}_6] \in \mathbb{R}^{6 \times 6(N+1)}$ ;  $\mathbf{\vartheta} = [\mathbf{W}_0^T \ \mathbf{e}^T]^T \in \mathbb{R}^{6(N+1)}$ , учитывая (7) и (8), система (6) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_1 = -\mathbf{K}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \\ \dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{g}_0 \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_0 + \chi \mathbf{\vartheta} + \mathbf{g}_0 \boldsymbol{\delta}. \end{cases} \quad (9)$$

С целью устранения влияния  $\mathbf{g}_0 \boldsymbol{\delta}$ , рассматриваемого в качестве известного возмущения, построим вспомогательную динамическую систему, описанную следующим дифференциальным уравнением:

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = -\mathbf{K}_{\boldsymbol{\zeta}} \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{g}_0 \boldsymbol{\delta}, \quad (10)$$

где  $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^6$  – вектор переменных вспомогательной динамической системы;  $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{K}_{\boldsymbol{\zeta}}^T \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  – симметричная положительно определенная числовая матрица.

Введем переменную  $\mathbf{e}_{\delta} = \mathbf{e}_2 - \boldsymbol{\zeta}$ . Тогда, учитывая (9) и (10), ее динамику можно описать таким образом:

$$\dot{\mathbf{e}}_{\delta} = \dot{\mathbf{e}}_2 - \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \mathbf{g}_0 \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_0 + \mathbf{K}_{\boldsymbol{\zeta}} \boldsymbol{\zeta} + \chi \mathbf{\vartheta}. \quad (11)$$

Легко увидеть, что это уравнение зависит не от дефицита управления  $\boldsymbol{\delta}(t)$ , а от управляющего воздействия  $\boldsymbol{\tau}(t)$ , формируемого регуляторами. Поэтому синтезировать управление удобнее на основе уравнения (11), а не (9) с дефицитом управления.

В рамках рассматриваемого подхода, опирающегося на принцип инвариантного погружения [16]–[18], формулируется вектор ошибки оценивания параметров следующей формы:

$$\tilde{\mathbf{\vartheta}} = \hat{\mathbf{\vartheta}} - \mathbf{\vartheta} + \boldsymbol{\beta}(\mathbf{e}_{\delta}, t), \quad (12)$$

где  $\hat{\mathbf{\vartheta}} \in \mathbb{R}^{6(N+1)}$  – оценка неизвестного вектора  $\mathbf{\vartheta}$ ;  $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{e}_{\delta}, t) \in \mathbb{R}^{6(N+1)}$  – искомая вектор-функция.

Динамические свойства ошибки оценивания (12) выражаются как

$$\dot{\tilde{\mathbf{\vartheta}}} = \dot{\hat{\mathbf{\vartheta}}} + \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{e}_{\delta}} \dot{\mathbf{e}}_{\delta}. \quad (13)$$

Аналитическое выражение для динамики (12) может быть получено путем подстановки уравнения (11) в соотношение (13), что приводит к следующему результату:

$$\dot{\tilde{\mathbf{\vartheta}}} = \dot{\hat{\mathbf{\vartheta}}} + \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{e}_{\delta}} (\mathbf{g}_0 \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_0 + \mathbf{K}_{\boldsymbol{\zeta}} \boldsymbol{\zeta} + \chi \mathbf{\vartheta}). \quad (14)$$

В статье предложен адаптивный алгоритм настройки параметров с  $\sigma$ -модификацией и функция  $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{e}_{\delta}, t)$ , имеющие следующую структуру:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{\vartheta}}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} - \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial \mathbf{e}_{\delta}} \times \\ \times [\mathbf{g}_0 \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_0 + \mathbf{K}_{\boldsymbol{\zeta}} \boldsymbol{\zeta} + \chi (\hat{\mathbf{\vartheta}} + \boldsymbol{\beta})] - \Gamma \sigma(\hat{\mathbf{\vartheta}} + \boldsymbol{\beta}); \\ \boldsymbol{\beta} = \Gamma \chi^T \mathbf{e}_{\delta}, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \partial \boldsymbol{\beta} / \partial t &= \Gamma \dot{\chi}^T \mathbf{e}_{\delta}; \quad \partial \boldsymbol{\beta} / \partial \mathbf{e}_{\delta} = \Gamma \chi^T; \\ \Gamma &\in \mathbb{R}^{6(N+1) \times 6(N+1)} \end{aligned}$$

– симметричная положительно определенная матрица коэффициентов адаптации,  $\sigma > 0$  – параметр регуляризации, обеспечивающей робастную устойчивость.

Объединяя (14) и (15), можно получить следующее соотношение:

$$\dot{\tilde{\mathbf{g}}} = -\mathbf{\Gamma} \chi^T \chi \tilde{\mathbf{g}} - \mathbf{\Gamma} \sigma (\hat{\mathbf{g}} + \boldsymbol{\beta}). \quad (16)$$

В качестве кандидата на функцию Ляпунова рассмотрим выражение вида:

$$V_1 = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{g}}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \tilde{\mathbf{g}}. \quad (17)$$

Анализируя (16), производную по времени функции (17) можно представить в следующем виде:

$$\dot{V}_1 = \tilde{\mathbf{g}}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{g}}} = -\tilde{\mathbf{g}}^T \chi^T \chi \tilde{\mathbf{g}} - \sigma \tilde{\mathbf{g}}^T (\hat{\mathbf{g}} + \boldsymbol{\beta}). \quad (18)$$

Нетрудно, выводя неравенство вида  $-\tilde{\mathbf{g}}^T (\hat{\mathbf{g}} + \boldsymbol{\beta}) = -\tilde{\mathbf{g}}^T (\tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{g}) \leq \frac{1}{2} (-\|\tilde{\mathbf{g}}\|^2 + \|\mathbf{g}\|^2)$ , получить выражение для производной функции Ляпунова

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -\|\chi \tilde{\mathbf{g}}\|^2 - \frac{\sigma}{2} \|\tilde{\mathbf{g}}\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\mathbf{g}\|^2 \leq \\ &\leq -\frac{\sigma}{\lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}^{-1})} V_1 - \|\chi \tilde{\mathbf{g}}\|^2 + \frac{\sigma}{2} \|\mathbf{g}\|^2, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}^{-1}) > 0$  – максимальное собственное число матрицы  $\mathbf{\Gamma}^{-1}$ .

Как видно из (19), переменная  $\tilde{\mathbf{g}}$  ограничена, причем с уменьшением  $\sigma$  и увеличением собственных чисел матрицы  $\mathbf{\Gamma}$   $\|\chi \tilde{\mathbf{g}}\|$  стремится к нулю. Из условия  $\chi(t) \neq 0$  наблюдается сходимость  $\tilde{\mathbf{g}}$  к нулю, т. е. сходимость оценок неизвестных параметров к их фактическим значениям.

В результате проведенного синтеза получен адаптивный робастный алгоритм управления, структура которого описывается уравнением

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{g}_0^{-1} \left[ \boldsymbol{\tau}_0 + \mathbf{K}_\zeta \zeta + \chi (\hat{\mathbf{g}} + \boldsymbol{\beta}) + \mathbf{e}_1 + \mathbf{K}_2 \mathbf{e}_\delta \right], \quad (20)$$

где  $\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_2^T \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  – симметричная положительно определенная матрица.

Нетрудно отметить, что в алгоритме адаптации (15) и в законе адаптивного робастного управления (20) присутствуют компоненты  $\mathbf{e}_\delta = \mathbf{e}_2 - \zeta$  и  $\zeta$  вспомогательной системы (10),

обеспечивающие компенсацию влияния ограничений управляющих сигналов.

**Анализ устойчивости замкнутой системы.** Устойчивость разработанной адаптивной робастной системы управления анализируется посредством метода функций Ляпунова.

Рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{e}_\delta^T \mathbf{e}_\delta + \frac{1}{2} \zeta^T \zeta + V_1. \quad (21)$$

Используя уравнения (9)–(11), (17), (18) и (20), найдем производную функции (21) по времени:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{e}_1^T \dot{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{e}_\delta^T \dot{\mathbf{e}}_\delta + \zeta^T \dot{\zeta} + \dot{V}_1 = \\ &= \mathbf{e}_1^T (-\mathbf{K}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) - \mathbf{e}_\delta^T (\chi \tilde{\mathbf{g}} + \mathbf{e}_1 + \mathbf{K}_2 \mathbf{e}_\delta) + \\ &+ \zeta^T (-\mathbf{K}_\zeta \zeta + \mathbf{g}_0 \delta) - \tilde{\mathbf{g}}^T \chi^T \chi \tilde{\mathbf{g}} - \sigma \tilde{\mathbf{g}}^T (\hat{\mathbf{g}} + \boldsymbol{\beta}) = \\ &= -\mathbf{e}_1^T \mathbf{K}_1 \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_\delta^T \mathbf{K}_2 \mathbf{e}_\delta - \zeta^T \mathbf{K}_\zeta \zeta - \tilde{\mathbf{g}}^T \chi^T \chi \tilde{\mathbf{g}} + \\ &+ \mathbf{e}_1^T \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_\delta^T \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_\delta^T \chi \tilde{\mathbf{g}} + \zeta^T \mathbf{g}_0 \delta - \sigma \tilde{\mathbf{g}}^T (\hat{\mathbf{g}} + \boldsymbol{\beta}). \end{aligned} \quad (22)$$

Нетрудно получить следующие неравенства:

$$\begin{cases} -\mathbf{e}_\delta^T \mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 + \zeta^T \mathbf{e}_1 \leq -\mathbf{e}_2^T \mathbf{e}_1 + \frac{1}{2} \|\zeta\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_1\|^2; \\ -\mathbf{e}_\delta^T \chi \tilde{\mathbf{g}} \leq \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_\delta\|^2 + \frac{1}{2} \|\chi \tilde{\mathbf{g}}\|^2; \\ \zeta^T \mathbf{g}_0 \delta \leq \frac{\mu}{2} \|\zeta\|^2 + \frac{1}{2\mu} \|\mathbf{g}_0 \delta\|^2, \end{cases} \quad (23)$$

где  $\mu$  – положительное число.

Комбинируя (19), (22) и (23), получаем следующее представление для  $\dot{V}$ :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\left[ \lambda_{\min}(\mathbf{K}_1) - \frac{1}{2} \right] \|\mathbf{e}_1\|^2 - \\ &- \left[ \lambda_{\min}(\mathbf{K}_2) - \frac{1}{2} \right] \|\mathbf{e}_\delta\|^2 - \\ &- \left[ \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\zeta) - \frac{\mu+1}{2} \right] \|\zeta\|^2 - \\ &- \frac{\sigma}{2} \|\tilde{\mathbf{g}}\|^2 - \frac{1}{2} \|\chi \tilde{\mathbf{g}}\|^2 + \Delta, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\Delta$  – положительное число, удовлетворяющее условию  $\Delta \geq \left( \frac{\sigma}{2} \|\mathbf{g}\|^2 + \frac{1}{2\mu} \|\mathbf{g}_0 \delta\|^2 \right)$ ,  $\lambda_{\min}(\mathbf{X})$  – минимальное собственное число произвольной квадратной матрицы  $\mathbf{X}$ .

Из (17) и (21) имеем

$$\begin{aligned} V &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_1\|^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{e}_\delta\|^2 + \frac{1}{2} \|\zeta\|^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}^{-1}) \|\tilde{\mathbf{g}}\|^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Из анализа неравенств (24) и (25) выводится следующая зависимость:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\alpha V + \left[ \frac{\alpha}{2} - \left( \lambda_{\min}(\mathbf{K}_1) - \frac{1}{2} \right) \right] \|\mathbf{e}_1\|^2 + \\ & + \left[ \frac{\alpha}{2} - \left( \lambda_{\min}(\mathbf{K}_2) - \frac{1}{2} \right) \right] \|\mathbf{e}_\delta\|^2 + \\ & + \left[ \frac{\alpha}{2} - \left( \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\zeta) - \frac{\mu+1}{2} \right) \right] \|\zeta\|^2 + \\ & + \left[ \frac{\alpha \lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}^{-1})}{2} - \frac{\sigma}{2} \right] \|\tilde{\mathbf{g}}\|^2 - \frac{1}{2} \|\chi \tilde{\mathbf{g}}\|^2 + \Delta. \end{aligned}$$

Пусть  $\alpha > 0$  – положительное число, значение которого определяется выполнением следующих условий:

$$\alpha \leq \min \left\{ \begin{array}{l} 2\lambda_{\min}(\mathbf{K}_1) - 1; \quad 2\lambda_{\min}(\mathbf{K}_2) - 1; \\ 2\lambda_{\min}(\mathbf{K}_\zeta) - (\mu+1); \quad \sigma/\lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}_1^{-1}) \end{array} \right\},$$

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}_1) > 1; \quad \lambda_{\min}(\mathbf{K}_2) > \frac{1}{2}; \quad \lambda_{\min}(\mathbf{K}_\zeta) > \frac{\mu+1}{2}.$$

В результате выбора параметров получена зависимость следующего вида:

$$\dot{V} \leq -\alpha V + \Delta.$$

Полученное дифференциальное неравенство имеет решение вида

$$0 \leq V(t) \leq \left[ V(0) - \frac{\Delta}{\alpha} \right] e^{-\alpha t} + \frac{\Delta}{\alpha}, \quad (26)$$

следовательно, сигналы  $\mathbf{e}_1$ ;  $\mathbf{e}_\delta = \mathbf{e}_2 - \zeta$ ;  $\zeta$ ;  $\tilde{\mathbf{g}}$  ограничены, из чего вытекает ограниченность  $\mathbf{e}_2$ .

Как следует из анализа, все сигналы контура управления остаются ограниченными и экспоненциально стремятся к предельному инвариантному множеству, размер которого определяется параметрами  $\Delta$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$ . Регулируя значения  $\sigma$  (уменьшая) и  $\alpha$ ,  $\mu$  (увеличивая), можно сократить размер этого множества [36].

Объединяя выражения (21) и (26), выводим следующее соотношение:

$$\|\mathbf{e}_1(t)\| \leq \sqrt{2 \left[ V(0) - \frac{\Delta}{\alpha} \right] e^{-\alpha t} + \frac{2\Delta}{\alpha}}.$$

Граничное значение сигнала  $\|\mathbf{e}_1(t)\|$ , как видно из анализа, изменяется при варьировании параметров  $\Delta$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\mu$ . Однако в реальных условиях достижение произвольно малой ошибки слежения ограничено эффектом насыщения управляющих воздействий. Выбирая параметры предло-

женного в статье адаптивного робастного регулятора, можно обеспечить достаточно малое значение  $\|\mathbf{e}_1\|$  и уменьшить влияние входного насыщения. Если  $\|\tilde{\mathbf{g}}\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , причем величина  $\sigma$  достаточно мала, сигналы  $\mathbf{e}_1$ ;  $\mathbf{e}_2$ ;  $\mathbf{e}_\delta = \mathbf{e}_2 - \zeta$ ;  $\zeta$ ;  $\tilde{\mathbf{g}}$  устремляются к нулю.

**Результаты моделирования и аналитическое обсуждение.** Имитационное моделирование предложенной адаптивной робастной системы управления проводилось в среде MatLab/Simulink. Исследование рассматривало сложный случай, включающий одновременное воздействие трех факторов: неопределенности параметров, частичной неизвестности входной матрицы и ограничения входных сигналов при следующих номинальных значениях параметров объекта: [33]:  $l_b = 0.33$  м,  $m = 1.449$  кг,  $k_f = 0.1081 \cdot 10^{-4}$  кг·м,  $k_\tau = 0.1729 \cdot 10^{-6}$  кг·м<sup>2</sup>,  $\mathbf{J} = \text{diag}(0.1037, 0.1031, 0.171)$ ,  $d_x = 0.0242$ ,  $d_y = 0.0316$ ,  $d_z = 0.0546$ ,  $d_\phi = 0.01$ ,  $d_\theta = 0.0105$ ,  $d_\psi = 0.0121$ . Управляющие воздействия имеют ограничение по уровню насыщения  $u_M = 12.5 \cdot 10^4$ .

Параметры разработанного алгоритма адаптации (15) и адаптивного робастного управления (20) выбраны как  $\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_{\text{nom}}$ ;  $\mathbf{K}_1 = \text{diag}(5, 5, 5, 10^3, 10^3, 10^3)$ ;  $\mathbf{K}_2 = 2500\mathbf{E}_6$ ;  $\mathbf{K}_\zeta = 5\mathbf{E}_6$ ;  $N = 15$ ;  $\omega = 10$ ;  $\hat{\mathbf{g}}(0) = \mathbf{O}_{96 \times 1}$ ;  $\mathbf{\Gamma} = 25\mathbf{E}_{96}$ ;  $\sigma = 10^{-3}$ .

Для оценки эффективности разработанной в статье адаптивной робастной системы управления проведено сравнение с системой управления из [37]. Особый интерес представляют результаты сравнительного исследования для наихудшего случая при экстремальных условиях эксплуатации, включающих снижение аэродинамических коэффициентов на 25 % от номинальных значений с учетом насыщения управляющих воздействий. Результаты численного моделирования отображены графически на рис. 1–9, где приняты следующие условные обозначения

- штрихпунктирные линии – заданное движение трикоптера;
- штриховые линии – движение или управляющие сигналы трикоптера с алгоритмом адаптивного робастного управления из [37];
- сплошные линии – движение или управляющие сигналы трикоптера с предложенным в статье адаптивным робастным управлением;

– линии с круговыми маркерами – пороги допустимого значения управляющих воздействий, соответствующие насыщению.

В первом сценарии моделирования рассматривалось движение по постоянным желаемым траекториям  $\mathbf{q}_d(t) = [2.5 \ 2.5 \ 2.5 \ 0 \ 0 \ \pi/2]^T$ . На рис. 1–3 представлены графики движения трикоптера, управляющих сигналов и скоростей вращения/углов наклона несущих винтов трикоптера соответственно.

Во втором сценарии моделирования исследовалось отслеживание траектории спиральной формы  $\mathbf{q}_d(t) = [10\sin(0.4t + \pi/2) \ 10\sin(0.4t) \ 5 + 0.5t \ 0 \ 0 \ \pi/4]^T$ . На рис. 4–7 представлены графики траектории трикоптера, ошибки отслеживания заданной траектории, управляющих сигналов и скоростей вращения/углов наклона несущих винтов трикоптера соответственно.

На основании анализа результатов численного моделирования (рис. 1–7) можно сделать вывод, что разработанный адаптивный робастный алгоритм, а также метод, описанный в [37], обеспечивают эффективное управление в указанных условиях, при этом предложенный в статье метод демонстрирует более высокое качество управления.

Как видно из рис. 1, 4 и 5, адаптивный робастный алгоритм с  $\sigma$ -модификацией из [37] гарантирует, что все сигналы системы ограничены, а ошибка слежения становится достаточно малой, т. е., несмотря на обеспечение высокой точности управления, всегда сохраняется очень маленькая ошибка слежения (как в моделировании, где ошибка слежения составляет 0.004 м при задан-

ных постоянных сигналах и 0.025 м при заданной траектории спиральной формы, и входит в «трубку»  $0.5 \ll 5\%$ ). В то же время, предложенный в статье алгоритм не только обеспечивает ограниченность всех сигналов контура управления, но и сходимость ошибки слежения к нулю.

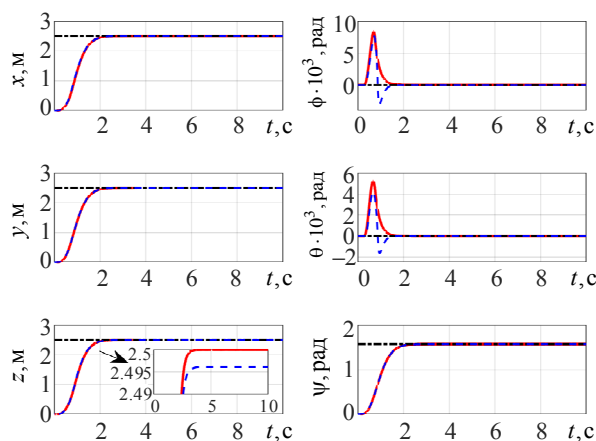


Рис. 1. Движения трикоптера при заданных постоянных сигналах

Fig. 1. Tricopter movements with given constant signals

Кроме того, как видно из рис. 2, 3, 6 и 7, при действии входных ограничений в разработанной системе управления управляющие сигналы, скорости вращения и углы наклона несущих винтов трикоптера на начальном этапе работы изменяются плавно, без резких скачков. Это отличает ее от системы из [37], где наблюдаются чрезмерно быстрые изменения этих сигналов в начале процесса управления.

Таким образом, предложенный в статье алгоритм управления обладает более высокой работо-

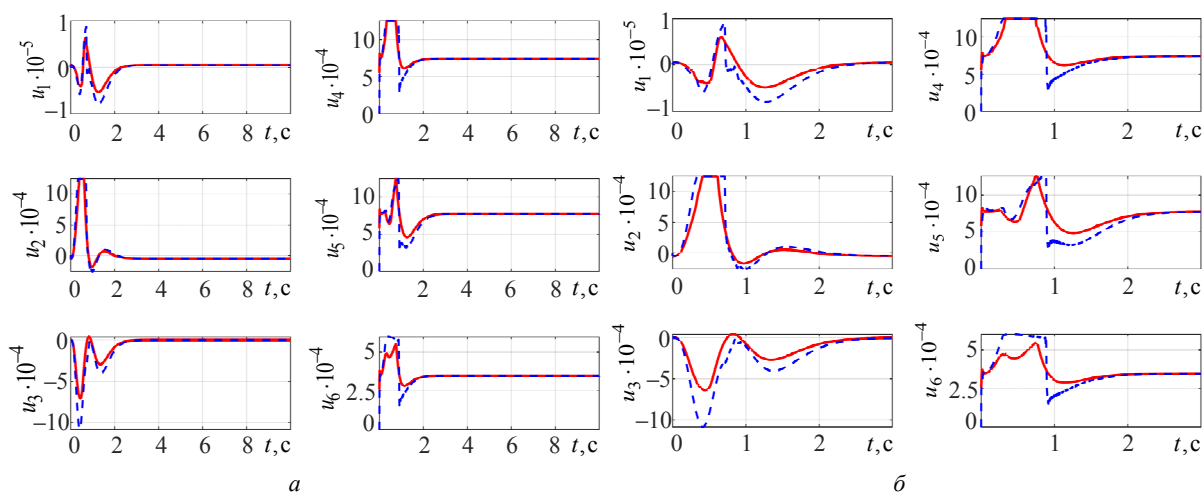


Рис. 2. Управляющие сигналы при заданных постоянных сигналах: а – в полном процессе; б – в начальном процессе  
Fig. 2. Control signals with given constant signals: a – in the full process; б – in the initial process

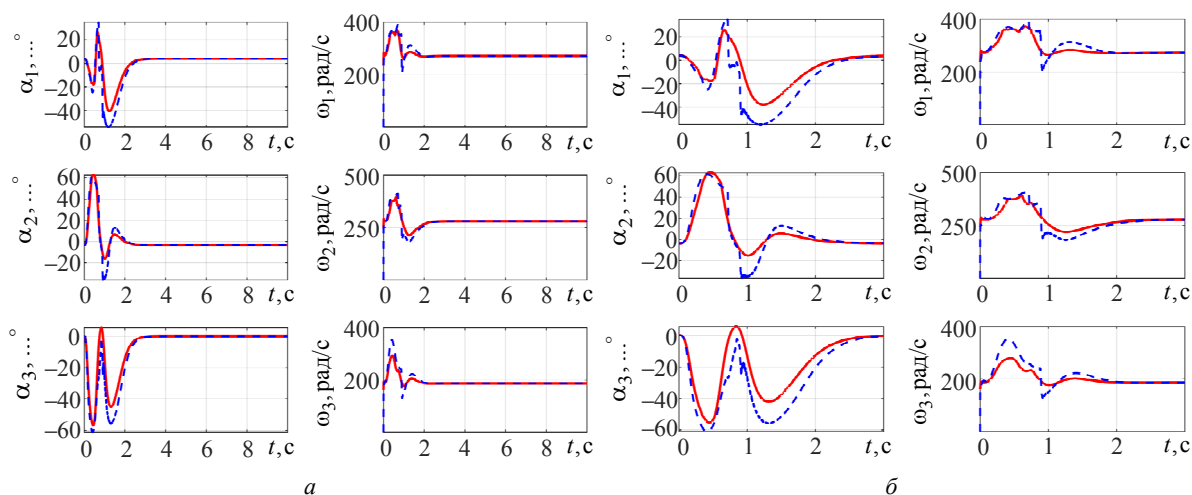


Рис. 3. Скорости вращения и углы наклона несущих винтов трикоптера при заданных постоянных сигналах:  
 а – в полном процессе; б – в начальном процессе

Fig. 3. Rotation speeds and tilt angles of tricopter with given constant signals: *a* – in the full process; *b* – in the initial process

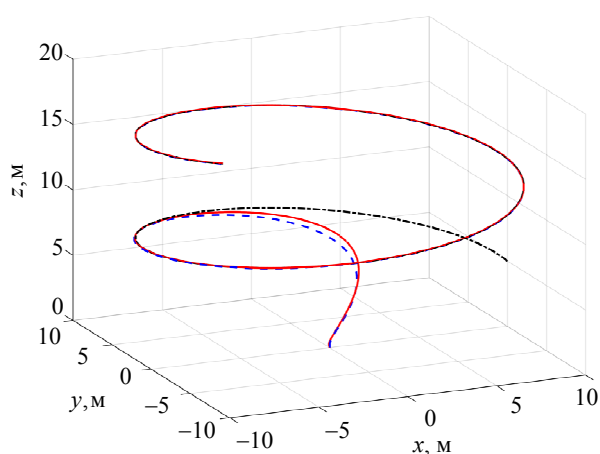


Рис. 4. Движения трикоптера при заданной траектории спиральной формы

Fig. 4. Tricopter movements with given spiral trajectory

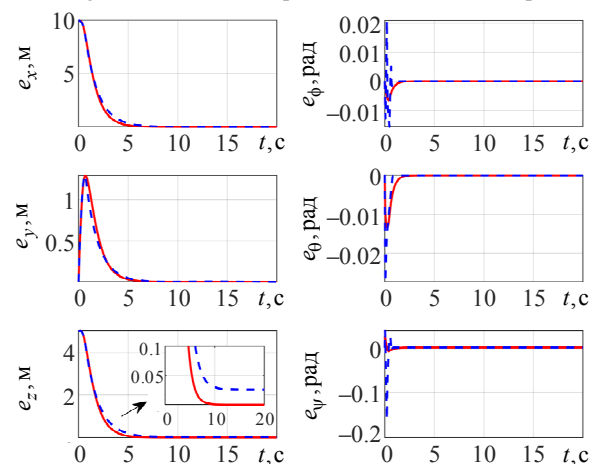


Рис. 5. Ошибки слежения трикоптера при заданной траектории спиральной формы

Fig. 5. Tricopter tracking errors with given spiral trajectory

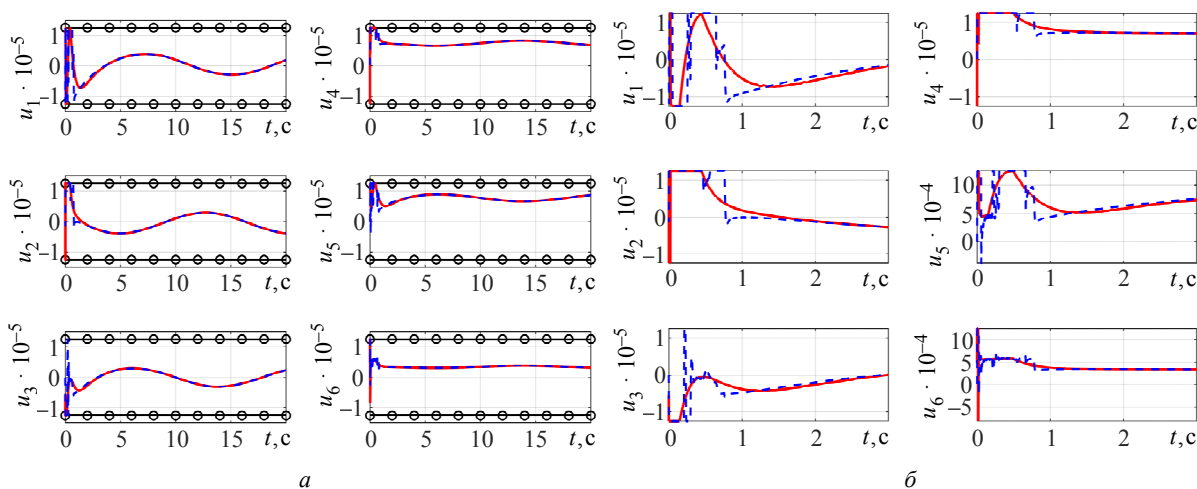


Рис. 6. Управляющие сигналы при заданной траектории спиральной формы:  
 а – в полном процессе; б – в начальном процессе

Fig. 6. Control signals with given spiral trajectory: *a* – in the full process; *b* – in the initial process

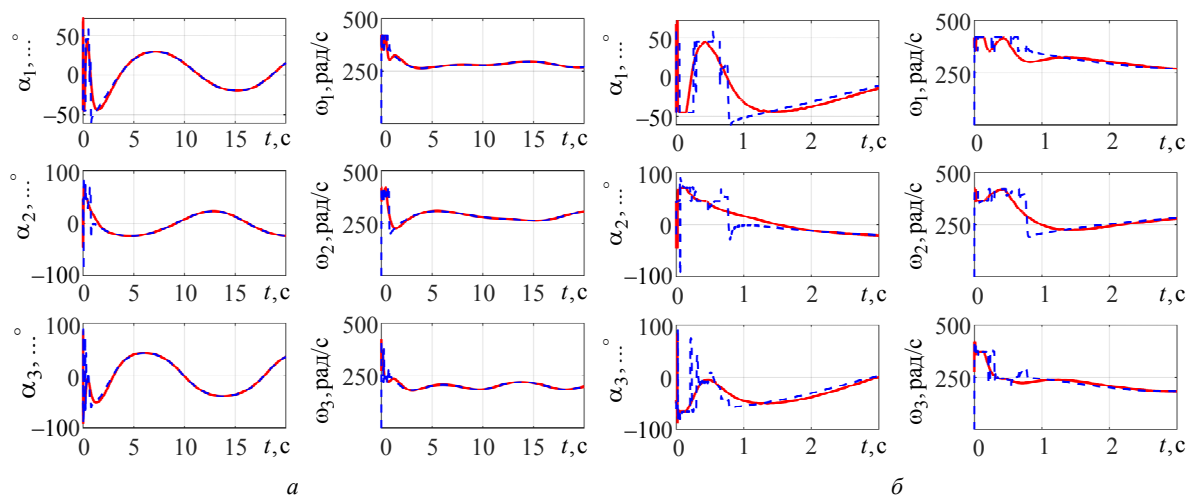


Рис. 7. Скорости вращения и углы наклона несущих винтов трикоптера при заданной траектории спиральной формы:  
а – в полном процессе; б – в начальном процессе

Fig. 7. Rotation speeds and tilt angles of tricopter with given spiral trajectory: *a* – in the full process; *b* – in the initial process

способностью по сравнению с алгоритмом, приведенным в [37]. Это делает его особенно перспективным для практического применения в таких областях, как робототехника, авиакосмические системы, промышленная автоматизация и другие сложные динамические системы, где традиционные методы управления могут оказаться недостаточно эффективными.

**Заключение.** Статья представляет комплексное исследование адаптивного робастного алгоритма управления СЭМПО с повышенной работоспособностью при неполной информации о параметрах объекта, частично неизвестной матрицы управления и наличии насыщения управляющих сигналов. Исходя из полученных результатов, можно утверждать следующее:

1. Разработана нелинейная математическая модель трикоптера с поворотными винтами, рассматриваемого в качестве иллюстративного примера СЭМПО, учитывающая насыщение управления и параметрическую неопределенность.

2. Предложен новый адаптивный робастный алгоритм управления, сочетающий метод инвариантного погружения и функциональную аппроксимацию на основе ортогональных разложений.

3. На основе анализа устойчивости по Ляпунову установлено, что предложенный алгоритм гарантирует не только сходимость настраиваемых параметров к реальным значениям, но и ограниченность сигналов в системе с экспоненциальной сходимостью к инвариантному множеству, размеры которого регулируются параметрами управления.

4. Проведенный сравнительный анализ результатов компьютерного моделирования наглядно демонстрирует существенные преимущества данного подхода в условиях неопределенности параметров, частично неопределенной входной матрицы и насыщения входных воздействий. Разработанный в данной работе адаптивный робастный алгоритм управления обладает лучшей применимостью для реального внедрения по сравнению с рассматриваемым аналогом из [37] и может быть распространен на класс СЭМПО, динамика которых описывается уравнениями Эйлера–Лагранжа.

## Список литературы

1. Li X., Yu W. A systematic tuning method of PID controller for robot manipulators // 9<sup>th</sup> IEEE Int. Conf. on Control and Automation (ICCA). Santiago, Chile: IEEE, 2011. P. 274–279. doi: 10.1109/ICCA.2011.6138081.
2. Leines M. T., Yang J.-S. LQR control of an under actuated planar biped robot // 6<sup>th</sup> IEEE Conf. on Industrial Electronics and Appl. Beijing, China: IEEE, 2011. P. 1684–1689. doi: 10.1109/ICIEA.2011.5975861.
3. Liu Fan, Joo E. M. Linear and nonlinear PD-type control of robotic manipulators for trajectory tracking // 4<sup>th</sup> IEEE Conf. on Industr. Electronics and Appl. Xi'an,

China: IEEE, 2009. P. 3442–3447, doi: 10.1109/ICIEA.2009.5138846.

4. FAT-based immersion and invariance adaptive control for rigid body attitude / J. Wang, G. He, S. Geng, S. Zhang, J. Zhang // IEEE Int. Conf. on Mechatronics and Automation (ICMA). Tianjin, China: IEEE, 2024. P. 834–839. doi: 10.1109/ICMA61710.2024.10633145.

5. Xia D., Yue X. Dynamic scaling-based adaptive control without scaling factor: With application to Euler–Lagrange systems // Int. J. of Robust and Nonlinear Control. 2021. Vol. 31, no. 10. P. 4531–4552. doi: 10.1002/rnc.5492.

6. Адаптивное управление роботизированными подвижными объектами / Б. Р. Андриевский, Н. Д. Поляхов, В. В. Путов, В. Н. Шелудько // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2016. № 5. С. 61–77.
7. Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 448 с.
8. Фрадков А. Л. Адаптивное управление в сложных системах. Бесписковые методы. М.: Наука, 1990. 292 с.
9. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
10. Путов В. В., Лебедев В. В., Путов А. В. Адаптивные системы управления многостепенными жесткими нелинейными механическими объектами, построенные по их упрощенным моделям с мажорирующими функциями // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2013. Т. 10. С. 49–54.
11. Slotine J.-J. Weiping Li applied nonlinear control. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. A Division of Simon & Schuster Englewood Cliffs, 1991. 459 p.
12. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. Nonlinear and adaptive control design. New York: John Wiley Interscience, 1995. 592 p.
13. Ioannou P., Sun J. Robust adaptive control. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 834 p.
14. Lavretsky E., Wise K. A. Robust and adaptive control with aerospace applications. London: Springer-Verlag London, 2012. 454 p.
15. Nguyen N. T. Model-reference adaptive control: A primer. Cham: Springer International Publishing, 2018. 444 p.
16. Astolfi A., Ortega R. Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 2003. Vol. 48, no. 4. P. 590–606. doi: 10.1109/TAC.2003.809820.
17. Astolfi A., Karagiannis D., Ortega R. Nonlinear and adaptive control with applications. London: Springer, 2008. 302 p.
18. Immersion and invariance adaptive control of nonlinearly parameterized nonlinear systems / X. Liu, R. Ortega, H. Su, J. Chu // IEEE Transactions on Automatic Control. 2010. Vol. 55, no. 9. P. 2209–2214. doi: 10.1109/TAC.2010.2052389.
19. Liu J., Liu X., Su H. Robust I&I adaptive DSC with disturbance observer for maglev system with output Constraint // 39<sup>th</sup> Chinese Control Conf. (CCC). Shenyang, China: IEEE, 2020. P. 1909–1914. doi: 10.23919/CCC50068.2020.9189084.
20. Synthesis of invariant immersion and dynamic surface control methods for nonlinear uncertain objects / D. K. Nguyen, T. L. Rusyaeva, V. V. Putov, V. N. Sheludko // XXVII Int. Conf. on Soft Comp. and Measurements (SCM). SPb., Russia: IEEE, 2024. P. 85–89. doi: 10.1109/SCM62608.2024.10554151.
21. Immersion and invariance based adaptive attitude tracking control of a quadrotor UAV in the presence of parametric uncertainty / B. Zhao, B. Xian, Y. Zhang, X. Zhang // Proc. of the 33<sup>rd</sup> Chinese Control Conf. Nanjing, China: IEEE, 2014. P. 1932–1937. doi: 10.1109/ChiCC.2014.6896925.
22. Immersion and invariance-based sliding mode attitude control of Tilt tri-rotor UAV in helicopter mode / L. Yu, G. He, S. Zhao, X. Wang, L. Shen // Int. J. Control Autom. Syst. 2021. Vol. 19. P. 722–735. doi: 10.1007/s12555-020-0110-9.
23. Han C., Liu Z., Yi J. Immersion and invariance adaptive control with  $\sigma$ -modification for air-breathing hypersonic vehicles // IEEE Int. Conf. on Mechatronics and Automation (ICMA). Takamatsu, Japan: IEEE, 2017. P. 1138–1143. doi: 10.1109/ICMA.2017.8015977.
24. Lavretsky E., Hovakimya N. Positive  $\mu$ -modification for stable adaptation in the presence of input constraints // Proc. of the 2004 Am. Control Conf. Boston, MA, USA: IEEE, 2004. P. 2545–2550. doi: 10.23919/ACC.2004.1383848.
25. Karason S. P., Annaswamy A. M. Adaptive control in the presence of input constraints // IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. Vol. 39, no. 11. P. 2325–2330. doi: 10.1109/9.333787.
26. Liu B., Guo Y., Li A. Nussbaum-based finite-time containment control for multi-UAVs with input saturation and velocity constraints // Aerospace Sci. and Technol. 2023. Vol. 139. P. 1–25. doi: 10.1016/j.ast.2023.108407.
27. Hu J., Zhang H. Immersion and invariance based command-filtered adaptive backstepping control of VTOL vehicles // Automatica. 2013. Vol. 49, no. 7. P. 2160–2167. doi: 10.1016/j.automatica.2013.03.019.
28. Jing C., Du H., Liu Y. Immersion and invariance based adaptive robust control for attitude tracking of spacecraft with input saturation // Advances in Space Research. 2023. Vol. 72, no. 9. P. 3606–3618. doi: 10.1016/j.asr.2023.07.004.
29. Jin P., Ma Q., Gu J. Fixed-time practical antisaturation attitude tracking control of QUAUV with prescribed performance: Theory and experiments // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Syst. 2024. Vol. 60, no. 5. P. 6050–6060. doi: 10.1109/TAES.2024.3400177.
30. Esfandiari K., Abdollahi F., Talebi H. A. Neural network-based adaptive control of uncertain nonlinear systems. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2021. 186 p.
31. Robust adaptive tri-copter control under parametric uncertainty and external disturbances conditions / V. V. Putov, V. N. Sheludko, Duy K. Nguyen, B. Andrievsky, Iu. Zaitseva // J. Math. in Sci., Engin., and Aerospace (MESA). 2023. Vol. 14, no. 4. P. 1043–1064.
32. Нгуен З. Х., Путов В. В., Шелудько В. Н. Синтез нелинейной и адаптивно-робастной систем со скользящими режимами в управлении динамикой трикоптера с поворотными винтами при действии неизвестных внешних возмущений // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2024. Т. 17, № 5. С. 83–96. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-5-83-96.

33. D. Abara, P. Bhowmick, A. Lanzon. Cooperative control of multi-tilt tricopter drones applying a 'mixed' negative imaginary and strict passivity technique // 2023 European Control Conf. (ECC). IEEE: Bucharest, Romania, 2023. P. 1–6. doi: 10.23919/ECC57647.2023.10178409.

34. Huang A. C., Wu S. C., Ting W. F. A FAT-based adaptive controller for robot manipulators without regressor matrix: theory and experiments // J. Robotica. 2006. Vol. 24, no. 2. P. 205–210. doi: 10.1017/S0263574705002031.

35. Villalobos-Chin J., Santibáñez V. An adaptive regressor-free fourier series-based tracking controller for robot manipulators: Theory and experimental evaluation

// J. Robotica. 2021. Vol. 39, no. 11. P. 1981–1996. doi: 10.1017/S0263574721000084.

36. Khalil H. K. Nonlinear systems. 3<sup>rd</sup> ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002. 767 p.

37. Нгуен З. Х., Путов В. В., Шелудько В. Н. Синтез адаптивной робастной системы управления трикоптером с поворотными винтами в условиях неопределенных аэродинамических коэффициентов, частично неопределенной матрицы входа, влияния внешних возмущений и ограничения входных воздействий // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2024. Т. 17, № 6. С. 84–98. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-6-84-98.

### Информация об авторах

**Нгуен Зуи Хань** – аспирант, ассистент кафедры систем автоматического управления СПбГЭТУ «ЛЭТИ».  
E-mail: kxanhnguyen.mta@gmail.com

**Путов Виктор Владимирович** – д-р техн. наук, профессор, зам. зав. кафедрой систем автоматического управления по развитию СПбГЭТУ «ЛЭТИ».  
E-mail: vvpotov@mail.ru

**Шелудько Виктор Николаевич** – д-р техн. наук, профессор кафедры систем автоматического управления, ректор СПбГЭТУ «ЛЭТИ».  
E-mail: vnsheludko@etu.ru

**Доброскок Никита Александрович** – канд. техн. наук, доцент, зав. кафедрой систем автоматического управления СПбГЭТУ «ЛЭТИ».  
E-mail: nadobroskok@etu.ru

### Вклад авторов:

Нгуен З. Х. – разработка алгоритма; анализ робастной устойчивости.

Путов В. В. – научное руководство; постановка задачи; итоговые выводы.

Шелудько В. Н. – обзор научных источников; постановка задачи.

Доброскок Н. А. – проведение имитационных экспериментов; анализ результатов.

### References

1. Li X., Yu W. A systematic tuning method of PID controller for robot manipulators // 9<sup>th</sup> IEEE Int. Conf. on Control and Automation (ICCA). Santiago, Chile: IEEE, 2011. P. 274–279. doi: 10.1109/ICCA.2011.6138081.

2. Leines M. T., Yang J.-S. LQR control of an under actuated planar biped robot // 6<sup>th</sup> IEEE Conf. on Industrial Electronics and Appl. Beijing, China: IEEE, 2011. P. 1684–1689. doi: 10.1109/ICIEA.2011.5975861.

3. Liu Fan, Joo E. M. Linear and nonlinear PD-type control of robotic manipulators for trajectory tracking // 4<sup>th</sup> IEEE Conf. on Industr. Electronics and Appl. Xi'an, China: IEEE, 2009. P. 3442–3447, doi: 10.1109/ICIEA.2009.5138846.

4. FAT-based immersion and invariance adaptive control for rigid body attitude / J. Wang, G. He, S. Geng, S. Zhang, J. Zhang // IEEE Int. Conf. on Mechatronics and Automation (ICMA). Tianjin, China: IEEE, 2024. P. 834–839. doi: 10.1109/ICMA61710.2024.10633145.

5. Xia D., Yue X. Dynamic scaling-based adaptive control without scaling factor: With application to Euler–

Lagrange systems // Int. J. of Robust and Nonlinear Control. 2021. Vol. 31, no. 10. P. 4531–4552. doi: 10.1002/rnc.5492.

6. Adaptivnoe upravlenie robotizirovannymi podvizhnymi ob#ektami / B. R. Andrievskij, N. D. Poljahov, V. V. Putov, V. N. Shelud'ko // Izv. SPbGETU «LETI». 2016. № 5. S. 61–77. (In Russ.).

7. Fomin V. N., Fradkov A. L., Jakubovich V. A. Adaptivnoe upravlenie dinamicheskimi ob#ektami. M.: Nauka, 1981. 448 s.

8. Fradkov A. L. Adaptivnoe upravlenie v slozhnyh sistemah. Bespoiskovye metody. M.: Nauka, 1990. 292 s.

9. Miroshnik I. V., Nikiforov V. O., Fradkov A. L. Nelinejnoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinamicheskimi sistemami. SPb: Nauka, 2000. 549 s.

10. Putov V. V., Lebedev V. V., Putov A. V. Adaptivnyye sistemy upravleniya mnogostepennymi zhestkimi nelinejnymi mehanicheskimi ob#ektami, postroennye po ih uproshhennym modeljam s mazhorirujushimi funkcijami // Izv. SPbGETU «LETI». 2013. T. 10. S. 49–54. (In Russ.).

11. Slotine J.-J. Weiping Li applied nonlinear control. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. A Division of Simon & Schuster Englewood Cliffs, 1991. 459 p.
12. Krstic M., Kanellakopoulous I., Kokotovic P. Nonlinear and adaptive control design. New York: John Wiley Interscience, 1995. 592 p.
13. Ioannou P., Sun J. Robust adaptive control. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 834 p.
14. Lavretsky E., Wise K. A. Robust and adaptive control with aerospace applications. London: Springer-Verlag London, 2012. 454 p.
15. Nguyen N. T. Model-reference adaptive control: A primer. Cham: Springer International Publishing, 2018. 444 p.
16. Astolfi A., Ortega R. Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 2003. Vol. 48, no. 4. P. 590–606. doi: 10.1109/TAC.2003.809820.
17. Astolfi A., Karagiannis D., Ortega R. Nonlinear and adaptive control with applications. London: Springer, 2008. 302 p.
18. Immersion and invariance adaptive control of nonlinearly parameterized nonlinear systems / X. Liu, R. Ortega, H. Su, J. Chu // IEEE Transactions on Automatic Control. 2010. Vol. 55, no. 9. P. 2209–2214. doi: 10.1109/TAC.2010.2052389.
19. Liu J., Liu X., Su H. Robust I&I adaptive DSC with disturbance observer for maglev system with output Constraint // 39<sup>th</sup> Chinese Control Conf. (CCC). Shenyang, China: IEEE, 2020. P. 1909–1914. doi: 10.23919/CCC50068.2020.9189084.
20. Synthesis of invariant immersion and dynamic surface control methods for nonlinear uncertain objects / D. K. Nguyen, T. L. Rusyaeva, V. V. Putov, V. N. Sheludko // XXVII Int. Conf. on Soft Comp. and Measurements (SCM). SPb., Russia: IEEE, 2024. P. 85–89. doi: 10.1109/SCM62608.2024.10554151.
21. Immersion and invariance based adaptive attitude tracking control of a quadrotor UAV in the presence of parametric uncertainty / B. Zhao, B. Xian, Y. Zhang, X. Zhang // Proc. of the 33<sup>rd</sup> Chinese Control Conf. Nanjing, China: IEEE, 2014. P. 1932–1937. doi: 10.1109/ChiCC.2014.6896925.
22. Immersion and invariance-based sliding mode attitude control of Tilt tri-rotor UAV in helicopter mode / L. Yu, G. He, S. Zhao, X. Wang, L. Shen // Int. J. Control Autom. Syst. 2021. Vol. 19. P. 722–735. doi: 10.1007/s12555-020-0110-9.
23. Han C., Liu Z., Yi J. Immersion and invariance adaptive control with  $\sigma$ -modification for air-breathing hypersonic vehicles // IEEE Int. Conf. on Mechatronics and Automation (ICMA). Takamatsu, Japan: IEEE, 2017. P. 1138–1143. doi: 10.1109/ICMA.2017.8015977.
24. Lavretsky E., Hovakimya N. Positive  $\mu$ -modification for stable adaptation in the presence of input constraints // Proc. of the 2004 Am. Control Conf. Boston, MA, USA: IEEE, 2004. P. 2545–2550. doi: 10.23919/ACC.2004.1383848.
25. Karason S. P., Annaswamy A. M. Adaptive control in the presence of input constraints // IEEE Transactions on Automatic Control. 1994. Vol. 39, no. 11. P. 2325–2330. doi: 10.1109/9.333787.
26. Liu B., Guo Y., Li A. Nussbaum-based finite-time containment control for multi-UAVs with input saturation and velocity constraints // Aerospace Sci. and Technol. 2023. Vol. 139. P. 1–25. doi: 10.1016/j.ast.2023.108407.
27. Hu J., Zhang H. Immersion and invariance based command-filtered adaptive backstepping control of VTOL vehicles // Automatica. 2013. Vol. 49, no. 7. P. 2160–2167. doi: 10.1016/j.automatica.2013.03.019.
28. Jing C., Du H., Liu Y. Immersion and invariance based adaptive robust control for attitude tracking of spacecraft with input saturation // Advances in Space Research. 2023. Vol. 72, no. 9. P. 3606–3618. doi: 10.1016/j.asr.2023.07.004.
29. Jin P., Ma Q., Gu J. Fixed-time practical antisaturation attitude tracking control of QUAUV with prescribed performance: Theory and experiments // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Syst. 2024. Vol. 60, no. 5. P. 6050–6060. doi: 10.1109/TAES.2024.3400177.
30. Esfandiari K., Abdollahi F., Talebi H. A. Neural network-based adaptive control of uncertain nonlinear systems. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2021. 186 p.
31. Robust adaptive tricopter control under parametric uncertainty and external disturbances conditions / V. V. Putov, V. N. Sheludko, Duy K. Nguyen, B. Andrievsky, Iu. Zaitseva // J. Math. in Sci., Engin., and Aerospace (MESA). 2023. Vol. 14, no. 4. P. 1043–1064.
32. Nguen Z. H., Putov V. V., Shelud'ko V. N. Sintez nelinejnoj i adaptivno-robustnoj sistem so skol'zjashhimi rezhimami v upravlenii dinamikoj trikoptera s povorotnymi vintami pri dejstvii neizvestnyh vneshnih vozmushhenij // Izv. SPbGETU «LETI». 2024. T. 17, № 5. S. 83–96. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-5-83-96. (In Russ.).
33. D. Abara, P. Bhowmick, A. Lanzon. Cooperative control of multi-tilt tricopter drones applying a 'mixed' negative imaginary and strict passivity technique // 2023 European Control Conf. (ECC). IEEE: Bucharest, Romania, 2023. P. 1–6. doi: 10.23919/ECC57647.2023.10178409.
34. Huang A. C., Wu S. C., Ting W. F. A FAT-based adaptive controller for robot manipulators without regressor matrix: theory and experiments // J. Robotica. 2006. Vol. 24, no. 2. P. 205–210. doi: 10.1017/S0263574705002031.
35. Villalobos-Chin J., Santibáñez V. An adaptive regressor-free fourier series-based tracking controller for robot manipulators: Theory and experimental evaluation // J. Robotica. 2021. Vol. 39, no. 11. P. 1981–1996. doi: 10.1017/S0263574721000084.
36. Khalil H. K. Nonlinear systems. 3<sup>rd</sup> ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002. 767 p.
37. Nguen Z. H., Putov V. V., Shelud'ko V. N. Sintez adaptivnoj robustnoj sistemy upravlenija trikoptom s povorotnymi vintami v uslovijah neopredelennyh ajero-

dinamicheskikh koefitsientov, chastichno neopredelennoj  
matricy vhoda, vlijanija vneshnih vozmushhenij i ograni-  
chenija vhodnyh vozdejstvij // Izv. SPbGETU. 2024. T. 17,

№ 6. S. 84–98. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-6-84-98.  
(In Russ.).

---

#### Information about the authors

**Duy Khanh Nguyen** – postgraduate student, Assistant of the Department of Automatic Control Systems, Saint Petersburg Electrotechnical University.  
E-mail: [khanhnguyen.mta@gmail.com](mailto:khanhnguyen.mta@gmail.com)

**Victor V. Putov** – Dr Sci. (Eng.), Professor, Deputy Head of the Department of Automatic Control Systems for Development, Saint Petersburg Electrotechnical University.  
E-mail: [vvputov@mail.ru](mailto:vvputov@mail.ru)

**Victor N. Sheludko** – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Department of Automatic Control Systems, Rector of Saint Petersburg Electrotechnical University.  
E-mail: [vnsheludko@etu.ru](mailto:vnsheludko@etu.ru)

**Nikita A. Dobroskok** – Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Head of the Department of Automatic Control Systems, Saint Petersburg Electrotechnical University.  
E-mail: [nadobroskok@etu.ru](mailto:nadobroskok@etu.ru)

#### Author contribution statement:

Nguyen D. K. – algorithm development; robust stability analysis.

Putov V. V. – scientific supervision; problem statement; final conclusions.

Sheludko V. N. – review of scientific sources; problem statement.

Dobroskok N. A. – simulation experiments; analysis of the results.

Статья поступила в редакцию 30.06.2025; принята к публикации после рецензирования 19.08.2025; опубликована онлайн 30.10.2025.

Submitted 30.06.2025; accepted 19.08.2025; published online 30.10.2025.

---