

## Методика решения кинематических задач для произвольной конструкции робота

И. А. Седельников✉, Д. С. Колтыгин

Братский государственный университет, Братск, Россия

✉ Ohtargil@yandex.ru

**Аннотация.** Цель статьи состоит в разработке методики решения кинематических задач для робота с последовательным соединением звеньев различных типов движения. В исследовании применялись методы тригонометрических преобразований, алгоритмизации и программирования. Результатом стала программа, выполняющая решение прямой и обратной задач, построение кинематической схемы робота и его рабочей зоны. Программа позволяет оптимизировать процесс разработки автоматизированных линий на базе роботов в области организации пространства либо подбора конструкции манипулятора. Приведенные алгоритмы могут быть применены в системе управления для преобразования координат, что позволяет перейти от позиционирования заданием перемещений к позиционированию по декартовым координатам.

**Ключевые слова:** кинематика, прямая задача, обратная задача, рабочая зона робота, программа, алгоритм

**Для цитирования:** Седельников И. А., Колтыгин Д. С. Методика решения кинематических задач для произвольной конструкции // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2023. Т. 16, № 8. С. 42–49. doi: 10.32603/2071-8985-2023-16-8-42-49.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

## A Technique for Solving Kinematic Problems for an Arbitrary Robot Design

I. A. Sedelnikov✉, D. S. Kolytgin

Bratsk State University, Bratsk, Russia

✉ Ohtargil@yandex.ru

**Abstract.** In this work, we aim to develop a methodology for solving kinematic problems for a robot with a serial connection of links of various movement types. The research methodology included the methods of trigonometric transformations, algorithmization, and programming. As a result, a program for solving direct and inverse problems, and a kinematic diagram of the robot and its working area was developed. The program can be used to optimize the process of developing automated lines based on robots in the field of organizing space or selecting the design of a manipulator. The presented algorithms can be applied in control systems to transform coordinates, thereby shifting from positioning by specifying displacements to positioning by Cartesian coordinates.

**Keywords:** kinematics, direct problem, inverse problem, robot working area, program, algorithm.

**For citation:** Sedelnikov I. A., Kolytgin D. S. A Technique for Solving Kinematic Problems for an Arbitrary Robot Design // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2023. Vol. 16, no. 8. P. 42–49. doi: 10.32603/2071-8985-2023-16-8-42-49.

**Conflict of interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Введение.** В статье рассматриваются вопросы разработки методики решения кинематических задач для произвольной конструкции робота с последовательным соединением звеньев, а также ее программная реализация. Важным аспектом является создание алгоритма расчета, подходящего для каждой задачи и позволяющего при его реализации использовать одну и ту же процедуру.

Кинематический и пространственный анализ робототехнического комплекса (РТК) по-прежнему актуален при проектировании робота, автоматизированной линии или создании системы управления, поскольку в настоящее время существует множество роботов различных конструкций, а класс решаемых ими задач постоянно расширяется. Он включает в себя следующие функции:

- 1) расчет прямой и обратной задачи кинематики;
- 2) построение кинематической схемы робота;
- 3) построение рабочей зоны робота.

Стоит обратить внимание на то, что существующие программы, содержащие подходящие функции анализа, дорогостоящи и требуют наличия специальных знаний для формирования и вычисления систем уравнений, преобразующих координаты. При этом их интерфейс довольно сложен либо требует ввода текстовых команд.

Кинематика манипулятора изучает геометрию его движения относительно заданной обобщенной системы координат, не рассматривая силы и моменты, порождающие это движение. В задачи кинематики входит аналитическое описание пространственного расположения манипулятора в зависимости от времени и установление связи между значениями присоединенных координат манипулятора и положением, ориентацией его схвата в декартовом пространстве. В основном требуется решить задачи двух классов: прямую и обратную. Решение прямой задачи служит для преобразования информации о положении манипулятора из собственной координатной системы в рабочую (обобщенную), что требуется для определения координат рабочего органа манипулятора. Решение обратной задачи предназначено для вычисления требуемой пространственной конфигурации манипулятора по положению рабочего органа и представляет основную проблему при планировании траектории его перемещения [1].

Помимо этого, робот совершает движение в пространстве и очерчивает своей крайней точкой зону, которая называется рабочей. Система координат, в которой работает манипулятор, зависит

от рабочей зоны, которую он обслуживает, и определяет выбор его кинематической схемы. Такие схемы содержат вращательные и поступательные кинематические пары. Их количество и взаимное расположение влияет на конфигурацию рабочей зоны манипулятора (в виде параллелепипеда, цилиндра, сферы или комбинированной формы). Типам рабочих зон соответствуют системы координат, в которых осуществляется движение манипулятора (прямоугольная, цилиндрическая, сферическая и комбинированная).

Выбор кинематической схемы робота зависит от множества факторов:

- компоновки производственной линии;
- особенностей обслуживаемого оборудования;
- траектории перемещения объекта;
- положения и количества обслуживаемых позиций;
- размера, вида и формы движения элементов робота в РТК.

Как правило, роботы имеют несколько степеней свободы. Степенью свободы называется возможность перемещения робота или его звеньев в пространстве. Количество таких степеней определяется числом вращательных или поступательных кинематических пар в манипуляторе.

Обычно первые три сочленения – транспортные и служат для перехода исполнительного механизма в требуемую позицию, а следующие – ориентирующие, необходимые для установки желаемого положения исполнительного механизма [2].

В зависимости от типа первых трех звеньев определяется система координат робота:

- 1) декартова – все три звена поступательные (рис. 1, а);
- 2) цилиндрическая – два звена поступательные и одно вращательное (рис. 1, б);
- 3) сферическая – одно звено поступательное и два вращательных (рис. 1, в);
- 4) угловая – все три звена вращательные (рис. 1, г).

Возможно сочетание различных систем координат в виде комбинированной системы [3].

Также в некоторых случаях робот может быть установлен на подвижное основание, что увеличивает число степеней свободы [4].

**Описание системы уравнений.** В настоящее время существует несколько методов для решения данного класса задач, например метод FABRIK или метод штрафных функций. Все они обладают своими достоинствами и недостатками и подробно рассматриваются в [5]–[7].

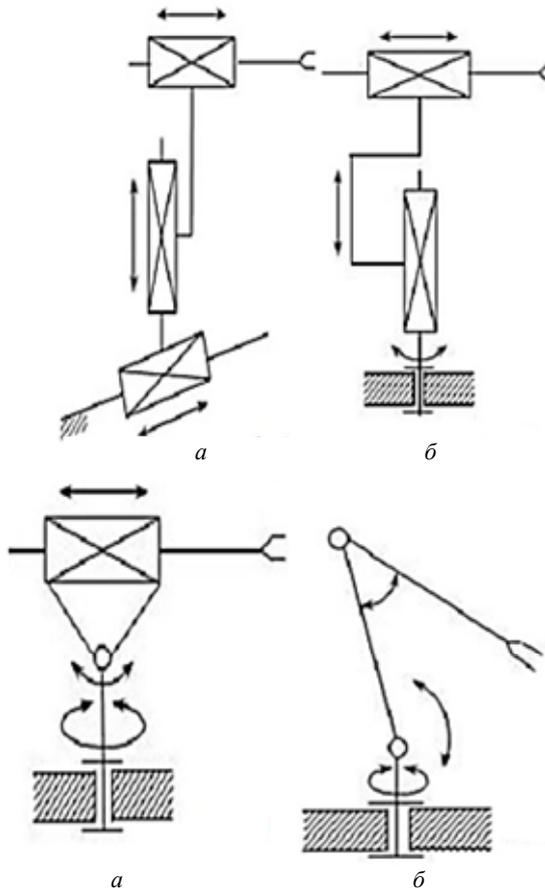


Рис. 1. Структурные кинематические схемы робота с различными системами координат:  
а – декартова, б – цилиндрическая,  
в – сферическая, z – угловая

Fig. 1. Structural kinematic diagrams of the robot with different coordinate systems: а – Cartesian, б – cylindrical, в – spherical, z – angular

Для решения поставленных задач авторы предлагают метод, основанный на последовательном начиная от основания вычислении параметров (координат, углов, перемещений) сочленений звеньев манипулятора в зависимости от вида движения.

В таблице приведены основные типы движения промышленного робота, необходимые для

Тип движения	Буквенное обозначение	Условное графическое обозначение
Поступательное вдоль оси руки	Пх	
Поступательное перпендикулярно оси руки	Пу	
Поступательное вертикальное	Пz	
Вращательное в горизонтальной плоскости	Вz	
Вращательное в вертикальной плоскости	Ву	

описания его кинематической схемы, и их условные обозначения.

Каждому типу движения соответствует свое правило изменения декартовых координат.

На рис. 2–3 схематически приведены графики движения звеньев, описывающие их закон перемещения из положения А в положение В:

– поступательное вертикальное движение:

$$z' = z + \Delta h; \quad (1)$$

– вращательное движение в горизонтальной плоскости:

$$x' = x + L \cos \alpha; \quad (2)$$

$$y' = y + L \sin \alpha; \quad (3)$$

– поступательное движение вдоль оси руки:

$$x' = x + (L + \Delta L) \cos \varphi; \quad (4)$$

$$y' = y + (L + \Delta L) \sin \varphi; \quad (5)$$

– вращательное движение в вертикальной плоскости:

$$z' = z + L \sin \alpha; \quad (6)$$

$$x' = x + L \cos \alpha \cos \varphi; \quad (7)$$

$$y' = y + L \cos \alpha \sin \varphi; \quad (8)$$

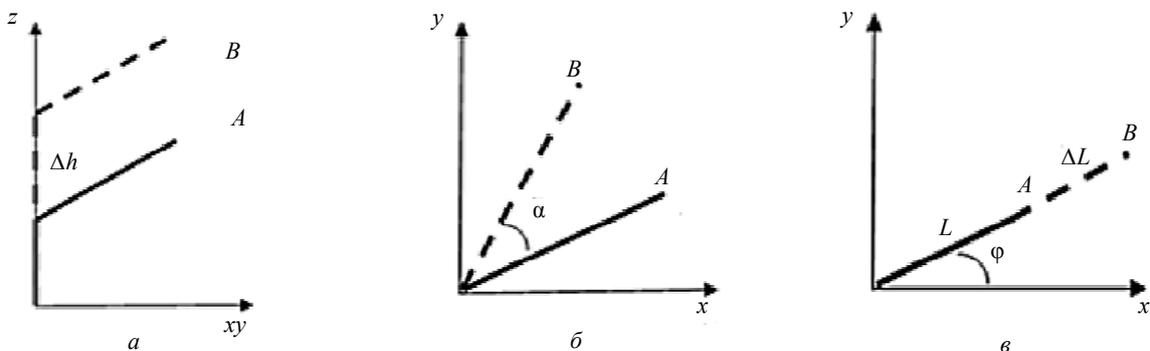


Рис. 2. Виды движения: а – поступательное вертикальное; б – вращательное в горизонтальной плоскости; в – поступательное вдоль оси руки

Fig. 2. Movement: а – translational vertical; б – rotational in the horizontal plane; в – translational along the axis of the arm

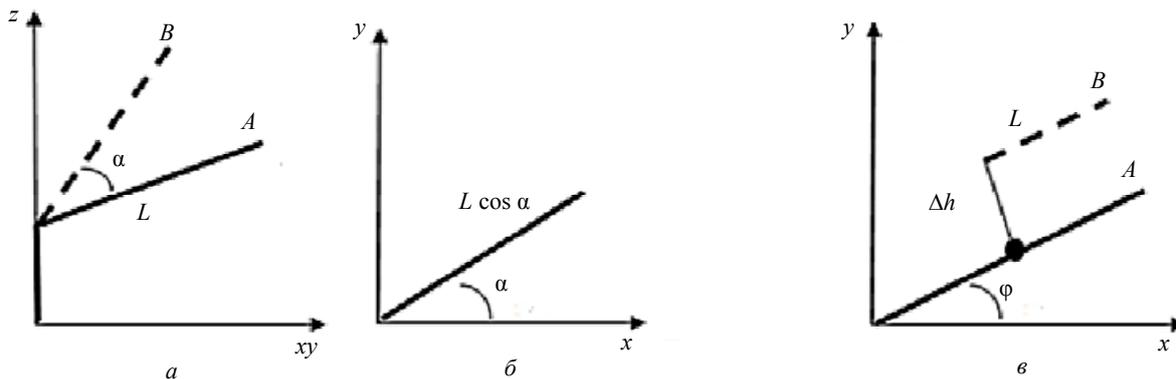


Рис. 3. Вращательное движение в вертикальной плоскости: *a* – по оси *z*; *б* – по оси *y*; *в* – поступательное движение перпендикулярно оси руки

Fig. 3. Rotational movement in the vertical plane: *a* – on the *z* axis; *б* – on the *y* axis; *в* – translational movement perpendicular to the axis of the arm

– поступательное движение перпендикулярно оси руки:

$$x' = x + L \cos(90 + \varphi) - \Delta h \cos \varphi; \quad (9)$$

$$y' = y + L \sin(90 + \varphi) - \Delta h \sin \varphi, \quad (10)$$

где *x*, *y*, *z* – декартовы координаты центра сочленения звеньев;  $\varphi$  – начальный угол поворота манипулятора;  $\alpha$  – угол, на который производится поворот звена;  $\Delta h$  – высота подъема звена; *L* – длина звена;  $\Delta L$  – изменение длины звена при движении.

С помощью формул (1)–(10) математически описывается закон изменения координат для указанных перемещений.

Более подробно тема формирования системы уравнений раскрыта в [8].

**Алгоритм работы программы кинематического анализа.** Для реализации приведенной методики была создана программа.

В основе решения поставленных задач лежит функция выбора типа движения и изменения декартовых координат. Ее алгоритм (рис. 4) отражает решение прямой задачи, и он же лежит в основе остальных вычислений. Так, решение обратной задачи заключается в решении прямой задачи для всех возможных комбинаций перемещений звеньев и минимизации ошибки отклонения от заданного значения для выбора оптимального положения с учетом ограничений. Для построения рабочей зоны робота решается прямая задача для всего диапазона перемещений и полученные координаты рабочего органа робота передаются для визуализации. Кинематическая схема определяется решением прямой задачи с вычислением координат сочленений.

Алгоритм решения обратной задачи кинематики и использованной в нем функции представ-

лен на рис. 5–6, области действия робота на рис. 7, а используемой в нем функции на рис. 8.

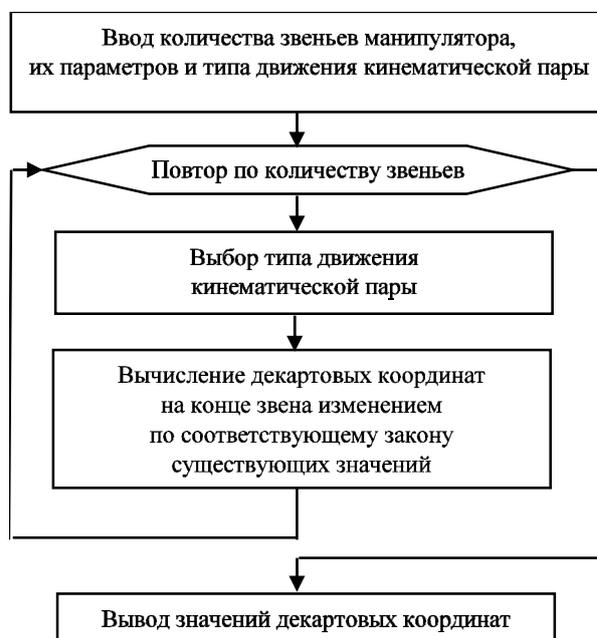


Рис. 4. Алгоритм функции вычисления координат  
Fig. 4. Coordinate calculation function algorithm



Рис. 5. Алгоритм решения обратной задачи кинематики  
Fig. 5. Algorithm for solving the inverse problem of kinematics



Рис. 6. Алгоритм функции вычисления параметров звеньев манипулятора  
 Fig. 6. Algorithm for calculating the parameters of the manipulator links



Рис. 7. Алгоритм расчета области действия робота  
 Fig. 7. Algorithm for calculating the scope of the robot

**Разработка графического интерфейса программы.** Решение прямой и обратной задач кинематики требует описания габаритных характе-

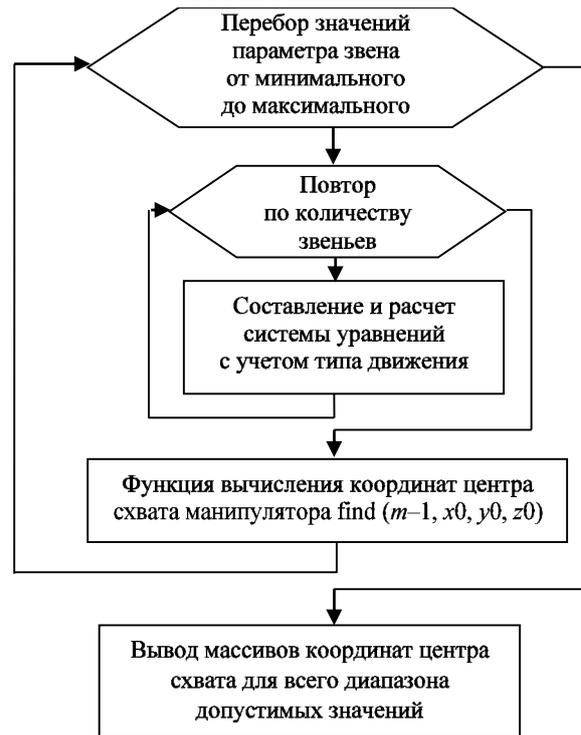


Рис. 8. Алгоритм рекурсивной функции вычисления координат центра схвата

Fig. 8. Algorithm for the recursive function for calculating the coordinates of the center of the tong

ристик манипулятора в виде, удобном для их анализа и записи уравнений преобразования координат. Для простоты внесения данных в среде Visual Studio был разработан графический интерфейс программы, содержащий четыре формы.

На форме «Кинематический и пространственный анализ робота», рассматриваемой в данной статье, указывается количество звеньев манипулятора, который будет исследоваться, выбирается решаемая задача.

В зависимости от выбора задачи порождается окно с динамически создаваемыми элементами формы по количеству звеньев. Общие данные для расчета (координаты основания робота и начальный угол поворота, длины звеньев манипулятора) необходимо записать в текстовые поля и выбрать тип движения из выпадающего списка.

Для решения прямой задачи помимо полей основных данных заполняются поля перемещения звена (угловые или линейные). Для обратной – искомые координаты центра схвата и диапазон возможных перемещений звеньев. Для построения области действия – диапазон возможных перемещений звеньев.

Результат выводится в текстовом, а также в графическом (кинематическая схема и облако точек зоны действия робота) виде.

**Графическое представление результатов работы программы.** Проанализированы подходы к графическому отображению кинематических задач [9]–[11].

Для графического отображения результатов расчетов был выбран вариант передачи данных в MatLab и построение трехмерного изображения стандартными средствами данной платформы, поскольку штатных компонентов создания такого класса объектов в Visual Studio нет. При этом для выполнения подобных задач достаточно использовать бесплатный сервер автоматизации MatLab COM.

Графическое представление результатов имеет две формы:

- 1) кинематическая схема манипулятора;
- 2) область действия робота с наложенной кинематической схемой (в среднем положении).

Алгоритм построения графиков включает следующие этапы:

1. Загрузка координат сочленений манипулятора и центра схвата, полученных в результате расчета.
2. Создание объекта типа «MatLab.Application», представляющего собой командное окно программы MatLab без графической оболочки.
3. Передача координат в рабочее пространство MatLab. Координаты передаются в виде текстовой строки, содержащей имя переменной и массив значений, отдельно для кинематической схемы и области действия.
4. Передача команд построения и оформления графиков.

В программе использованы команды построения трехмерного графика с указанием стиля оформления (`plot3(x1,y1,z1,'b.-')`), объединения графиков при построении области действия и

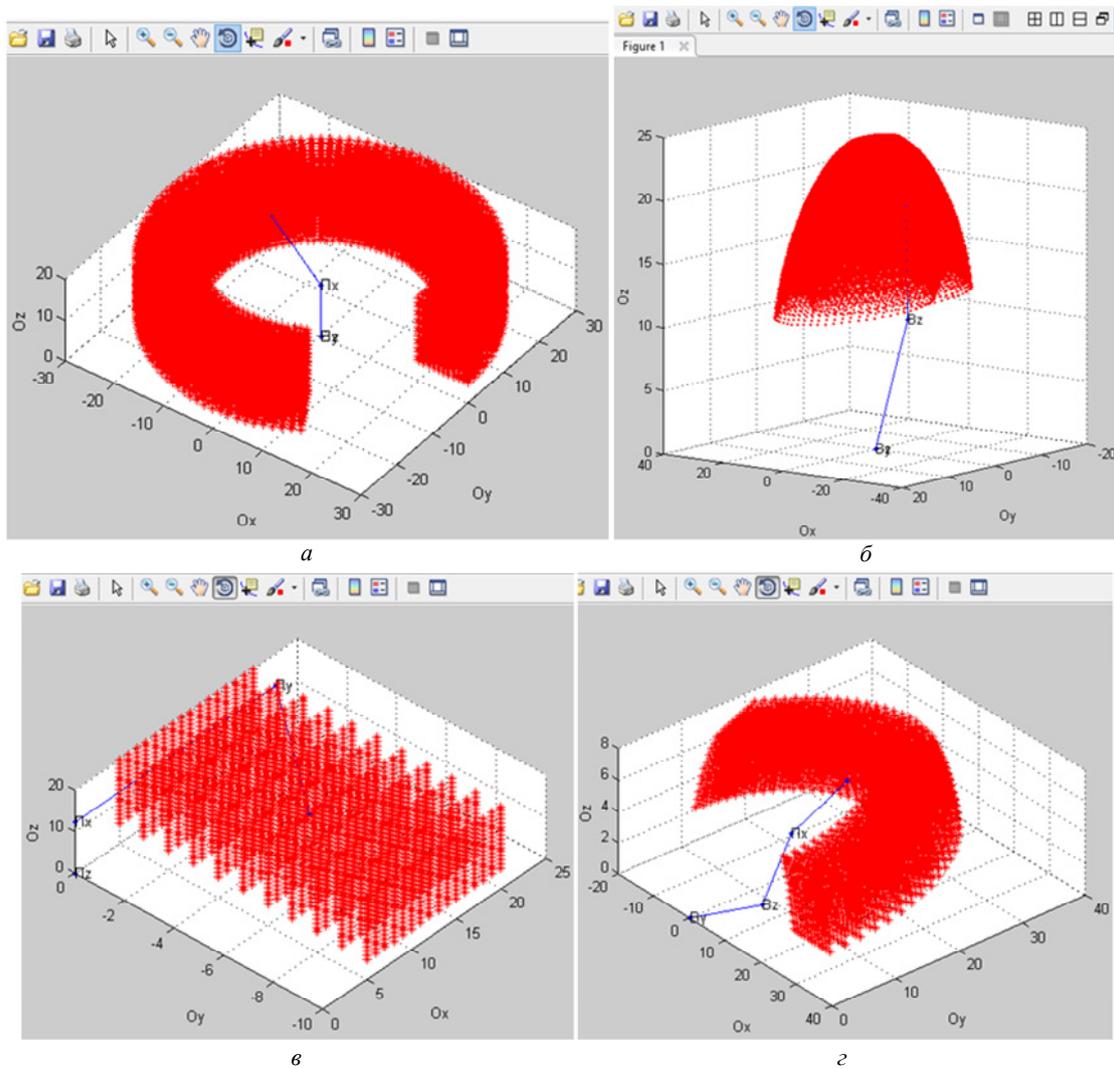


Рис. 9. Область действия и кинематическая схема робота, действующего в системах координат:

$a$  – в цилиндрической;  $b$  – в угловой;  $v$  – в декартовой;  $z$  – в сферической

Fig. 9. The scope of the robot and its kinematic scheme operating:  $a$  – in a cylindrical coordinate system;  $b$  – in the angular coordinate system;  $v$  – in the cartesian coordinate system;  $z$  – in a spherical coordinate system

кинематической схемы (hold on/ hold off), а также отображения сетки (gridon) и подписи осей (xlabel('Ox'), ylabel('Oy'), zlabel('Oz')).

Для подписывания типа движения, согласно таблице, упомянутой ранее, формируется команда вида "text(x1(" + CStr((i + 1)) + "), y1(" + CStr((i + 1)) + "), z1(" + CStr((i + 1)) + "), " + zveno + ")", где каждому сочленению соответствует буквенное обозначение.

Скриншоты результатов построения графиков в среде MatLab для роботов, функционирующих в различных системах координат (цилиндрическая, угловая, декартова и сферическая), представлены на рис. 9.

Полученное изображение удобно вращать, масштабировать и сохранять для дальнейшей работы. Имеется возможность перемещения и добавления новых объектов в целях компоновки рабочего пространства или производственной линии.

**Заключение.** В статье рассмотрена методика разработки программы кинематического и пространственного анализа манипуляторов произвольной конструкции с последовательным соединением звеньев. Она позволяет ускорить процесс расчета прямой и обратной задач кинематики, а также визуализировать кинематическую схему и область действия.

Разработанные метод, алгоритм и программа могут быть использованы для создания конфигураций роботов, программ и систем управления, а

также при обучении студентов и специалистов ввиду наглядности представления данных и универсальности применимости.

Правильность расчетов и предлагаемой методики проверены и подтверждены на разнообразных роботах (МП-9, МП-11, Delta, Omega и Vector). Система уравнений преобразования координат, полученная по такой технологии, используется в программе управления роботом Delta для задания перемещения по декартовым координатам. С помощью разработанной программы определены критические положения для того же манипулятора, приводящие к столкновению с установочной площадкой.

Применение данной программы на производстве позволит автоматически проектировать гибкие производственные линии на базе РТК, эффективно использовать пространство для обеспечения автоматизации производства и безопасного размещения персонала, исключить поломку оборудования или обрабатываемых объектов из-за столкновений, а также разместить рабочие площадки в зоне досягаемости робота или выбрать подходящий манипулятор. Вышеперечисленное позволяет повысить качество и скорость проектирования и наладки автоматизированных линий, особенно при недостаточности специальных знаний по данной теме и отсутствии сложных, дорогостоящих программных комплексов.

#### Список литературы

1. Шахинпур М. Курс робототехники. М.: Мир, 1990. 527 с.
2. Зенкевич С. Л., Ющенко А. С. Основы управления манипуляционными роботами. 2-е изд. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 480 с.
3. Колтыгин Д. С., Седельников И. А. Основные признаки классификации промышленных роботов // Проблемы современной науки. 2016. № 22. С. 19–27.
4. Грувер М., Зиммерс Э. САПР и автоматизация производства. М.: Мир, 1987. 528 с.
5. Коровин О. С. Обзор методов решения обратной задачи кинематики для манипулятора с избыточностью // Политехнический молодежный журн. 2022. № 12 (77). doi 10.18698/2541-8009-2022-12-846. URL: <http://ptsj.ru/catalog/menms/robots/846.html> (дата обращения 15.03.2023).
6. Ростов Н. В. Анализ алгоритмов решения обратных задач кинематики в системах управления движением роботов // Науч.-техн. ведомости Санкт-Петербургского гос. политехн. ун-та. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2014. № 5 (205). С. 93–99.
7. Данилов А. В. Метод «конечного поворота и смещения» для решения обратной задачи кинемати-

- ки для манипуляторов с последовательно соединенными звеньями // Морские интеллектуальные технологии. 2019. № 4–2 (46). С. 114–119.
8. Колтыгин Д. С., Седельников И. А. Метод и программа решения прямой и обратной задачи кинематики для управления роботом-манипулятором // Системы. Методы. Технологии. 2020. № 4 (48). С. 65–74.
9. Смирнов П. А., Яковлев Р. Н. Решение прямой и обратной задач кинематики в системе позиционирования звеньев манипулятора // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 12. С. 732–739. doi: 10.17587/mau.20.732-739.
10. Прогнозная оценка траектории руки оператора для решения обратной задачи динамики при копирующем управлении / В. И. Петренко, Ф. Б. Тебуева, М. М. Гурчинский, В. О. Антонов, А. С. Павлов // Тр. СПИИРАН. 2019. № 18(1). С. 123–147.
11. Компьютерная анимация кинематики пространственного односекционного манипулятора / Б. К. Нурахметов, К. З. Сартаев, Ж. М. Мырзагельдиева, Ж. Т. Жумашева // Механика и технологии. 2020. № 1(67). С. 231–239.

### Информация об авторах

**Седельников Илья Андреевич** – доцент. Братский государственный университет. ул. Макаренко, 40, г. Братск, 665709, Россия.

E-mail: [Ohtargil@yandex.ru](mailto:Ohtargil@yandex.ru)

<http://orcid.org/0000-0001-9797-9312>

**Колтыгин Дмитрий Станиславович** – канд. техн. наук. Братский государственный университет, ул. Макаренко, 40, г. Братск, 665709, Россия.

E-mail: [kds@brstu.ru](mailto:kds@brstu.ru)

<http://orcid.org/0000-0002-8250-6907>

### References

1. Shahinpur M. Kurs robototehniki. M.: Mir, 1990. 527 s. (In Russ.).
2. Zenkevich S. L., Jushhenko A. S. Osnovy upravlenija manipuljacionnymi robotami. 2-e izd. M.: Izd-vo MG TU im. N. Je. Baumana, 2004. 480 s. (In Russ.).
3. Koltygin D. S., Sedel'nikov I. A. Osnovnye priznaki klassifikacii promyshlennyh robotov // Problemy sovremennoj nauki. 2016. № 22. S. 19–27. (In Russ.).
4. Gruver M., Zimmers Je. SAPR i avtomatizacija proizvodstva. M.: Mir, 1987. 528 s. (In Russ.).
5. Korovin O. S. Obzor metodov reshenija obratnoj zadachi kinematiki dlja manipuljatora s izbytochnost'ju // Politehnicheskij molodezhnyj zhurn. 2022. № 12 (77). doi: 10.18698/2541-8009-2022-12-846. URL: <http://ptsj.ru/catalog/menms/robots/846.html> (data obraschenija 15.03.2023). (In Russ.).
6. Rostov N. V. Analiz algoritmov reshenija obratnyh zadach kinematiki v sistemah upravlenija dvizheniem robotov // Nauch.-tehn. vedomosti Sankt-Peterburgskogo gos. politehn. un-ta. Informatika. Telekommunikacii. Upravlenie. 2014. № 5 (205). S. 93–99. (In Russ.).
7. Danilov A. V. Metod «konechnogo povorota i smeshhenija» dlja reshenija obratnoj zadachi kinematiki dlja manipuljatorov s posledovatel'no soedinennymi zven'jami // Morskije intellektual'nye tehnologii. 2019. № 4-2 (46). S. 114–119. (In Russ.).
8. Koltygin D. S., Sedel'nikov I. A. Metod i programma reshenija prjamoj i obratnoj zadachi kinematiki dlja upravlenija robotom-manipuljatorom // Sistemy. Metody. Tehnologii. 2020. № 4 (48). S. 65–74. (In Russ.).
9. Smirnov P. A., Jakovlev R. N. Reshenie prjamoj i obratnoj zadach kinematiki v sisteme pozicionirovanija zven'ev manipuljatora // Mehatronika, avtomatizacija, upravlenie. 2019. T. 20, № 12. S. 732–739. doi: 10.17587/mau.20.732-739. (In Russ.).
10. Prognoznoj ocenka traektorii ruki operatora dlja reshenija obratnoj zadachi dinamiki pri kopirujushhem upravlenii / V. I. Petrenko, F. B. Tebueva, M. M. Gurchinskij, V. O. Antonov, A. S. Pavlov // Tr. SPIIRAN. 2019. № 18(1). С. 123–147. (In Russ.).
11. Komp'juternaja animacija kinematiki prostranstvennogo odnosekcionnogo manipuljatora / B. K. Nurahmetov, K. Z. Sartaeв, Zh. M. Myrzagal'dieva, Zh. T. Zhumasheva // Mehanika i tehnologii. 2020. № 1(67). S. 231–239. (In Russ.).

### Information about the authors

**Ilya A. Sedelnikov** – Assistant Professor of Bratsk State University, Makarenko st., 40, Bratsk, 665709, Russia E-mail: [Ohtargil@yandex.ru](mailto:Ohtargil@yandex.ru)

<http://orcid.org/0000-0001-9797-9312>

**Dmitry S. Koltygin**, Cand. Sci. (Eng.), Bratsk State University, Makarenko st., 40, Bratsk, 665709, Russia.

E-mail: [kds@brstu.ru](mailto:kds@brstu.ru)

<http://orcid.org/0000-0002-8250-6907>

Статья поступила в редакцию 11.05.2023; принята к публикации после рецензирования 29.05.2023; опубликована онлайн 19.10.2023.

Submitted 11.05.2023; accepted 29.05.2023; published online 19.10.2023.