

Адаптивные системы управления трикоптером с поворотными винтами, разработанные на основе метода инвариантного погружения в условиях неопределенных аэродинамических коэффициентов и частично неопределенной матрицы входа

З. Х. Нгуен[✉], В. В. Путов, В. Н. Шелудько

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

[✉] khanhnguyen.mta@gmail.com

Аннотация. Рассматриваются вопросы разработки и исследования адаптивных систем управления трикоптером с поворотными винтами, описываемым в виде уравнений Лагранжа–Эйлера, в условиях неопределенных аэродинамических коэффициентов и частично неопределенной матрицы входа. Разработаны и исследованы две адаптивные системы управления, синтезированные на основе метода инвариантного погружения для класса лагранжевых нелинейных систем: 1) адаптивная система управления в скользящем режиме и 2) адаптивная система управления с использованием метода аппроксимации функций. Устойчивость обеих разработанных адаптивных систем обоснована методом функций Ляпунова. Первая адаптивная система управления оказывается реализуемой только для объектов второго или третьего порядка (и/или с одним входом и одним выходом), а вторая адаптивная система управления реализуема для класса лагранжевых нелинейных систем любого порядка в условиях неопределенных параметров и частично неопределенной матрицы входа. Приведены результаты компьютерного исследования второй адаптивной системы управления трикоптером с поворотными винтами для подтверждения ее эффективности в вышеуказанных условиях.

Ключевые слова: трикоптер с поворотными винтами, адаптивная система управления, управление в скользящем режиме, метод инвариантного погружения (I&I), метод аппроксимации функций, неопределенные аэродинамические коэффициенты, частичная неопределенность матрицы входа, моделирование

Для цитирования: Нгуен З. Х., Путов В. В., Шелудько В. Н. Адаптивные системы управления трикоптером с поворотными винтами, разработанные на основе метода инвариантного погружения в условиях неопределенных аэродинамических коэффициентов и частично неопределенной матрицы входа // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2024. Т. 17, № 8. С. 81–94. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-8-81-94.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

Adaptive Control Systems for a Tricopter with Rotary Propellers Based on Invariant Immersion Method under Conditions of Uncertain Aerodynamic Coefficients and Partially Uncertain Input Matrix

Duy Khanh Nguyen[✉], V. V. Putov, V. N. Sheludko

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

[✉] khanhnguyen.mta@gmail.com

Abstract. In this work, the authors set out to develop and investigate adaptive control systems for a tricopter with rotary propellers described in terms of Lagrangian–Euler equations under conditions of uncertain aerody-

dynamic coefficients and a partially uncertain input matrix. Two adaptive control systems synthesized based on the invariant immersion method for a class of Lagrangian nonlinear systems are developed and investigated: 1) a sliding mode adaptive control system and 2) an adaptive control system using the function approximation method. The stability of both developed adaptive systems is justified by the Lyapunov function method. The former adaptive control system turns out to be realizable only for objects of second or third order (and/or with one input and one output), while the latter adaptive control system is realizable for a class of Lagrangian nonlinear systems of any order under conditions of uncertain parameters and a partially uncertain input matrix. The results of a simulation study of the latter adaptive control system for a tricopter with rotary propellers are presented to validate its effectiveness under the above conditions.

Keywords: tricopter with rotary propellers, adaptive control system, sliding mode control, invariant immersion (I&I) method, function approximation method, uncertain aerodynamic coefficients, partial uncertainty of the input matrix, modeling

For citation: Nguyen Duy Khanh, Putov V. V., Sheludko V. N. Adaptive Control Systems for a Tricopter with Rotary Propellers Based on Invariant Immersion Method under Conditions of Uncertain Aerodynamic Coefficients and Partially Uncertain Input Matrix // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2024. Vol. 17, no. 8. P. 81–94. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-8-81-94.

Conflict of interest. The authors declare no conflicts of interest.

Введение. В течение последних нескольких десятилетий беспилотные летательные аппараты (БПЛА) широко исследовались и применялись в гражданских сферах. Благодаря небольшому весу, невысокой цене, гибкости и маневренности в полете БПЛА типа мультикоптеров широко используются во многих различных областях – в аэрофотосъемке, грузовых перевозках, мониторинге городского движения, анализе качества атмосферы, прогнозе погоды, мониторинге урожая и опрыскивании, обнаружении пожаров, поиске и спасении людей в стихийных бедствиях, мониторинге высоковольтных линий электропередачи (ЛЭП) и трубопроводных сооружений [1]–[3]. Сегодня трикоптеры с поворотными винтами как новая разработка в классе мультикоптеров привлекают большое внимание благодаря своим выдающимся преимуществам по сравнению с мультикоптерами других конфигураций [4]–[8].

При синтезе управления трикоптерами с поворотными винтами с целью улучшения их полетных характеристик сталкиваются с проблемами, связанными с неопределенными аэродинамическими коэффициентами и частично неопределенной матрицей входа. Эти проблемы вполне разрешимы при использовании адаптивного управления.

Адаптивное управление начало стремительно развиваться в России и за рубежом с 1950-х гг. [9]–[15]. Наиболее распространенные методы адаптивного управления синтезируются на основе метода функций Ляпунова и использования оценок неизвестных параметров вместо их фактических значений (в зарубежной литературе это называется принципом эквивалентной опреде-

ленности – Certainty Equivalence Principle). По условию обнуления выражения, зависящего от оценки неизвестных параметров в производной функции Ляпунова, можно найти адаптивный закон настройки параметров, называемый интегральной адаптацией. Однако не существует общего закона или методики нахождения функций Ляпунова, особенно для сложных неопределенных нелинейных систем. Кроме того, эти адаптивные методы управления обеспечивают лишь асимптотическую устойчивость систем, но не сходимость оценок неизвестных параметров к их фактическим значениям.

Метод инвариантного погружения (I&I – Immersion and Invariance) [16]–[18] представляет собой новый современный подход к разработке нелинейных и адаптивных систем управления. При синтезе управления методом инвариантного погружения не требуется нахождения функций Ляпунова для проектирования адаптивных законов настройки параметров. Ошибки оценивания неизвестных параметров и их динамика связываются инвариантным многообразием. Кроме того, дополнительный нелинейный компонент β включается в выражения для ошибок оценивания неизвестных параметров. Это означает, что функция β добавляет «пропорциональную» составляющую к «интегральной» составляющей закона настройки параметров. Такой адаптивный закон управления называется нелинейной пропорционально-интегральной (ПИ) адаптацией. Упомянутые особенности метода инвариантного погружения обеспечивают повышение гибкости динамики ошибок оценивания и адаптивных законов

настройки [19], [20]. Сходимость ошибок оценивания неизвестных параметров к нулю не гарантируется (они сходятся к нулю либо при выполнении условия неисчезающего возбуждения, как в традиционных методах адаптивного управления, либо при ненулевом векторе их регрессоров), но сходимость произведения вектора регрессора и вектор-столбца ошибок оценивания неизвестных параметров обеспечивается, т. е. оценки функций линейной регрессии (оценки произведения вектора регрессора и вектор-столбца параметров) сходятся к их фактическим функциям линейной регрессии. Следовательно, качественные показатели адаптивного управления, синтезированного на основе метода инвариантного погружения, улучшаются в сравнении с традиционным адаптивным управлением. В настоящее время метод инвариантного погружения находит все более широкое применение при синтезе управления сложными неопределенными нелинейными системами – такими, как роботы, воздушные и космические летательные аппараты, корабли и наземные подвижные объекты различного назначения.

Следующая проблема, требующая внимания при синтезе систем управления сложными объектами, – это неопределенность входной матрицы, непосредственно связанной с вектором входного воздействия. Такая неопределенность может привести к ошибкам при синтезе управления, тем самым снижая его устойчивость и качество и даже вызывая неустойчивость системы управления. Для решения этой проблемы в литературе зачастую синтезируется адаптивное управление линеаризованными системами с эталонной моделью при неизвестной входной матрице [21, п. 2.10] или при разделении (декомпозиции) входной матрицы на произведение известной и неизвестной диагональной матриц [22]. Кроме того, с целью синтеза адаптивного управления и устранения негативного влияния неопределенности входной матрицы также используются метод инвариантного погружения, метод обхода интегратора с функцией Нуссбаума и управление в скользящем режиме с функцией Нуссбаума, но для систем с одним входом, систем невысокого (второго или третьего) порядка или для сложных систем высокого порядка с несколькими входами и выходами, допускающих разделение на несколько подсистем невысокого (второго или третьего) порядка с одним входом и одним выходом [23]–[26]. Таким образом, в настоящее время актуален синтез адаптивного управления сложными нелинейными системами с несколькими входами и выходами, описываемыми в виде уравнения Эйлера–Лагран-

жа в условиях неопределенности недиагональной входной матрицы высокого порядка.

В данной статье представляются две адаптивные системы управления сложным нелинейным объектом высокого порядка типа трикоптера с поворотными винтами, синтезированные на основе метода инвариантного погружения в условиях неопределенных аэродинамических коэффициентов и частично неопределенной матрицы входа. Полная динамика трикоптера с поворотными винтами описывается векторно-матричным уравнением Эйлера–Лагранжа. Алгоритмы адаптивного управления, синтезированные в статье, могут быть применены для класса лагранжевых нелинейных систем с неопределенными параметрами и неопределенной матрицей входа.

Математическая модель трикоптера с поворотными винтами. Система дифференциальных уравнений, описывающая движение трикоптера с поворотными винтами в пространстве, представляется в виде следующего векторно-матричного уравнения Лагранжа–Эйлера [4], [27]:

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_p(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{q} = [\xi^T \ \eta^T]^T \in \mathcal{R}^6$, $\xi = [x \ y \ z]^T$ – вектор координат центра масс трикоптера, $\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ – вектор углов ориентации трикоптера: ϕ – угол крена, θ – угол тангажа $\phi, \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, и $\psi \in (-\pi, \pi)$ – угол рыскания; \mathcal{R}^n – вещественное пространство размерности n ; $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_a \end{bmatrix}$, где $\mathbf{M}_a = m\mathbf{E}_3$, m – масса трикоптера, $\mathbf{O}_{m \times n}$ – нулевая матрица размера $m \times n$; \mathbf{E}_n – единичная матрица n -го порядка; $\mathbf{J}_a(\mathbf{q}) = \mathbf{P}_{eb}^T \mathbf{J} \mathbf{P}_{eb}$ – симметричная матрица, \mathbf{P}_{eb} – матрица преобразования угловых скоростей углов Эйлера в угловые скорости относительно корпуса трикоптера; \mathbf{J} – матрица моментов инерции трикоптера; $\mathbf{G} = [0 \ 0 \ mg \ 0 \ 0 \ 0]^T$; g – ускорение свободного падения;

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_a - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbf{J}_a) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{be} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_3 \end{bmatrix},$$

где \mathbf{R}_{eb} – матрица перехода из связанной с трикоптером системы координат $X_B Y_B Z_B$ в земную систему координат $X_E Y_E Z_E$; $\mathbf{H} \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ – матрица входа, элементы которой зависят от аэродинамических коэффициентов сил и моментов тяги k_f и k_τ ;

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \sin(\alpha_1) & \omega_2^2 \sin(\alpha_2) & \omega_3^2 \sin(\alpha_3) \\ \omega_1^2 \cos(\alpha_1) & \omega_2^2 \cos(\alpha_2) & \omega_3^2 \cos(\alpha_3) \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^6$$

– вектор входных воздействий, зависящий от скоростей и углов наклона винтов, ω_i – скорость вращения i -го винта, α_i – угол наклона i -го винта ($i = 1, 2, 3$);

$$\mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -(\mathbf{R}_{be} \mathbf{d}_\xi \mathbf{D}_\xi(\dot{\mathbf{q}}))^T & -(\mathbf{d}_\eta \mathbf{D}_\eta(\dot{\mathbf{q}}))^T \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^6$$

– вектор обобщенных сил и моментов сопротивления воздуха, где $\mathbf{D}_\xi = [u|u \quad v|v \quad w|w]^T$; $\mathbf{D}_\eta = [\dot{\phi}|\dot{\phi} \quad \dot{\theta}|\dot{\theta} \quad \dot{\psi}|\dot{\psi}]^T$; $\mathbf{d}_\xi = \text{diag}[d_x \quad d_y \quad d_z]$; $\mathbf{d}_\eta = \text{diag}[d_\phi \quad d_\theta \quad d_\psi]$; $d_x, d_y, d_z, d_\phi, d_\theta, d_\psi$ – коэффициенты аэродинамического сопротивления воздуха; u, v, w – элементы вектора скорости центра масс трикоптера в системе координат $X_B Y_B Z_B$; $\mathbf{F}_p(t) \in \mathfrak{R}^6$ – вектор обобщенных неизвестных внешних возмущений. Отметим, что в статье не рассматривается влияние внешних возмущений, т. е. считается, что $\|\mathbf{F}_p(t)\| = 0$.

Построение адаптивной системы управления на основе метода инвариантного погружения и управления в скользящем режиме. В первую очередь преобразуем (1) с учетом $\|\mathbf{F}_p(t)\| = 0$ к следующему виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} &= \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{q})(\mathbf{H}_k + \mathbf{H}_0)\mathbf{u} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{h}_1, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\mathbf{H}_k \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ – часть матрицы входа с известными постоянными элементами (\mathbf{H}_k – невырожденная матрица); $\mathbf{H}_0 = (\mathbf{H} - \mathbf{H}_k) \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ – часть матрицы входа с неизвестными постоянными элементами, зависящими от неопределенности аэродинамических коэффициентов сил и моментов тяги k_f и k_τ ;

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -\mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{D}_d(\dot{\mathbf{q}}) \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}, \\ \mathbf{D}_d(\dot{\mathbf{q}}) &= \\ &= \text{diag}[u|u \quad v|v \quad w|w \quad \dot{\phi}|\dot{\phi} \quad \dot{\theta}|\dot{\theta} \quad \dot{\psi}|\dot{\psi}] \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}, \end{aligned}$$

$\mathbf{h}_1 = [d_x \quad d_y \quad d_z \quad d_\phi \quad d_\theta \quad d_\psi]^T \in \mathfrak{R}^6$ – вектор неизвестных коэффициентов аэродинамического сопротивления воздуха.

Обозначая

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= -\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})[\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}] \in \mathfrak{R}^6; \\ \mathbf{f}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}; \\ \mathbf{g}_0(\mathbf{q}) &= \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{B}(\mathbf{q}) \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}, \end{aligned}$$

перепишем (2) следующим образом:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{f}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{h}_1 + \mathbf{g}_0(\mathbf{q})(\mathbf{H}_k + \mathbf{H}_0)\mathbf{u}. \quad (3)$$

Исходя из свойств матриц, имеем выражение

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{q})\mathbf{H}_0\mathbf{u} = \sum_{j=1}^6 \mathbf{g}_0(\mathbf{q})\mathbf{H}_{0j}u_j = \mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \mathbf{u})\mathbf{h}_2, \quad (4)$$

где $\mathbf{H}_{0j} \in \mathfrak{R}^6$ – j -й столбец матрицы \mathbf{H}_0 ; $u_j \in \mathfrak{R}$ – j -й элемент вектора входных воздействий \mathbf{u} , ($j = \overline{1, 6}$);

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \mathbf{u}) &= \\ &= [u_1\mathbf{g}_0 \quad u_2\mathbf{g}_0 \quad u_3\mathbf{g}_0 \quad u_4\mathbf{g}_0 \quad u_5\mathbf{g}_0 \quad u_6\mathbf{g}_0] \in \mathfrak{R}^{6 \times 36} \\ &– известная матрица-регрессор; \quad \mathbf{h}_2 = \\ &= [\mathbf{H}_{01}^T \quad \mathbf{H}_{02}^T \quad \mathbf{H}_{03}^T \quad \mathbf{H}_{04}^T \quad \mathbf{H}_{05}^T \quad \mathbf{H}_{06}^T]^T \in \mathfrak{R}^{36} – \\ &вектор неизвестных параметров, связанных с неопределенными аэродинамическими коэффициентами. \end{aligned}$$

Учитывая (3) и (4), получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{f}_0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{f}_1(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{h}_1 + \\ &+ \mathbf{f}_2(\mathbf{q}, \mathbf{u})\mathbf{h}_2 + \mathbf{g}_0(\mathbf{q})\mathbf{H}_k\mathbf{u}. \end{aligned} \quad (5)$$

Введем поверхность скольжения вида [28]

$$\mathbf{s}(t) = \dot{\mathbf{e}} + \Lambda\mathbf{e}, \quad (6)$$

где $\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_d(t)$ – вектор ошибок слежения; $\mathbf{q}_d(t)$ – вектор желаемых траекторий трикоптера; $\Lambda = \Lambda^T \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ – положительно определенная числовая матрица.

Из (5) и (6) найдем производную по времени вектор-функции (6):

$$\dot{\mathbf{s}} = \ddot{\mathbf{e}} + \Lambda\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1\mathbf{h}_1 + \mathbf{f}_2\mathbf{h}_2 + \mathbf{g}_0\mathbf{H}_k\mathbf{u} + \Lambda\dot{\mathbf{e}} - \ddot{\mathbf{q}}_d. \quad (7)$$

Используя метод инвариантного погружения, вводим векторы ошибок оценивания неизвестных параметров вида [16]–[18]

$$\begin{cases} \sigma_1 = \hat{\mathbf{h}}_1 - \mathbf{h}_1 + \beta_1(\mathbf{s}); \\ \sigma_2 = \hat{\mathbf{h}}_2 - \mathbf{h}_2 + \beta_2(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{h}}_1), \end{cases} \quad (8)$$

где $\hat{\mathbf{h}}_1, \hat{\mathbf{h}}_2$ – векторы оценок неизвестных векторов $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$; $\beta_1(\mathbf{s}), \beta_2(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{h}}_1)$ – гладкие вектор-функции;

$$\beta_2 = [\beta_{21}^T \ \beta_{22}^T \ \beta_{23}^T \ \beta_{24}^T \ \beta_{25}^T \ \beta_{26}^T]^T \in \mathfrak{R}^{36}, \\ \beta_{2j} \in \mathfrak{R}^6 \ (j = \overline{1,6}).$$

Динамика ошибок оценивания (8) записывается следующими выражениями:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = \dot{\hat{\mathbf{h}}}_1 + \frac{\partial \beta_1(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} \dot{\mathbf{s}}; \\ \dot{\sigma}_2 = \dot{\hat{\mathbf{h}}}_2 + \frac{\partial \beta_2(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{h}}_1)}{\partial \mathbf{s}} \dot{\mathbf{s}} + \frac{\partial \beta_2(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{h}}_1)}{\partial \hat{\mathbf{h}}_1} \dot{\hat{\mathbf{h}}}_1. \end{cases} \quad (9)$$

Подставляя (7) в (9), имеем

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = \dot{\hat{\mathbf{h}}}_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{s}} \times \\ \times (\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 \mathbf{h}_1 + \mathbf{f}_2 \mathbf{h}_2 + \mathbf{g}_0 \mathbf{H}_k \mathbf{u} + \Lambda \dot{\mathbf{e}} - \ddot{\mathbf{q}}_d); \\ \dot{\sigma}_2 = \dot{\hat{\mathbf{h}}}_2 + \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{s}} \times \\ \times (\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1 \mathbf{h}_1 + \mathbf{f}_2 \mathbf{h}_2 + \mathbf{g}_0 \mathbf{H}_k \mathbf{u} + \Lambda \dot{\mathbf{e}} - \ddot{\mathbf{q}}_d) + \\ + \frac{\partial \beta_2}{\partial \hat{\mathbf{h}}_1} \dot{\hat{\mathbf{h}}}_1. \end{cases} \quad (10)$$

Выберем алгоритм нелинейной пропорционально-интегральной адаптации следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{h}}}_1 = -\frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{s}} [\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{h}}_1 + \beta_1) + \mathbf{f}_2(\hat{\mathbf{h}}_2 + \beta_2) + \\ + \mathbf{g}_0 \mathbf{H}_k \mathbf{u} + \Lambda \dot{\mathbf{e}} - \ddot{\mathbf{q}}_d]; \\ \dot{\hat{\mathbf{h}}}_2 = -\frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{s}} [\mathbf{f}_0 + \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{h}}_1 + \beta_1) + \mathbf{f}_2(\hat{\mathbf{h}}_2 + \beta_2) + \\ + \mathbf{g}_0 \mathbf{H}_k \mathbf{u} + \Lambda \dot{\mathbf{e}} - \ddot{\mathbf{q}}_d] - \frac{\partial \beta_2}{\partial \hat{\mathbf{h}}_1} \dot{\hat{\mathbf{h}}}_1; \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial \mathbf{s}} = \Gamma_1 \mathbf{f}_1^T; \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial \mathbf{s}} = \Gamma_2 \mathbf{f}_2^T, \end{cases} \quad (11)$$

где $\Gamma_1 \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}, \Gamma_2 \in \mathfrak{R}^{36 \times 36}$ – симметричные положительно определенные числовые матрицы.

Исходя из (8), (10), (11), получим окончательное выражение для динамики ошибок оценивания неизвестных параметров:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 = -\Gamma_1 \mathbf{f}_1^T \mathbf{f}_1 \sigma_1 - \Gamma_1 \mathbf{f}_1^T \mathbf{f}_2 \sigma_2; \\ \dot{\sigma}_2 = -\Gamma_2 \mathbf{f}_2^T \mathbf{f}_1 \sigma_1 - \Gamma_2 \mathbf{f}_2^T \mathbf{f}_2 \sigma_2. \end{cases} \quad (12)$$

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V_0 = \frac{1}{2} \sigma_1^T \Gamma_1^{-1} \sigma_1 + \frac{1}{2} \sigma_2^T \Gamma_2^{-1} \sigma_2. \quad (13)$$

В силу (12), производная по времени функции (13) равна

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 &= \sigma_1^T \Gamma_1^{-1} \dot{\sigma}_1 + \sigma_2^T \Gamma_2^{-1} \dot{\sigma}_2 = \\ &= -\sigma_1^T \mathbf{f}_1^T \mathbf{f}_1 \sigma_1 - \sigma_1^T \mathbf{f}_1^T \mathbf{f}_2 \sigma_2 - \\ &\quad - \sigma_2^T \mathbf{f}_2^T \mathbf{f}_1 \sigma_1 - \sigma_2^T \mathbf{f}_2^T \mathbf{f}_2 \sigma_2 = \\ &= -\sigma_0^T \mathbf{f}^T \mathbf{f} \sigma_0 = -\|\mathbf{f} \sigma_0\|^2 \leq 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\mathbf{f} = [\mathbf{f}_1 \ \mathbf{f}_2]$; $\sigma_0 = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$. Следовательно, σ_0 ограничен и $\mathbf{f} \sigma_0 \in L_2(0, \infty)$. Если \mathbf{f} и $\dot{\mathbf{f}}$ ограничены, т. е. функция $\dot{V}_0(t)$ ограничена, то согласно лемме Барбалата $\mathbf{f} \sigma_0 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Пусть $\hat{\mathbf{H}}_0 = [\hat{\mathbf{H}}_{01} \ \hat{\mathbf{H}}_{02} \ \hat{\mathbf{H}}_{03} \ \hat{\mathbf{H}}_{04} \ \hat{\mathbf{H}}_{05} \ \hat{\mathbf{H}}_{06}] \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ – оценка матрицы $\hat{\mathbf{H}}_0$, где $\hat{\mathbf{H}}_{0j}$ – оценка неизвестных векторов $\mathbf{H}_{0j} \ (j = \overline{1,6})$; $\beta_0 = [\beta_{21} \ \beta_{22} \ \beta_{23} \ \beta_{24} \ \beta_{25} \ \beta_{26}] \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$, тогда

$$\mathbf{g}_0(\mathbf{q})(\hat{\mathbf{H}}_0 + \beta_0) \mathbf{u} = \mathbf{f}_2(\hat{\mathbf{h}}_2 + \beta_2). \quad (15)$$

С использованием средств оценки неизвестных параметров (11) закон адаптивного управления спроектирован следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [\mathbf{g}_0(\mathbf{H}_k + \hat{\mathbf{H}}_0 + \beta_0)]^{-1} \times \\ &\times [-\mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_1(\hat{\mathbf{h}}_1 + \beta_1) - \Lambda \dot{\mathbf{e}} + \ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{K} \mathbf{s} - \alpha \text{sign}(\mathbf{s})], \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mathbf{K} \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ – положительно определенная числовая матрица; $\alpha > 0$ – положительное число.

Подставляя (16) с учетом (8) и (15) в (7), получим

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{f}_1 \sigma_1 - \mathbf{f}_2 \sigma_2 - \mathbf{K} \mathbf{s} - \alpha \text{sign}(\mathbf{s}). \quad (17)$$

Исследуя устойчивость разработанной адаптивной системы, рассмотрим функцию Ляпунова следующего вида:

$$V_a = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} + V_0. \quad (18)$$

Учитывая (13), (14), (17), найдем производную по времени функции (18)

$$\begin{aligned} \dot{V}_a = \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} + \dot{V}_0 = \mathbf{s}^T [-\mathbf{f}_1 \boldsymbol{\sigma}_1 - \mathbf{f}_2 \boldsymbol{\sigma}_2 - \mathbf{Ks} - \alpha \operatorname{sign}(\mathbf{s})] - \\ - \|\mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}_0\|^2 = -\mathbf{s}^T \mathbf{Ks} - \alpha \|\mathbf{s}\| - \mathbf{s}^T (\mathbf{f}_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{f}_2 \boldsymbol{\sigma}_2) - \|\mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}_0\|^2 \leq \\ \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}) \|\mathbf{s}\|^2 + \frac{1}{2} (\|\mathbf{s}\|^2 + \|\mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}_0\|^2) - \|\mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}_0\|^2 \leq \\ \leq -\left[\lambda_{\min}(\mathbf{K}) - \frac{1}{2}\right] \|\mathbf{s}\|^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}_0\|^2 \leq 0, \end{aligned}$$

где $\lambda_{\min}(\mathbf{K}) > \frac{1}{2}$ – минимальное собственное число матрицы \mathbf{K} .

Таким образом, все сигналы системы ограничены и $\mathbf{s}, \mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}_0 \in L_2(0, \infty)$. Кроме того, в силу ограничения всех сигналов, нетрудно увидеть, что $\dot{\mathbf{s}}$ и $(\mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}_0 + \dot{\mathbf{f}}\boldsymbol{\sigma}_0)$ ограничены. Поэтому согласно лемме Барбалата $\mathbf{s} \rightarrow 0$ и $\mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}_0 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, т. е. $\mathbf{e} \rightarrow 0$, $\dot{\mathbf{e}} \rightarrow 0$ и $\mathbf{f}\boldsymbol{\sigma}_0 \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Однако при синтезе данной адаптивной системы существует недостаток, заключающийся в трудности нахождения вектор-функции $\boldsymbol{\beta}_2$ из выражения для частной производной $\frac{\partial \boldsymbol{\beta}_2}{\partial \mathbf{s}} = \boldsymbol{\Gamma}_2 \mathbf{f}_2^T$, так как \mathbf{f}_2 в (4) зависит от \mathbf{u} и \mathbf{s} . Это практически невозможно для систем высокого (более 3–4) порядка, т. е. алгоритм синтез адаптивного управления в этом пункте возможен только для объектов невысокого (второго или третьего) порядка и/или для объектов с одним входом и одним выходом. Полученные результаты в этом пункте полезны только для применения и исследования нелинейных систем невысокого порядка. Поэтому для синтеза на основе метода инвариантного погружения адаптивной системы управления трикоптером с поворотными винтами, описанной в виде дифференциального уравнения высокого порядка, указанный недостаток необходимо преодолеть.

Построение адаптивной системы управления на основе методов инвариантного погружения и аппроксимации функций. Устраняя вышеупомянутый недостаток, синтезируем новый алгоритм адаптивного управления системами высокого порядка в условиях неопределенных параметров и неопределенной матрицы входа. Введем следующие переменные:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{q} - \mathbf{q}_d; \\ \mathbf{e}_2 = \dot{\mathbf{e}}_1 + \mathbf{K}_1 \mathbf{e}_1, \end{cases} \quad (19)$$

где $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1^T \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ – положительно определенная числовая матрица.

Учитывая (2) и (19), получим следующую систему по переменным ошибок слежения \mathbf{e}_1 и их отфильтрованных сигналов (или их функций скольжения) \mathbf{e}_2 :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{e}}_1 = -\mathbf{K}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2; \\ \dot{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{B}\mathbf{H}_k \mathbf{u} + (\mathbf{B}\mathbf{H}_0 \mathbf{u} + \mathbf{N}\mathbf{h}_1)] + \boldsymbol{\Delta}, \end{cases} \quad (20)$$

где $\boldsymbol{\Delta} = -\mathbf{M}^{-1} [\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}] + \mathbf{K}_1 \dot{\mathbf{e}}_1 - \ddot{\mathbf{q}}_d$ – известная вектор-функция; $\mathbf{M}^{-1} = (\mathbf{M}^{-1})^T > 0$.

Используя метод аппроксимации функций [21], [29], можно записать неизвестную вектор-функцию $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{B}\mathbf{H}_0 \mathbf{u} + \mathbf{N}\mathbf{h}_1$ в следующем виде:

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{W}^T \mathbf{z} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (21)$$

где $\mathbf{W} \in \mathfrak{R}^{N \times 6}$ – весовая матрица, содержащая коэффициенты членов ряда Фурье; $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}^N$ – вектор базисных функций, содержащий первые N членов ряда Фурье; $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathfrak{R}^6$ – вектор ошибки аппроксимации ($\|\boldsymbol{\varepsilon}\| < \varepsilon_M$); N – количество используемых базисных функций (N нечетное);

$$\begin{aligned} \mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & \dots & \sin\left(\frac{N-1}{2}\omega t\right) \\ & & & & \cos\left(\frac{N-1}{2}\omega t\right) \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^N, \quad \omega > 0; \\ \mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} a_{01} & a_{11} & b_{11} & \dots & \frac{a_{N-1,1}}{2} & \frac{b_{N-1,1}}{2} \\ a_{02} & a_{12} & b_{12} & \dots & \frac{a_{N-1,2}}{2} & \frac{b_{N-1,2}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{06} & a_{16} & b_{16} & \dots & \frac{a_{N-1,6}}{2} & \frac{b_{N-1,6}}{2} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{6 \times N}. \end{aligned}$$

Нетрудно получить выражение $\mathbf{W}^T \mathbf{z} = \sum_{k=1}^N \mathbf{W}_k z_k$, где $\mathbf{W}_k \in \mathfrak{R}^6$ – k -й столбец матрицы

\mathbf{W}^T ; $z_k \in \mathfrak{R}$ – k -й элемент вектора \mathbf{z} , $k = \overline{1, N}$.

Пусть $\mathbf{z}_0 = [z_1 \mathbf{E}_6 \quad z_2 \mathbf{E}_6 \quad \dots \quad z_N \mathbf{E}_6] \in \mathfrak{R}^{6 \times 6N}$ – матрица-регрессор; $\mathbf{W}_0 = [\mathbf{W}_1^T \quad \mathbf{W}_2^T \quad \dots \quad \mathbf{W}_N^T] \in \mathfrak{R}^{6N}$ – вектор неизвестных параметров; \mathbf{E}_6 – единичная матрица 6-го порядка. Тогда получим уравнение вида

$$\mathbf{W}^T \mathbf{z} = \mathbf{z}_0 \mathbf{W}_0. \quad (22)$$

Учитывая (21), (22), перепишем (20) в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -\mathbf{K}_1 e_1 + e_2; \\ \dot{e}_2 = \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{u}_0 + \mathbf{z}_0 \mathbf{W}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}] + \Delta, \end{cases} \quad (23)$$

где $\mathbf{u}_0 = \mathbf{B}\mathbf{H}_k \mathbf{u}$, т. е. $\mathbf{u} = [\mathbf{B}\mathbf{H}_k]^{-1} \mathbf{u}_0$.

Используя метод инвариантного погружения, вводим вектор ошибки оценивания неизвестных параметров вида [16]–[18]

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{W}}_0 - \mathbf{W}_0 + \boldsymbol{\beta}(e_1, e_2), \quad (24)$$

где $\hat{\mathbf{W}}_0$ – оценка неизвестного вектора \mathbf{W}_0 ; $\boldsymbol{\beta}(e_1, e_2)$ – гладкая вектор-функция.

Динамика ошибки оценивания (24) записывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\hat{\mathbf{W}}}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial e_1} \dot{e}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial e_2} \dot{e}_2. \quad (25)$$

Подставляя (23) в (25), получим

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = & \dot{\hat{\mathbf{W}}}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial e_1} (-\mathbf{K}_1 e_1 + e_2) + \\ & + \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial e_2} [\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{u}_0 + \mathbf{z}_0 \mathbf{W}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}) + \Delta]. \end{aligned} \quad (26)$$

Выберем закон нелинейной пропорционально-интегральной настройки параметров следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{W}}}_0 = -\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial e_1} (-\mathbf{K}_1 e_1 + e_2) - \\ - \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial e_2} \{ \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{u}_0 + \mathbf{z}_0 (\hat{\mathbf{W}}_0 + \boldsymbol{\beta})] + \Delta \}; \\ \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{z}_0^T \mathbf{M}^{-1} e_2, \end{cases} \quad (27)$$

где $\boldsymbol{\Gamma} \in \mathfrak{R}^{6N \times 6N}$ – симметричная положительно определенная числовая матрица.

Тогда, в силу (19) и (27), можем легко найти $\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial e_1}$ и $\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial e_2}$ как

$$\begin{cases} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial e_1} = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{z}_0^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}_1; \\ \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial e_2} = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{z}_0^T \mathbf{M}^{-1}. \end{cases} \quad (28)$$

Исходя из (26)–(28), следующая динамика ошибки оценивания неизвестных параметров может быть получена как

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = -\boldsymbol{\Gamma} \mathbf{z}_0^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{z}_0^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (29)$$

Рассмотрим функцию Ляпунова вида:

$$V_1 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \boldsymbol{\sigma}. \quad (30)$$

В силу (29), производная по времени функции (30) равна

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\Gamma}^{-1} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = -\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{z}_0^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma} + \\ & + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{z}_0^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}; \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\|\mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma}\|^2 + \frac{1}{2} (\|\mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma}\|^2 + \|\mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}\|^2) \leq \\ \leq & -\frac{1}{2} \|\mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma}\|^2 + r^2, \end{aligned}$$

где $r > 0$ – положительное постоянное значение такое, что $\|\mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}\| \leq r$. Следовательно, $\boldsymbol{\sigma}$ ограничен и сходится к инвариантному множеству.

Закон адаптивного управления спроектирован следующим образом:

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{M} (-\mathbf{K}_p e_1 - \mathbf{K}_d e_2 - \Delta) - \mathbf{z}_0 (\hat{\mathbf{W}}_0 + \boldsymbol{\beta}), \quad (32)$$

где $\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_d \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ – симметричные положительно определенные числовые матрицы.

Подставляя (32) и учитывая (24) и (23), получим

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -\mathbf{K}_1 e_1 + e_2; \\ \dot{e}_2 = -\mathbf{K}_p e_1 - \mathbf{K}_d e_2 - \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}. \end{cases} \quad (33)$$

Устойчивости разработанной адаптивной системы рассмотрим с помощью функции Ляпунова следующего вида:

$$V = \frac{1}{2} e_1^T \mathbf{K}_p e_1 + \frac{1}{2} e_2^T e_2 + V_1. \quad (34)$$

Учитывая (30), (31), (33), найдем производную по времени функции (34)

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_1^T \mathbf{K}_p \dot{e}_1 + e_2^T \dot{e}_2 + \dot{V}_1 = \\ = & -e_1^T \mathbf{K}_p \mathbf{K}_1 e_1 - e_2^T \mathbf{K}_d e_2 - \\ & - e_2^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma} + e_2^T \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} - \\ & - \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{z}_0^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{z}_0^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \leq \\ \leq & -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_p \mathbf{K}_1) \|e_1\|^2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_d) \|e_2\|^2 - \\ & - \|\mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma}\|^2 - e_2^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma} + e_2^T \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} + \\ & + \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{z}_0^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (35)$$

где $\lambda_{\min}(\mathbf{K}_p \mathbf{K}_1), \lambda_{\min}(\mathbf{K}_d)$ – минимальные собственные числа матриц $\mathbf{K}_p \mathbf{K}_1$ и \mathbf{K}_d соответственно.

По неравенству Юнга получим следующие неравенства:

$$\begin{cases} -\mathbf{e}_2^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma} \leq \frac{\rho_1}{2} \|\mathbf{e}_2\|^2 + \frac{1}{2\rho_1} \|\mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma}\|^2; \\ \mathbf{e}_2^T \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \leq \frac{\rho_2}{2} \|\mathbf{e}_2\|^2 + \frac{1}{2\rho_2} \|\mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}\|^2; \\ \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{z}_0^T \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon} \leq \frac{\rho_3}{2} \|\mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma}\|^2 + \frac{1}{2\rho_3} \|\mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}\|^2; \\ \|\mathbf{M}^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}\| \leq r - \text{константа,} \end{cases} \quad (36)$$

где ρ_1, ρ_2, ρ_3 – любые положительные числа.

Подставляя (36) в (35), получим следующее неравенство:

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_p \mathbf{K}_1) \|\mathbf{e}_1\|^2 - \left[\lambda_{\min}(\mathbf{K}_d) - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right] \times \|\mathbf{e}_2\|^2 - \left(1 - \frac{1}{2\rho_1} - \frac{\rho_3}{2} \right) \|\mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma}\|^2 + \left(\frac{1}{2\rho_2} + \frac{1}{2\rho_3} \right) r^2.$$

Выберем $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1^T > 0$, $\mathbf{K}_p = \mathbf{K}_p^T > 0$, $\mathbf{K}_d = \mathbf{K}_d^T > 0$ и $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, $\rho_3 > 0$ так, чтобы $\lambda_{\min}(\mathbf{K}_p \mathbf{K}_1) > 0$; $\lambda_{\min}(\mathbf{K}_d) > \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$; $1 - \frac{1}{2\rho_1} - \frac{\rho_3}{2} > 0$. Тогда все сигналы системы ограничены и сходятся к наибольшему инвариантному множеству, граница которого зависит от верхней границы $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$. Согласно теореме Стоуна–Вейерштрасса [30], ошибкой аппроксимации можно пренебречь ($\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \approx 0$), если количество используемых членов ряда Фурье достаточно велико. В этом случае имеем неравенство вида

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}_p \mathbf{K}_1) \|\mathbf{e}_1\|^2 - \left[\lambda_{\min}(\mathbf{K}_d) - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \right] \times \|\mathbf{e}_2\|^2 - \left(1 - \frac{1}{2\rho_1} - \frac{\rho_3}{2} \right) \|\mathbf{M}^{-1} \mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma}\|^2 \leq 0.$$

Отсюда, аналогично анализу для скользящего режима, можем легко показать, что $\mathbf{e}_1 \rightarrow 0$, $\mathbf{e}_2 \rightarrow 0$ и $\mathbf{z}_0 \boldsymbol{\sigma} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, разработанный адаптивный алгоритм управления может быть реализован для сложных нелинейных неопределенных объектов высокого порядка и обеспечивает асимптотическую устойчивость системы по переменным ошибок слежения и ошибок оценивания функций линейной регрессии в условиях неопределенных параметров и неопределенной матрицы входа.

Результаты компьютерного моделирования. Моделирование адаптивной системы управления трикоптером с поворотными винтами, разработанной на основе методов инвариантного погружения и аппроксимации функций, в условиях неопределенных аэродинамических коэффициентов и частично неопределенной матрицы входа было выполнено с помощью прикладной программы MatLab/Simulink при следующих номинальных значениях аэродинамических коэффициентов: $k_\tau = 0.2 \cdot 10^{-4}$; $k_f = 0.25 \cdot 10^{-3}$; $d_x = 0.0242$; $d_y = 0.0316$; $d_z = 0.0546$; $d_\phi = 0.01$; $d_\theta = 0.0105$; $d_\psi = 0.0121$. Параметры адаптивного закона управления выбраны как $\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_{\text{ном}}$; $N = 15$; $\omega = 0.01$; $\hat{\mathbf{W}}_0(0) = \mathbf{O}_{80 \times 1}$; $\mathbf{K}_1 = 2.5 \cdot \mathbf{E}_6$; $\mathbf{K}_p = 25 \cdot \mathbf{E}_6$; $\mathbf{K}_d = 25 \cdot \mathbf{E}_6$; $\Gamma = 15 \cdot \mathbf{E}_{80}$. Выбираем начальное условие переменных состояния трикоптера $\mathbf{q}(0) = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.1 \ 0]^T$.

Поскольку элементы матрицы входа зависят только от аэродинамических коэффициентов сил и моментов тяги k_f и k_τ , то изменение аэродинамических коэффициентов $k_f, k_\tau, d_x, d_y, d_z, d_\phi, d_\theta, d_\psi$ приводит к неопределенности аэродинамических коэффициентов и матрицы входа. Поэтому для исследования работоспособности адаптивной системы управления трикоптером с поворотными винтами, разработанной на основе методов инвариантного погружения и аппроксимации функций в условиях неопределенных аэродинамических коэффициентов и частично неопределенной матрицы входа, рассмотрим результаты моделирования при изменении значений аэродинамических коэффициентов, где штрихпунктирные линии – заданное (программное) движение трикоптера, штриховые линии – в системе без адаптивных сигналов управления ($\Gamma = 0 \cdot \mathbf{E}_{80}$) и сплошные линии – в системе с адаптивными сигналами управления ($\Gamma = 15 \cdot \mathbf{E}_{80}$).

Переходные процессы при заданных постоянных сигналах. Заданные сигналы задаются следующим образом:

$$\mathbf{q}_d(t) = [2.5 \ 2.5 \ 2.5 \ 0 \ 0 \ \pi/2]^T.$$

На рис. 1–3 представлены переходные процессы (ПП) переменных системы при номинальных значениях аэродинамических коэффициентов, при увеличении и при уменьшении до 3 раз номи-

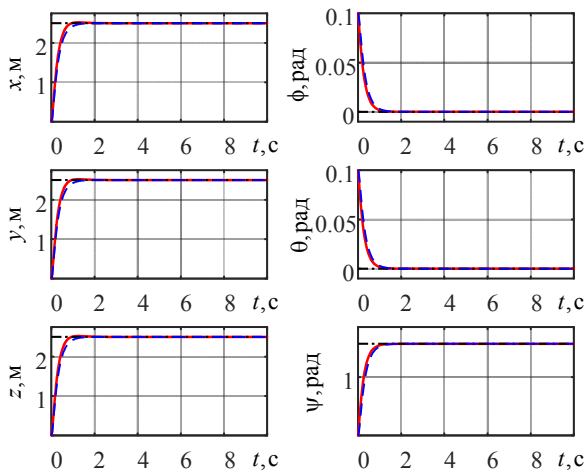


Рис. 1. ПП переменных системы при номинальных значениях аэродинамических коэффициентов
 Fig. 1. Transient processes (TP) of system variables at nominal values of aerodynamic coefficients

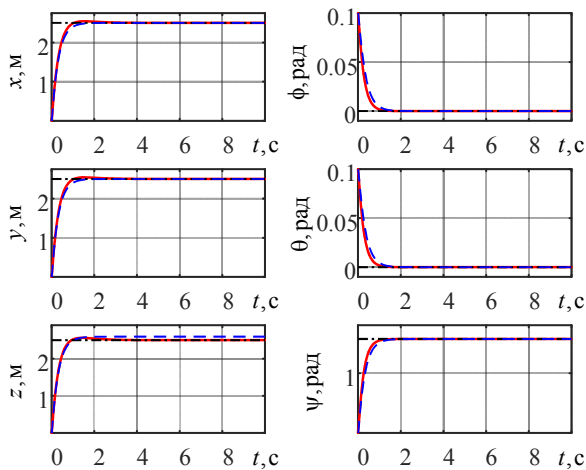


Рис. 2. ПП переменных системы при увеличении до 3 раз номинальных значений аэродинамических коэффициентов
 Fig. 2. TP of system variables under a threefold increase in the nominal values of aerodynamic coefficients

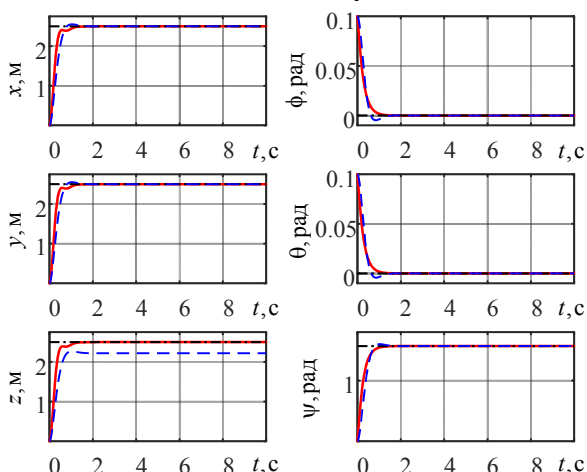


Рис. 3. ПП переменных системы при уменьшении до 3 раз номинальных значений аэродинамических коэффициентов
 Fig. 3. TP of system variables under a threefold reduction in the nominal values of aerodynamic coefficients

нальных значений аэродинамических коэффициентов соответственно. На рис. 4 представлена норма ошибок оценивания функций линейной регрессии $\|z_0\sigma(t)\| = \|(\mathbf{B}\mathbf{H}_0\mathbf{u} + \mathbf{N}\mathbf{h}_1) - z_0(\hat{\mathbf{W}}_0 + \beta)\|$ при номинальных значениях аэродинамических коэффициентов, при увеличении и при уменьшении до 3 раз номинальных значений аэродинамических коэффициентов.

Отслеживание траектории спиральной формы. Заданная траектория задается следующим образом:

$$\mathbf{q}_d(t) = [10\sin(0.5t + \pi/2) \quad 10\sin(0.5t) \quad 5 + 0.5t \quad 0 \quad 0 \quad \pi/4]^T.$$

Рассмотрим только результаты моделирования худшего случая, когда значения аэродинамических коэффициентов уменьшаются в 3 раза. Кроме того, для исследования работоспособности разработанной адаптивной системы обратим внимание еще и на дополнительные результаты моделирования в случае, когда значения аэродинамических коэффициентов уменьшаются в 3 раза при одновременном увеличении массы трикоптера в 2 раза.

На рис. 5 и 6 представлены траектории трикоптера в случаях уменьшения до 3 раз номинальных значений аэродинамических коэффициентов при номинальном значении массы трикоптера и при увеличении массы трикоптера в 2 раза соответственно. На рис. 7 и 8 показаны ошибки слежения трикоптера в случаях уменьшения до 3 раз номинальных значений аэродинамических коэффициентов при номинальном значении массы трикоптера и при увеличении массы трикоптера в 2 раза соответственно. На рис. 9. представлена норма ошибок оценивания функций линейной регрессии $\|z_0\sigma(t)\|$ в случаях уменьшения до 3 раз номинальных значений аэродинамических коэффициентов при номинальном значении массы трикоптера и при увеличении массы трикоптера в 2 раза.

Из результатов моделирования (рис. 1–9) можно отметить, что в условиях неопределенных аэродинамических коэффициентов и частично неопределенной матрицы входа система без адаптивных сигналов управления работает с низким качеством управления, а разработанная адаптивная система управления показывает высокую эффективность с повышенной устойчивостью и высоким качеством управления даже в худшем

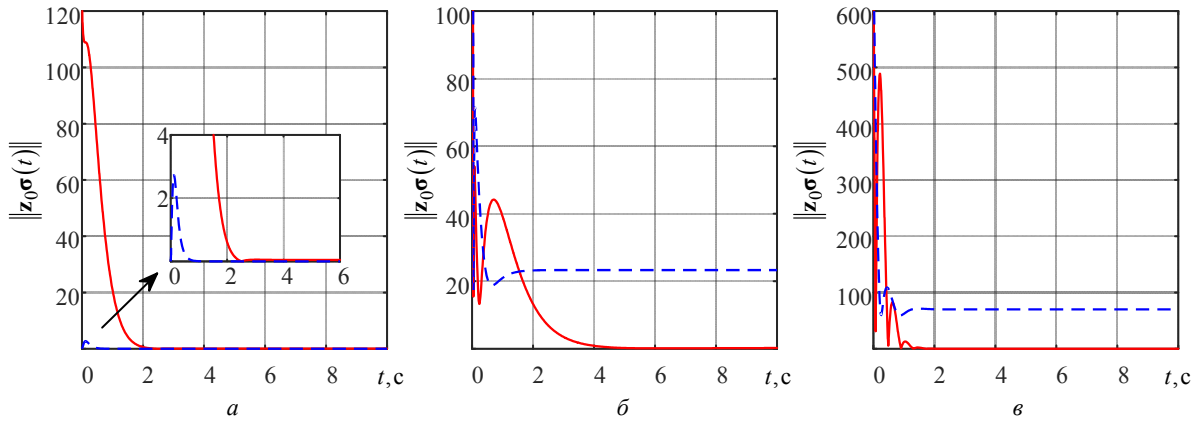


Рис. 4. Норма ошибок оценивания линейных функций регрессии: а – при номинальных; б – при увеличении до 3 раз; в – при уменьшении до 3 раз значений аэродинамических коэффициентов
Fig. 4. Norm of estimation errors of linear regression functions: а – with nominal; б – under a threefold increase; в – under a threefold reduction in the aerodynamic coefficients

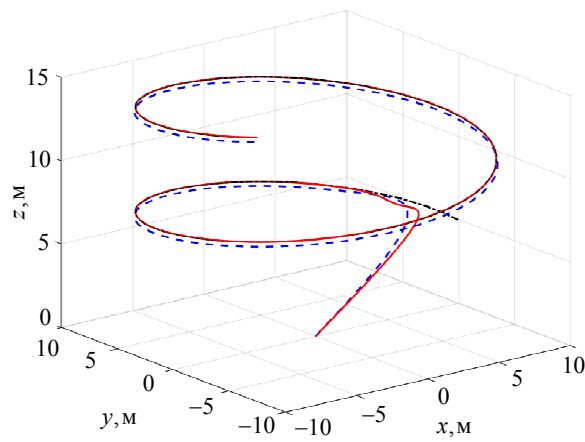


Рис. 5. Траектория трикоптера при уменьшении до 3 раз номинальных значений аэродинамических коэффициентов
Fig. 5. Tricopter trajectory under a threefold reduction in the nominal values of aerodynamic coefficients

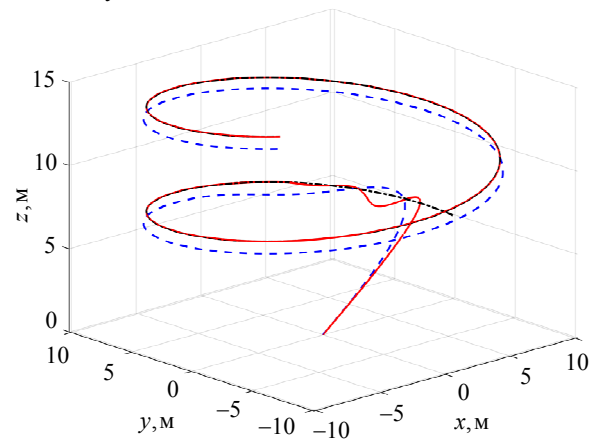


Рис. 6. Траектория трикоптера при уменьшении до 3 раз номинальных значений аэродинамических коэффициентов и увеличении массы трикоптера в 2 раза
Fig. 6. Tricopter trajectories under a threefold reduction in the nominal values of aerodynamic coefficients and a twofold increase in the tricopter mass

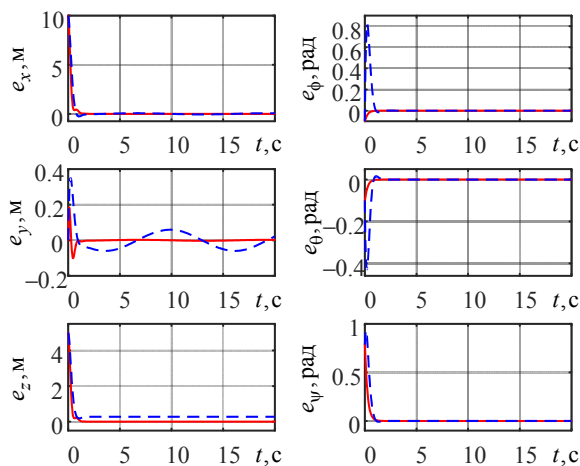


Рис. 7. Ошибки слежения трикоптера при уменьшении до 3 раз номинальных значений аэродинамических коэффициентов
Fig. 7. Tricopter tracking errors under a threefold reduction in the nominal values of aerodynamic coefficients

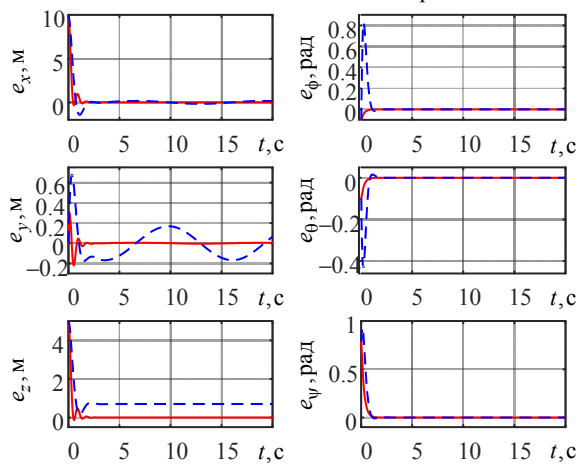


Рис. 8. Ошибки слежения трикоптера при уменьшении до 3 раз номинальных значений аэродинамических коэффициентов и увеличении массы трикоптера в 2 раза
Fig. 8. Tricopter tracking errors under a threefold reduction in the nominal values of aerodynamic coefficients and a twofold increase in the tricopter mass

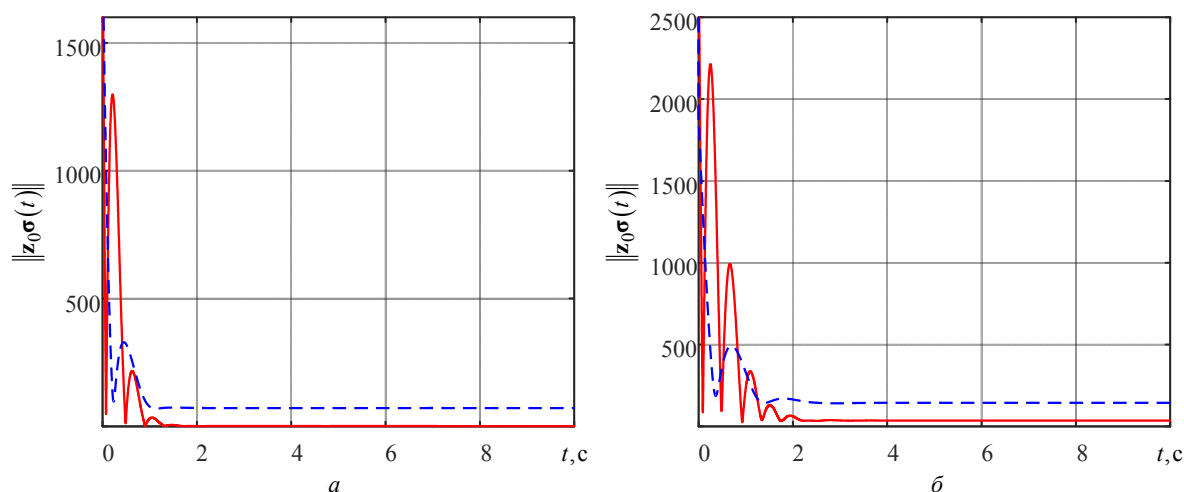


Рис. 9. Норма ошибок оценивания линейных функций регрессии при уменьшении до 3 раз номинальных значений аэродинамических коэффициентов: a – при номинальном значении массы;

b – при увеличении массы трикоптера в 2 раза

Fig. 9. Norm of estimation errors of linear regression functions under a threefold reduction in the nominal values of aerodynamic coefficients: a – at the nominal mass value; b – under a twofold increase in the tricopter mass

случае, когда значения аэродинамических коэффициентов уменьшаются в 3 раза, а масса трикоптера увеличивается в 2 раза. Норма ошибок оценивания функций линейной регрессии $\|z_0\sigma(t)\|$ (рис. 4 и 9, a) при наличии адаптивных сигналов управления сходится к нулю, что соответствует теоретическому анализу. Однако на рис. 9, b норма ошибок оценивания функций линейной регрессии $\|z_0\sigma(t)\|$ не сходится к нулю, поскольку при изменении массы трикоптера $z_0(\hat{W}_0 + \beta)$ не только оценивает $(B\mathbf{H}_0\mathbf{u} + N\mathbf{h}_1)$, но еще и вносит неопределенность в модель трикоптера, вызванную изменением массы трикоптера. Это вполне обоснованно и не противоречит теоретическому анализу при синтезе второй адаптивной системы управления. Таким образом, разработанная адаптивная система управления работоспособна не только в условиях неопределенных аэродинамических коэффициентов и частично неопределенной матрицы входа, но и в условиях неопределенных параметров трикоптера.

Заключение. В статье рассмотрены вопросы разработки и исследования адаптивных систем управления трикоптером с поворотными винтами в условиях неопределенных аэродинамических коэффициентов и частично неопределенной матрицы входа.

1. Предлагаются две адаптивные системы управления, синтезированные на основе метода инвариантного погружения и работоспособные при неопределенных параметрах и частично неопределенной матрице входа:

- адаптивная система в скользящем режиме;
- адаптивная система с использованием метода аппроксимации функций.

2. Первая система неприменима для управления сложными неопределенными объектами высокого порядка, но ее алгоритм управления полезен для применения и исследования управления нелинейными системами невысокого (не выше 2–3-го) порядка в вышеупомянутых условиях, а вторая система полностью применима для управления сложными неопределенными объектами высокого порядка, в частности, для управления трикоптером с поворотными винтами.

3. Методом функций Ляпунова строго доказано, что разработанные адаптивные системы обеспечивают асимптотическую устойчивость систем по переменным ошибок слежения и ошибок оценивания функций линейной регрессии в условиях неопределенных параметров и неопределенной матрицы входа.

4. Для исследования работоспособности второй адаптивной системы управления приведено компьютерное моделирование адаптивной системы управления трикоптером с поворотными винтами в различных условиях полета. Результаты компьютерных исследований показывают, что данная разработанная адаптивная система управления успешно справляется с задачей устранения не только влияния неопределенных аэродинамических коэффициентов и частично неопределенной матрицы входа, но и влияния неопределенных параметров трикоптера.

Список литературы

1. Idrissi M., Salami M., Annaz F. A review of quadrotor unmanned aerial vehicles: Applications, architectural design and control algorithms // *J. Intell. Robot. Syst.* 2022. Vol. 104, art. no. 22. P. 1–33. doi: 10.1007/s10846-021-01527-7.
2. Zulu A., John S. A review of control algorithms for autonomous quadrotors // *Open J. of Appl. Sci.* 2014. Vol. 4, no.14. P. 547–556. doi: 10.4236/ojapps.2014.414053.
3. Hassanalian M., Abdelkefi A. Classifications, applications, and design challenges of drones. A review // *Prog. in Aerospace Sci.* 2017. Vol. 91. P. 99–131. doi: 10.1016/j.paerosci.2017.04.003.
4. Robust adaptive tricopter control under parametric uncertainty and external disturbances conditions / V. V. Putov, V. N. Sheludko, Duy K. Nguyen, B. Andrievsky, Iu. Zaitseva // *J. Math. in Sci. Eng. and Aerospace (MESA)*. 2023. Vol. 14, no. 4. P. 1043–1064.
5. Sababha B. H., Al Zu' H. M., Rawashdeh O. A. A rotor-tilt-free tricopter UAV: design, modelling, and stability control. *Intern. J. of Mechatronics and Automation*. 2015. Vol. 5. P. 107–113. doi: 10.1504/IJMA.2015.075956.
6. Servais E., D'Andrea-Novet B., Mounier H. Ground control of a hybrid tricopter // *Intern. Conf. on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. IEEE: Denver, CO, USA, 2015. P. 945–950. doi: 10.1109/ICUAS.2015.7152382.
7. Design and modeling of actuation system of unmanned tricopter with thrust-vectoring front tilt rotors for sustainable flying / R. Siswoyo Jo, A. Eu. Tan, M. T. K. Tsun, Jo H. Siswoyo // *Intern. Conf. of Aerospace and Mechanical Engin. (AeroMech 2019)*. Springer: Singapore, 2020. P. 45–55. doi: 10.1007/978-981-15-4756-0_5.
8. Ansari A., Prach A., Bernstein D. Adaptive trim and trajectory following for a tilt-rotor tricopter // *2017 Am. Control Conf. (ACC)*. IEEE: Seattle, WA, USA, 2017. P. 1109–1114. doi: 10.23919/ACC.2017.7963101.
9. Slotine J.-J. E., Li Weiping. *Applied nonlinear control*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. A Division of Simon & Schuster, Englewood Cliffs. 1991. 459 p.
10. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V. *Nonlinear and adaptive control design*. New York: Wiley-Interscience, 1995. 592 p.
11. Fradkov A. Passification of non-square linear systems and freeback Yakubovich–Kalman–Popov lemma // *European J. of Control*. 2003. № 6. P. 573–582.
12. Andrievsky B., Pogromsky A. Y., Plotnikov S. A. Speed-gradient method in adaptive control and identification // *Hist. overview. IFAC-PapersOnLine*. 2020. Vol. 53, iss. 2. P. 1367–1372. doi: 10.1016/j.ifacol.2020.12.1880.
13. Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л. *Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами: учеб. пособие*. СПб.: Наука, 2000. 549 с.
14. Обобщение метода мажорирующих функций в задачах адаптивного управления нелинейными динамическими объектами / В. В. Путов, И. Г. Полушин, В. В. Лебедев, А. В. Путов // *Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ»*. 2013. № 8. С. 85–94.
15. Бобцов А. А. Адаптивное и робастное управление неопределенными системами по выходу. СПб.: Наука, 2011. 174 с.
16. Astolfi A., Ortega R. Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems // *IEEE Trans. Automat. Contr.* 2003. Vol. 48, no. 4. P. 590–606. doi: 10.1109/TAC.2003.809820.
17. Astolfi A., Karagiannis D., Ortega R. *Nonlinear and adaptive control with applications*. London: Springer, 2008. 302 p.
18. Immersion and invariance adaptive control of nonlinearly parameterized nonlinear systems / X. Liu, R. Ortega, H. Su, J. Chu // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2010. Vol. 55, iss. 9. P. 2209–2214. doi: 10.1109/TAC.2010.2052389.
19. Han C., Liu Z., Yi J. Immersion and invariance adaptive control with σ -modification for uncertain nonlinear systems // *J. of the Franklin Institute*. 2018. Vol. 355, iss. 5. P. 2091–2111. doi: 10.1016/j.jfranklin.2017.12.006.
20. Filter-based immersion and invariance adaptive control of nonlinear systems / W. Chen, J. Hu, J. Yao, H. Zhou, W. Nie // *Intern. J. of Control, Aut. and Sys.* 2024. Vol. 22, no. 1. P. 196–204. doi: 10.1007/s12555-022-0818-9.
21. Huang An-Ch., Chien M.-Ch. *Adaptive control of robot manipulators: a unified regressor-free approach*. Singapore: World Sci. Publ., 2010. 276 p. doi: 10.1142/7760.
22. Arabi E., Yucelen T. Set-theoretic model reference adaptive control with time-varying performance bounds // *Intern. J. of Control*. 2019. Vol. 92, iss. 11. P. 2509–2520. doi: 10.1080/00207179.2018.1442026.
23. Han Q., Liu X., Zou L. Robust immersion and invariance adaptive control with disturbance observer for a quadrotor UAV // *Intern. Conf. on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. IEEE: Athens, Greece, 2020. P. 1720–1725. doi: 10.1109/ICUAS48674.2020.9214069.
24. Zhou J. Adaptive tracking control of nonlinear time-varying systems with unknown control coefficients and unknown time-varying parameters // *IEEE 58th Conf. on Decision and Control (CDC)*. IEEE: Nice, France, 2019. P. 1025–1030. doi: 10.1109/CDC40024.2019.9029616.
25. Finite-time sliding mode fault-tolerant neural network control for nonstrict-feedback nonlinear systems / F. Lin, G. Xue, S. Li, H. Liu, Yo. Pan, J. Cao // *Nonlinear Dynamics*. 2023. Vol. 111, no. 18. P. 17205–17227. doi: 10.1007/s11071-023-08767-2.
26. Adaptive saturation compensation for strict-feedback systems with unknown control coefficient and input saturation / X. Hu, X. Wei, H. Zhang, J. Han // *Intern. J. of Ad. Control and Signal Proc.* 2021. Vol. 35, iss. 6. P. 1083–1098. doi: 10.1002/acs.3243.
27. Нгуен З. Х., Путов В. В., Шелудько В. Н. Синтез нелинейной и адаптивно-робастной систем со скользящими режимами в управлении динамикой трико-

птера с поворотными винтами при действии неизвестных внешних возмущений // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2024. Т. 17, № 5. С. 83–96. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-5-83-96.

28. Liu J., Wang X. Advanced sliding mode control for mechanical systems: Design, analysis and MatLab Simulation. 2012. Berlin, Heidelberg: Springer. 366 p.

29. Villalobos-Chin J., Santibáñez V. An adaptive regressor-free Fourier series-based tracking controller for robot manipulators: Theory and experimental evaluation // Robotica. 2021. Vol. 39, iss. 11. P. 1981–1996. doi: 10.1017/S0263574721000084.

30. Wilcox H. J., Myers D. L. An introduction to Lebesgue integration and Fourier series. New York: Dover Publ., 2009. 192 p.

Информация об авторах

Нгуен Зуи Хань – аспирант, ассистент кафедры систем автоматического управления СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: kxanhnguyen.mta@gmail.com

Путов Виктор Владимирович – д-р техн. наук, профессор, зам. зав. кафедрой систем автоматического управления по развитию СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: vvputov@mail.ru

Шелудько Виктор Николаевич – д-р техн. наук, профессор кафедры систем автоматического управления, ректор СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: vnsheludko@etu.ru

References

1. Idrissi M., Salami M., Annaz F. A review of quadrotor unmanned aerial vehicles: Applications, architectural design and control algorithms // J. Intell. Robot. Syst. 2022. Vol. 104, art. no. 22. P. 1–33. doi: 10.1007/s10846-021-01527-7.

2. Zulu A., John S. A review of control algorithms for autonomous quadrotors // Open J. of Appl. Sci. 2014. Vol. 4, no.14. P. 547–556. doi: 10.4236/ojapps.2014.414053.

3. Hassanalian M., Abdelkefi A. Classifications, applications, and design challenges of drones. A review // Prog. in Aerospace Sci. 2017. Vol. 91. P. 99–131. doi: 10.1016/j.paerosci.2017.04.003.

4. Robust adaptive tricopter control under parametric uncertainty and external disturbances conditions / V. V. Putov, V. N. Sheludko, Duy K. Nguyen, B. Andrievsky, Iu. Zaitseva // J. Math. in Sci. Eng. and Aerospace (MESA). 2023. Vol. 14, no. 4. P. 1043–1064.

5. Sababha B. H., Al Zu' H. M., Rawashdeh O. A. A rotor-tilt-free tricopter UAV: design, modelling, and stability control. Intern // J. of Mechatronics and Automation. 2015. Vol. 5. P. 107–113. doi: 10.1504/IJMA.2015.075956.

6. Servais E., D'Andrea-Novet B., Mounier H. Ground control of a hybrid tricopter // Intern. Conf. on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). IEEE: Denver, CO, USA, 2015. P. 945–950. doi: 10.1109/ICUAS.2015.7152382.

7. Design and modeling of actuation system of unmanned tricopter with thrust-vectoring front tilt rotors for sustainable flying / R. Siswoyo Jo, A. Eu. Tan, M. T. K. Tsun, Jo H. Siswoyo // Intern. Conf. of Aerospace and Mechanical Engin. (AeroMech 2019). Springer: Singapore, 2020. P. 45–55. doi: 10.1007/978-981-15-4756-0_5.

8. Ansari A., Prach A., Bernstein D. Adaptive trim and trajectory following for a tilt-rotor tricopter // 2017 Am.

Control Conf. (ACC). IEEE: Seattle, WA, USA, 2017. P. 1109–1114. doi: 10.23919/ACC.2017.7963101.

9. Slotine J.-J. E., Li Weiping. Applied nonlinear control. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. A Division of Simon & Schuster, Englewood Cliffs. 1991. 459 p.

10. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V. Nonlinear and adaptive control design. New York: Wiley-Interscience, 1995. 592 p.

11. Fradkov A. Passification of non-square linear systems and freeback Yakubovich–Kalman–Popov lemma // European J. of Control. 2003. № 6. P. 573–582.

12. Andrievsky B., Pogromsky A. Y., Plotnikov S. A. Speed-gradient method in adaptive control and identification // Hist. overview. IFAC-PapersOnLine. 2020. Vol. 53, iss. 2. P. 1367–1372. doi: 10.1016/j.ifacol.2020.12.1880.

13. Miroshnik I. V., Nikiforov V. O., Fradkov A. L. Nelinejnoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinamicheskimi sistemami: ucheb. posobie. SPb.: Nauka, 2000. 549 s. (In Russ.).

14. Obobshhenie metoda mazhorirujushhih funkciy v zadachah adaptivnogo upravlenija nelinejnymi dinamicheskimi ob#ektami / V. V. Putov, I. G. Polushin, V. V. Lebedev, A. V. Putov // Izv. SPbGJeTU «LJeTI». 2013. № 8. S. 85–94. (In Russ.).

15. Bobcov A. A. Adaptivnoe i robstnoe upravlenie neopredelennymi sistemami po vyhodu. SPb.: Nauka, 2011. 174 s. (In Russ.).

16. Astolfi A., Ortega R. Immersion and invariance: a new tool for stabilization and adaptive control of nonlinear systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 2003. Vol. 48, no. 4. P. 590–606. doi: 10.1109/TAC.2003.809820.

17. Astolfi A., Karagiannis D., Ortega R. Nonlinear and adaptive control with applications. London: Springer, 2008. 302 p.

18. Immersion and invariance adaptive control of nonlinearly parameterized nonlinear systems / X. Liu, R. Ortega, H. Su, J. Chu // IEEE Transactions on Automatic Control. 2010. Vol. 55, iss. 9. P. 2209–2214. doi: 10.1109/TAC.2010.2052389.
19. Han C., Liu Z., Yi J. Immersion and invariance adaptive control with σ -modification for uncertain nonlinear systems // J. of the Franklin Institute. 2018. Vol. 355, iss. 5. P. 2091–2111. doi: 10.1016/j.franklin.2017.12.006.
20. Filter-based immersion and invariance adaptive control of nonlinear systems / W. Chen, J. Hu, J. Yao, H. Zhou, W. Nie // Intern. J. of Control, Aut. and Sys. 2024. Vol. 22, no. 1. P. 196–204. doi: 10.1007/s12555-022-0818-9.
21. Huang An-Ch., Chien M.-Ch. Adaptive control of robot manipulators: a unified regressor-free approach. Singapore: World Sci. Publ., 2010. 276 p. doi: 10.1142/7760.
22. Arabi E., Yucelen T. Set-theoretic model reference adaptive control with time-varying performance bounds // Intern. J. of Control. 2019. Vol. 92, iss. 11. P. 2509–2520. doi: 10.1080/00207179.2018.1442026.
23. Han Q., Liu X., Zou L. Robust immersion and invariance adaptive control with disturbance observer for a quadrotor UAV // Intern. Conf. on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). IEEE: Athens, Greece, 2020. P. 1720–1725. doi: 10.1109/ICUAS48674.2020.9214069.
24. Zhou J. Adaptive tracking control of nonlinear time-varying systems with unknown control coefficients and unknown time-varying parameters // IEEE 58th Conf. on Decision and Control (CDC). IEEE: Nice, France, 2019. P. 1025–1030. doi: 10.1109/CDC40024.2019.9029616.
25. Finite-time sliding mode fault-tolerant neural network control for nonstrict-feedback nonlinear systems / F. Lin, G. Xue, S. Li, H. Liu, Yo. Pan, J. Cao // Nonlinear Dynamics. 2023. Vol. 111, no. 18. P. 17205–17227. doi: 10.1007/s11071-023-08767-2.
26. Adaptive saturation compensation for strict-feedback systems with unknown control coefficient and input saturation / X. Hu, X. Wei, H. Zhang, J. Han // Intern. J. of Ad. Control and Signal Proc. 2021. Vol. 35, iss. 6. P. 1083–1098. doi: 10.1002/acs.3243.
27. Nguen Z. H., Putov V. V., Shelud'ko V. N. Sintez nelinejnoj i adaptivno-robustnoj sistem so skol'zjashhimi rezhimami v upravlenii dinamikoj trikoptera s povorotnymi vintami pri dejstvii neizvestnyh vneshnih vozmu-shhenij // Izv. SPbGJeTU «LJeTI». 2024. T. 17, № 5. S. 83–96. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-5-83-96. (In Russ.).
28. Liu J., Wang X. Advanced sliding mode control for mechanical systems: Design, analysis and MatLab Simulation. 2012. Berlin, Heidelberg: Springer. 366 p.
29. Villalobos-Chin J., Santibáñez V. An adaptive regressor-free fourier series-based tracking controller for robot manipulators: Theory and experimental evaluation // Robotica. 2021. Vol. 39, iss. 11. P. 1981–1996. doi: 10.1017/S0263574721000084.
30. Wilcox H. J., Myers D. L. An introduction to Lebesgue integration and Fourier series. New York: Dover Publ., 2009. 192 p.
-

Information about the authors

Duy Khanh Nguyen – postgraduate student, Assistant of the Department of Automatic Control Systems, Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: khanhnguyen.mta@gmail.com

Victor V. Putov – Dr Sci. (Eng.), Professor, Deputy Head of the Department of Automatic Control Systems for Development, Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: vvputov@mail.ru

Victor N. Sheludko – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Department of Automatic Control Systems, Rector of Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: vnscheludko@etu.ru

Статья поступила в редакцию 28.05.2024; принята к публикации после рецензирования 16.06.2024; опубликована онлайн 24.10.2024.

Submitted 28.05.2024; accepted 16.06.2024; published online 24.10.2024.
