

УДК 519.614

Научная статья

<https://doi.org/10.32603/2071-8985-2022-15-8-17-24>

## Альтернансы Фурье спектров последовательностей семейства матриц Адамара

Н. А. Балонин<sup>✉</sup>, Д. В. Куртяник

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Санкт-Петербург, Россия

<sup>✉</sup> korbendfs@mail.ru

**Аннотация.** Целью является совершенствование алгоритмов поиска ортогональных последовательностей, на которых построены циклические блоки матриц Адамара  $\mathbf{H}^T \mathbf{H} = n\mathbf{I}$ , где  $n$  – порядок,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица, и матриц нечетных и четных порядков  $\mathbf{K}^T \mathbf{K} = \omega \mathbf{I}$ , где  $\omega \leq 1$ , обладающих близкими с матрицами Адамара свойствами – малым числом значений элементов (уровней), как целых, так и иррациональных. Содержание проблемы их поиска состоит в том, что при перекрестном сравнении даже небольшого числа последовательностей на предмет ортогональности число сравнений растет квадратично от этого числа. Методы ускорения решения связаны с выделением индивидуальных признаков, фильтрация по которым отсеивает свыше 99 % первичного материала еще до перекрестного сравнения. Такими свойствами обладают пороговые ограничения на спектры Фурье последовательностей. Результатом статьи стало указание условий, при которых порог соблюдается автоматически ввиду альтернанса спектральных зависимостей в окрестности половинного значения порога фильтра (ранее указывался только порог). В заключении статьи отмечается область приложения искомым последовательностей – обработка и маскирование ортогональными матрицами видеоинформации, для которой отмеченное ускорение существенно и позволяет строить новые видеосистемы.

**Ключевые слова:** матрицы Адамара, ортогональные последовательности, фильтры Фурье, альтернансы

**Для цитирования:** Балонин Н. А., Куртяник Д. В. Альтернансы Фурье спектров последовательностей семейства матриц Адамара // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2022. Т. 15, № 8. С. 17–24. doi: 10.32603/2071-8985-2022-15-8-17-24.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

## Alternances of Fourier Spectra for Sequences of Hadamard Matrix Families

N. A. Balonin<sup>✉</sup>, D. V. KurtyanikSaint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,  
Saint Petersburg, Russia<sup>✉</sup> korbendfs@mail.ru

**Abstract.** The aim of the work is to improve the algorithms for searching for orthogonal sequences of cyclic blocks of Hadamard matrices  $\mathbf{H}^T \mathbf{H} = n\mathbf{I}$ ,  $n$  is size,  $\mathbf{I}$  is the identity matrix, and matrices of odd and even orders  $\mathbf{K}^T \mathbf{K} = \omega \mathbf{I}$ , where  $\omega \leq 1$ , which have properties similar to Hadamard matrices – a small values of elements (levels), both integer and irrational. The content of the problem of this search is that when cross-comparing even a small number of the sequence for orthogonality, the volume of comparisons grows as square of this number.

Methods for accelerating the solution are associated with the selection of individual features, filtering by which weed out more than 99 % of the primary material before cross-comparison. Threshold restrictions on the Fourier spectra of sequences have such properties. The result of the work is an indication of the conditions under which the threshold is observed automatically due to the alternance of the spectral dependences in the vicinity of the half value of the filter threshold (previously, only the threshold was indicated). In the conclusion of the article, the area of application of the desired sequences is noted – the processing and masking of video information by orthogonal matrices, for which the marked acceleration is significant and allows you to build new video systems.

**Keywords:** Hadamard matrices, orthogonal sequences, Fourier filters, alternances

**For citation:** Balonin N. A., Kurtyanik D. V. Alternances of Fourier Spectra for Sequences of Hadamard Matrix Families // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2022. Vol. 15, no. 8. P. 17–24. doi: 10.32603/2071-8985-2022-15-8-17-24.

---

**Conflict of interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Введение.** Матрицы Адамара [1], [2] – это одни из самых ранних представителей ортогональных массивов  $\mathbf{H}\mathbf{H} = n\mathbf{I}$ , где  $n$  – порядок,  $\mathbf{I}$  – единичная матрица, с малым числом значений элементов (уровней) 1 и  $-1$ , состоящие из одного или нескольких циклических блоков.

Существование той или иной матрицы Адамара тесно связано с наличием одной или нескольких бинарных последовательностей, составляющих первые строки циклических матриц [3]. Есть ли такие векторы для построения блоков или нет, выясняется в процессе емкого по времени перекрестного сравнения результатов от генераторов последовательностей. Поэтому поиск решения – майнинг матриц Адамара [4] – может занимать от долей секунд до нескольких дней, иногда – недель и даже месяцев.

Процесс отбора нужного материала можно заметно ускорить, заменив перекрестный анализ поиском не косвенных, а прямых признаков, указывающих, что последовательность не подходит – внедрением заградительных фильтров перед перекрестным сравнением. Например, наличие в Фурье-спектре бинарного сигнала отчетливо выраженных гармоник (пиков спектральной характеристики) свидетельствует о том, что такой сигнал недостаточно гибок для того, чтобы удовлетворить условию ортогональности матрицы. Доля отсева гармоническим фильтром высока, она может составлять 99 % и более, причем амплитуда пропускаемого фильтром пика равна, как правило, порядку матрицы [5]. Сходные признаки порождает автокорреляционный анализ, хотя примеров литературы с указанием на этот признак нет (направление перспективно для исследований).

Цель нашей статьи состоит в выделении порядков, на которых спектр Фурье и автокорреляцион-

ные функции ортогональных последовательностей резко упрощаются до постоянного или бинарного порядка (альтернирование между двух уровней).

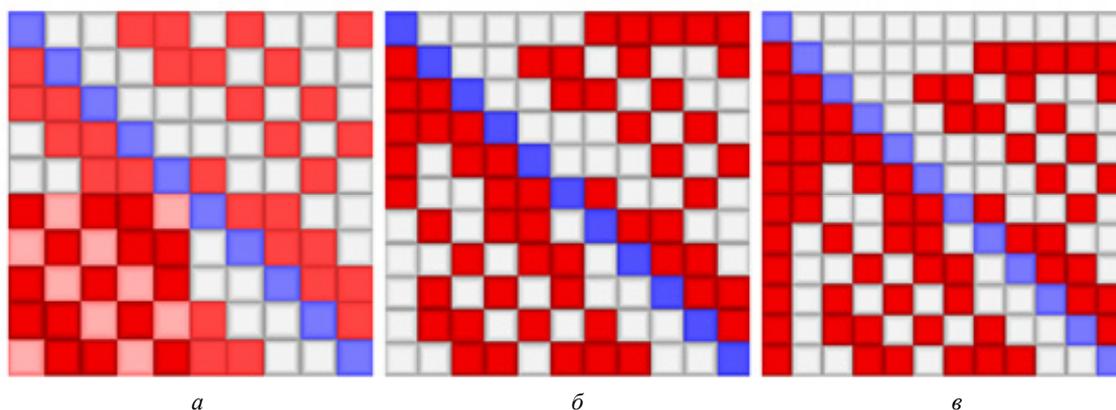
**Семейства критских матриц с циклическими блоками.** Матрицы Адамара – не единственные ортогональные матрицы, построенные на бинарных последовательностях, они входят в более широкий класс малоуровневых матриц с элементами  $a = 1$  и  $-b$ , не превосходящими по модулю единицы, для которых справедливо  $\mathbf{K}^T\mathbf{K} = \omega\mathbf{I}$ , где  $\omega \leq 1$  – некоторый весовой коэффициент [6], [7].

Поиск критских матриц происходит так же, как и матриц Адамара, поскольку существуют генераторы случайных бинарных последовательностей и фильтры, существенно снижающие их выход.

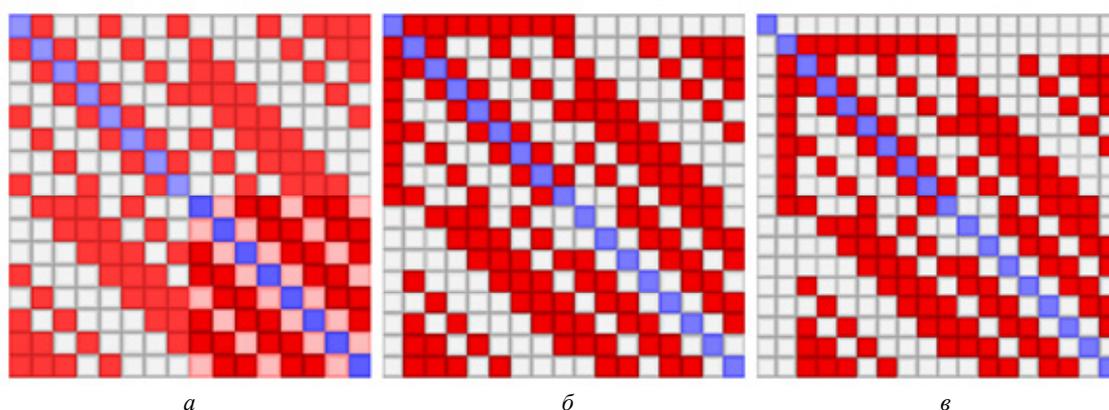
Число уровней в критских матрицах расширяемо от 2 к 3, например элементом  $d$  на диагонали. Фиксировать семейства критских матриц можно, как и матриц Адамара, указывая формулы для уровней  $b = b(n)$  и  $d = d(n)$ . Например, критские матрицы при  $b = 1$  – это классические матрицы Адамара  $\mathbf{H}$ , при  $b = 1$  и  $d = 0$  (на диагонали) – это матрицы Белевича [8], для которых справедливо иное условие ортогональности  $\mathbf{C}^T\mathbf{C} = (n-1)\mathbf{I}$ .

Пользуясь структурными преобразованиями, можно доказать тождество структур матриц Адамара (Белевича) и вложенных в них структур матричных блоков Мерсенна, Эйлера (Одина, тени) [7], получаемых из матриц отделением первой и второй каймы. Это означает общность алгоритма поиска последовательностей, в котором амплитуда элементов матрицы не имеет значения, т. е. фильтры Фурье построены так же, как и для матриц Адамара.

Про спектры Фурье бинарных последовательностей нечетного порядка известно немного. Можно выделить два характерных случая. В первом спектр представляет собой линию равной амплиту-



*Рис. 1.* Взаимные переходы кососимметричных дизайнов:  
*a* – матрица Эйлера **E**; *б* – матрица Мерсенна **M**; *в* – матрица Адамара **H**  
*Fig. 1.* Mutual transitions of skew-symmetric designs:  
*a* – Euler matrix **E**; *б* – Mersenne matrix **M**; *в* – Hadamard matrix **H**



*Рис. 2.* Взаимные переходы симметричных дизайнов:  
*a* – матрица тени **T**; *б* – матрица Одина **O**; *в* – матрица Белевича **C**  
*Fig. 2.* Mutual transitions of symmetric designs:  
*a* – Shadow matrix **T**; *б* – Odin matrix **M**; *в* – Belevitch matrix **C**

ды, все частоты в нем представлены одинаково (как у белого шума). Постоянный уровень спектра равен половине размера матрицы Адамара.

Второй случай, когда спектр альтернирует, более интересен, поскольку он описывает редкие не всегда существующие решения. Оказывается, что амплитуда альтернанса (отклонение от среднего уровня) даже у матриц Адамара, чьи уровни – целочисленные, описывается формулой  $(a + b)/d$ , где  $d = 2/(a - b)$ .

Это лишнее подтверждение того, что при внешнем различии целочисленные (Адамара и Белевича) и иррациональные критские матрицы тесно связаны между собой и структурно, и условиями их нахождения – факт, который не мог быть вскрыт исследованием [5], которое изучало только целочисленные матрицы.

Для освещения этих взглядов и большего удобства читателя опишем подробнее некоторые распространенные структуры, т. е. критские матрицы и связанные с ними матрицы Адамара, подробнее. Затем приведем итоги нашего исследо-

вания с указанием порядков, когда спектр прост или альтернирует, с приведением данных авторегрессии и видов спектров, когда альтернанс нарушается (заполнение между более упорядоченными порядками).

**Критские матрицы.** Критские матрицы Эйлера **E** и тени **T** (shadow matrices) – это матрицы порядков  $4t - 2$  и  $4t - 4$ , где  $t$  – натуральное число, с элементами  $a = 1$ ,  $-b$  и  $d = 2/(a - b)$  в последнем случае (элемент на диагонали), построенные на

$$\text{паре блоков } \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^T & \mathbf{D}^T \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & -\mathbf{D}^T \end{pmatrix}.$$

Матрицы Эйлера тяготеют к кососимметрии, а матрицы тени строго симметричны. Никакого противоречия здесь нет: несимметричных матриц тени не бывает, а на классе существующих на всех возможных порядках матриц Эйлера особо выделен сходный с ее антиподом вариант, когда блок **A** кососимметричен, а блок **B** симметричен. В циклической версии матриц тени второй блок построен на антисимметричной последователь-

ности, ее половины совпадают, но обратны по знаку, причем хвост реверсирован.

Матрицы Эйлера шире – последовательным добавлением каймы (рис. 1) они ведут к матрицам Мерсенна  $\mathbf{M}$  порядков  $4t - 1$  и потом к матрицам Адамара  $\mathbf{H}$  порядков  $4t$ , которые существуют для всех выделенных им значений.

Матрицы тени тоньше, последовательным добавлением каймы (рис. 2) они ведут к матрицам Одина  $\mathbf{O}$  порядков  $4t - 3$  и потом к матрицам Белевича  $\mathbf{C}$  порядков  $4t - 2$ , которые существуют не для всех выделенных им значений порядков (необходимое условие состоит в разложимости  $4t - 3$  на сумму двух квадратов).

Инвариантом матрицы Мерсенна является равное число внедиагональных элементов разного знака, универсальная структура в качестве первой строки и столбца содержит кайму из элементов векторов  $\mathbf{e}$  и  $-\mathbf{be}$ , где  $\mathbf{e}$  – вектор из 1 длины  $v$ . Сходно с ней устроена симметричная матрица Одина, но на диагонали ее содержится отличный от 1 элемент  $d$ :

$$\mathbf{M}_{4t-1} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{e} & -\mathbf{be} \\ -\mathbf{be} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{e} & [-\mathbf{B}^T] & \mathbf{D}^T \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{O}_{4t-3} = \begin{pmatrix} d & -\mathbf{be} & \mathbf{e} \\ -\mathbf{be} & \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{e} & \mathbf{B}^T & [-\mathbf{D}^T] \end{pmatrix}.$$

Здесь операция, обозначенная как [блок] ( $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{D}$  взяты в  $[\ ]$ ), означает смену уровней блока заменой всех положительных элементов транспонированной матрицы на 1 (помимо диагонали) и всех отрицательных – на  $-b$ .

Уровни критских матриц описывались неоднократно [7], мы приведем здесь малоизвестную их редакцию, показывающую сходство расчетных формул.

Матрицы Мерсенна  $\mathbf{M}$  порядков  $n = 4t - 1$  и вложенные в них с каймой матрицы Эйлера  $\mathbf{E}$  порядков  $n = 4t - 2$  отличаются уровнями

$$b = \frac{t}{t + \sqrt{t}} \text{ и } b = \frac{t}{t + \sqrt{2t}} \text{ соответственно.}$$

Матрицы Одина  $\mathbf{O}$  порядков  $n = 4t - 3$  и вложенные в них с каймой матрицы тени  $\mathbf{T}$  порядков  $n = 4t - 4$  отличаются иррациональным значением

$$\text{уровня на диагонали } d = \frac{1}{1 + \sqrt{n}} \text{ и } d = \frac{2}{3 + \sqrt{2n + 1}}$$

соответственно, причем  $b = 1 - 2d$ .

Кососимметричная  $\mathbf{G}$  и симметричная  $\mathbf{P}$  матрицы Адамара с четырьмя блоками (сходными с массивом Вильямсона) ищут в формах массива Себерри [9] и массива Балонина–Себерри [10]:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BR} & \mathbf{CR} & \mathbf{DR} \\ -\mathbf{BR} & \mathbf{A} & \mathbf{RD} & -\mathbf{RC} \\ -\mathbf{CR} & -\mathbf{RD} & \mathbf{A} & \mathbf{RB} \\ -\mathbf{DR} & \mathbf{RC} & -\mathbf{RB} & \mathbf{A} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BR} = \mathbf{CR} & \mathbf{CR} = \mathbf{BR} & \mathbf{DR} \\ \mathbf{CR} & \mathbf{RD} & -\mathbf{A} & -\mathbf{RB} \\ \mathbf{BR} & -\mathbf{A} & -\mathbf{RD} & \mathbf{RC} \\ \mathbf{DR} & -\mathbf{RC} & \mathbf{RB} & -\mathbf{A} \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{R}$  – обратная единичная матрица, т. е. матрица с единицами вдоль второй не главной диагонали квадрата. Блок  $\mathbf{R}$  встречается записанным по другую сторону от циклической матрицы (тогда первая строка реверсируется и циклически смещается на такт, чтобы сохранить ортогональность массива в целом). Еще более общий массив Гетхальса–Зейделя не пользуется упрощением вида  $\mathbf{B}^T \mathbf{R} = \mathbf{RB}$ , характерным для циклических блоков.

Симметричная конструкция  $\mathbf{P}$  с  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$  и  $\mathbf{B} = \mathbf{C}$  возникла как альтернатива довольно долго державшейся моде на кососимметричные массивы и названа ее авторами для краткости «Пропус», породив ряд симметричных матриц на прежде не раскрытых порядках [11]–[13] и т. п. Эти матрицы представляют собой источник ациклических (не циклических, со скрытой циклическостью) матриц Эйлера, тени, Одина и Мерсенна с элементарным формированием и отделением каймы.

**Спектры Фурье критских матриц.** Последовательности из 1 и на  $-1$ , на которых построены матрицы Адамара и Белевича в форме бициклов с двойной каймой и трициклов (конструкций Пропус матриц Адамара), как и любые другие, можно подвергнуть умножению на синусно-косинусную матрицу Фурье  $\mathbf{F}$ , что дает их вещественные и мнимые составляющие спектра и их квадраты  $f_a^2$  и  $f_b^2$  у Пропусов последовательностей 3.

Оба типа орнаментов матриц ортогональны в том случае, когда сумма квадратов составляющих спектральной характеристики равна порядку матрицы Адамара  $f_a^2 + f_b^2 = n$ . Естественно,  $f_a^2 \leq n$  и  $f_b^2 \leq n$ . Оба неравенства примечательны тем, что их можно проверять независимо друг от друга.

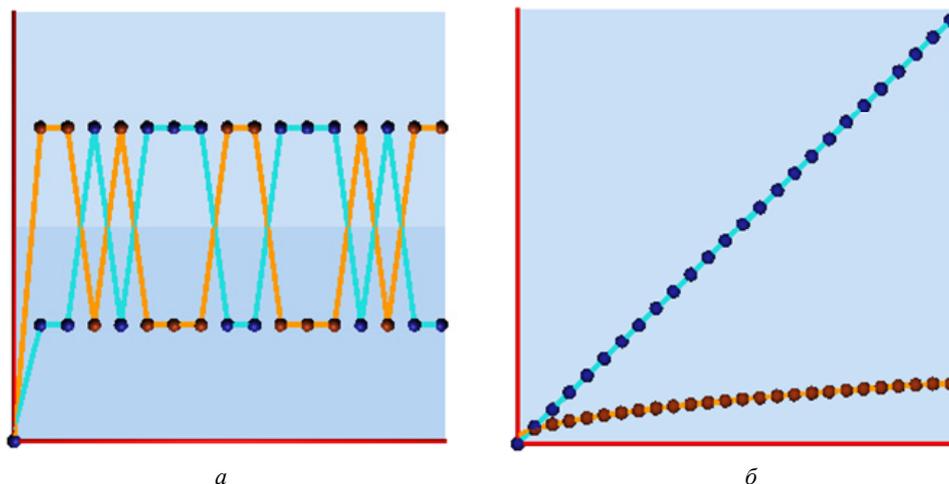


Рис. 3. Диаграммы альтернансов: *a* – спектры последовательностей **a** и **b**;  
*b* – верхний порог и амплитуда с ростом порядка  
 Fig. 3. Alternance diagrams: *a* – spectra of sequences **a** and **b**;  
*b* – upper threshold and amplitude with increasing order

Для трициклов равенство модифицируется с учетом равенства пары средних блоков в структуре матрицы  $f_a^2 + 2f_b^2 + f_d^2 = n$ , тогда  $f_a^2 \leq n$  и  $f_d^2 \leq n$  при том, что  $f_a^2 + f_d^2 \leq n$ ,  $2f_b^2 \leq n$ .

Порядок бициклов Эйлера **E**, на которых базируются матрицы Адамара с двойной каймой, четен и в качестве плеч **A**, **B** могут выступать матрицы Мерсенна **M** (без изменения уровней) или матрицы Одина **O**, диагональ которых становится единичной и значение, соответственно, изменяется до указанного расчетного уровня *b*. Мы говорим об этом только потому, что в случае размера плеча, равного простому числу, именно эти два случая отвечают постоянному значению мощности спектра Фурье  $f_a^2 = f_b^2 = n/2$  и альтернансу (рис. 3).

На рис. 3 показано альтернирование спектров двух эйлеровских последовательностей и последовательное снижение их роли с линейным ростом порогового порядка. Заметим, что в случае поиска матрицы Эйлера спектр находится для 1, -1 последовательностей, а порядок  $n = 2v + 2$  указывается для связанной с нею матрицы Адамара, *v* – длина плеча бицикла.

Расстояние *r* между альтернирующими точками и осевой линией  $n/2$  оценивается замечательной формулой  $r = 2\sqrt{v} = 2 \frac{a+b}{a-b} = \frac{a+b}{d}$ , где  $a = 1$ ,  $d = \frac{1}{1+\sqrt{v}}$ ,  $d = 1 - 2b$  – уровни матрицы Одина размера *v* плеча матрицы Эйлера **A** (или **B**).

Для численной оценки совершенствования алгоритмов поиска примем во внимание следующие их особенности.

У ортогональных матриц Эйлера порядков  $n = 4t - 2$  с уровнями  $a = 1$  и  $-b$ ,  $b = \frac{t}{t + \sqrt{2t}}$ , сумма

произведений **Aa** + **Bb** для первых вектор-строк **a** и **b** плеч **A** и **B** в виде последовательностей из 1 и -1 (для последующей замены уровня -1 на -b) состоит из -2. Непосредственные генерация последовательностей и поиск их взаимного соответствия по этому критерию малоосмысленны, поскольку вероятность встречи нужной пары пренебрежимо мала. Более реальный путь состоит в том, чтобы накапливать обе последовательности для их перекрестного сравнения, но тогда количество таких сравнений растет в квадратичной зависимости: пара субкаталогов из 100 последовательностей **a** и 100 последовательностей **b** породит 10 000 сравнений.

Общий алгоритм работы с каталогами можно разделить на три этапа:

- генерация последовательностей для получения циркулянтов **A**, **B**;
- фильтрация последовательностей;
- поиск совместимости последовательностей между возможными вариантами реализации блоков для формирования матрицы Эйлера искомого порядка.

С ростом порядка искомой матрицы скорость поиска резко падает из-за увеличения объема каталога. Он не удерживает вместе две пары, нужные для синтеза **A** и **B**. Его полезно прореживать, что имеет аналогию – «обогащение» в майнинге

ископаемых. Это – неотъемлемая процедура в добывающей промышленности, поэтому и для матриц ее называют майнингом ввиду сходства проблем [4].

Часто сверхбольшие данные теряются из-за крайне малой вероятности встретить обе последовательности одновременно. Ведь достаточно, чтобы не было одной из них, и огромная таблица сравнений будет перекрестно проверена зря. Сверхбольшие каталоги последовательностей поиска, рассматриваемые в [5], содержат потенциальные первые строки циклических блоков (циркулянтов) матриц Эйлера. Для проверки стабильности воспроизводства условий майнинга матриц на компьютерах разного поколения в таблице мы сопоставили состав пропускаемых последовательностей (в процентах) для нескольких порядков, полученных 20 лет назад [5] и в эксперименте 2021 г.

Процентный состав пропускаемых последовательностей  
Percentage of good sequences

Порядок	Годные для построения матрицы последовательностей после фильтрации, %	
	Данные из [5], 2001 г.	Эксперимент, 2021 г.
42	7.22	7.12
50	3.63	3.7
62	1.45	1.52
70	0.8	0.82
82	0.31	0.29
90	0.16	0.16

Резкое снижение доли годных последовательностей, исходя из приведенной таблицы, убедительно свидетельствует о возрастании роли фильтров Фурье в процедурах поиска матриц Адамара и матриц, построенных на их ортогонализированных основах. Объем прореживаний фильтрами растет линейно, и пара субкаталогов из 100 и 100 последовательностей породит всего 200 фильтраций.

Теперь учтем, что замена порогового критерия, когда спектр не превышает порядка матрицы, на проверку альтернанса при линейно растущем числе фильтраций, значительно снижает и без того малый процент пропускаемых фильтром последовательностей. Фильтр становится жестче, и, по сути дела, поиск подходящих последовательностей к нему и сводится, т. е. число необходимых проверок растет не квадратично, а линейно.

С учетом того, что обычный объем генерируемых последовательностей составляет 1 млн пар, замена  $10^{12}$  перекрестных сравнений на  $10^6$  объясняет источник повышенного интереса к фиксированию альтернансов, в [5] не учтенному.

**Заключение.** В основополагающей публикации [5] показана роль порогового ограничения для спектров последовательностей Эйлера, пропускаемых фильтром Фурье, – основы бициклических матриц Адамара с парной каймой. Аналогичные ограничения накладываются на последовательности бициклических матриц максимума детерминанта и на тетрациклы, указанные в статье. В ней не учитывается то обстоятельство, что простота значения числа, выражающего длину последовательности, должна сказываться на упрощении процедуры ее поиска. Этой простоте найдено адекватное выражение в виде альтернанса, который несложно проконтролировать.

Помимо визуальной оценки результатов исследований [14], существуют машинные методы и программы [15], [16], которые можно существенно ускорить учетом отмеченного обстоятельства. Ортогональные последовательности широко используются для маскирования и сжатия видеоизображений [17].

Показаны два кардинально различающихся случая порядков матриц Мерсенна  $\mathbf{M}$   $n = 4t - 1$  и матрицы Одина  $\mathbf{O}$  порядков  $n = 4t - 3$ . Отличие между ними нивелируется снижением относительной амплитуды альтернанса  $r/v$ , стремящейся с ростом порядка к 0. Так и должно быть, поскольку значения элементов этих матриц стремятся к целочисленным значениям, причем эта тенденция обоюдная. Оказывается, что помимо заметно завышенного порога  $n = 2v + 2$  разрешимость задачи зависит от характера колебаний спектра. При простых значениях размера плеча он альтернирует недалеко от половинного значения порога, и относительная амплитуда колебаний падает с ростом порядка квадратично.

Таким образом, имеются все шансы ускорить поиск [4] при помощи контроля альтернанса, построенного на отмеченной аналитической оценке амплитуды.

#### Список литературы

1. Hadamard J. Résolution d'une question relative aux déterminants. Bulletin des sciences mathématiques, 1893. Vol. 17. P. 240–246.

2. Jennifer S., Yamada M. Hadamard Matrices: Constructions using number theory and linear algebra. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2020. 384 p.

3. Colbourn C. J., Dinitz J. H. Hadamard matrices and designs. Handbook of Combinatorial Designs. USA, Florida: CRC Press, 1996. P. 229–516.
4. Сергеев А. М., Балонин Ю. Н. Майнинг матриц // Обработка, передача и защита информации в компьютерных системах '22. Сб. докл. Второй Всерос. науч. конф. СПб.: ГУАП, 2022. С. 169–173. doi: 10.31799/978-5-8088-1701-2-2022-2-169-173.
5. Fletcher R. J., Gysin M., Seberry J. Application of the discrete Fourier transform to the search for generalised Legendre pairs and Hadamard matrices // Australasian J. of Combinatorics. 2001. Vol. 23. P. 75–86.
6. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Как гипотезе Адамара помочь стать теоремой. Ч. 1 // Информационно-управляющие системы. 2018. № 6. С. 2–13. doi: 10.31799/1684-8853-2018-6-2-13.
7. Балонин Н. А., Сергеев М. Б. Критские матрицы Одина и тени, сопровождающие простые числа и их степени // Информационно-управляющие системы. 2022. № 1. С. 2–7. doi: 10.31799/1684-8853-2022-1-2-7.
8. Colbourn C. J., Dinitz J. H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. USA, Florida: CRC Press, 2007. 967 p.
9. Awyzio G., Seberry J. On Good Matrices and Skew Hadamard Matrices, 2015. 15 p. URL: <https://documents.uow.edu.au/~jennie/WEB/WEB15/Awyzio-Seberry2015.pdf>.
10. Balonin N. A., Seberry J. Two infinite families of symmetric Hadamard matrices // Australian j. of combinatorics. 2017. Vol. 69(3). P. 349–357.
11. Construction of symmetric Hadamard matrices / N. A. Balonin, Y. N. Balonin, D. Z. Djokovic, D. A. Karbovskiy, M. B. Sergeev // Информационно-управляющие системы. 2017. № 5. С. 2–11. doi: 10.15217/issn1684-8853.2017.5.2.
12. Балонин Ю. Н., Сеницына О. И. Генерация симметричных ортогональных матриц Адамара с тремя блоками (Пропусов) на базе предварительного поиска части последовательностей. Свид. о регистрации программы для ЭВМ № 2020662383 от 13.10.20. Заявка № 2020661882 от 13.10.20.
13. Балонин Ю. Н., Сергеев А. М. Накопление пар ортогональных последовательностей для поиска симметричных ортогональных матриц Адамара с тремя блоками (Пропусов). Свид. о регистрации программы для ЭВМ № 2020662384 от 13.10.20. Заявка № 2020661883 от 13.10.20.
14. О визуальной оценке результатов поиска матриц Адамара / Д. В. Куртяник, А. М. Сергеев, А. В. Самиков, А. А. Семенов // Наука. Техника. Технологии (политехн. вестн.). Отраслевые научные и прикладные исследования: Физ.-мат. науки. 2018. № 4. С. 19–26.
15. Балонин Ю. Н., Сергеев А. М. Программный комплекс клиент-серверного поиска бициклических матриц Адамара в реальном масштабе времени. Свид. регистрации программы для ЭВМ № 2018617112 от 19.06.18 г. Заявка № 2018614018 от 23.04.18.
16. Балонин Ю. Н., Сергеев А. М. Программный комплекс поиска бициклических матриц на основе таблицы перекрестных ссылок. Свид. о регистрации программы для ЭВМ № 2018616390 от 01.06.18. Заявка № 2018613876 от 18.04.18.
17. О гибридном методе защиты видеоданных в IP-сетях / А. А. Востриков, Ю. Н. Балонин, Д. В. Куртяник, А. М. Сергеев, О. И. Сеницына // Телекоммуникации. 2018. № 2. С. 34–39.

#### Информация об авторе

**Балонин Николай Алексеевич** – д-р техн. наук, профессор кафедры вычислительных систем и сетей СПбГУАП.

E-mail: [korbendfs@mail.ru](mailto:korbendfs@mail.ru)

<https://orcid.org/0000-0001-7338-4920>

**Куртяник Даниил Владимирович** – старший преподаватель кафедры вычислительных систем и сетей СПбГУАП.

E-mail: [dvk88@yandex.ru](mailto:dvk88@yandex.ru)

<https://orcid.org/0000-0002-2895-6990>

#### References

1. Hadamard J. Résolution d'une question relative aux déterminants. Bulletin des sciences mathématiques, 1893. Vol. 17. P. 240–246.
2. Jennifer S., Yamada M. Hadamard Matrices: Constructions using number theory and linear algebra. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2020. 384 p.
3. Colbourn C. J., Dinitz J. H. Hadamard matrices and designs. Handbook of Combinatorial Designs. USA, Florida: CRC Press, 1996. P. 229–516.
4. Sergeev A. M., Balonin YU. N. Majning matrix // Ob-rabotka, peredacha i zashchita informacii v komp'yuternyh sistemah '22. Sb. dokl. Vtoroj Vseros. nach. konf. SPb.: GUAP, 2022. S. 169–173. doi: 10.31799/978-5-8088-1701-2-2022-2-169-173. (In Russ.).
5. Fletcher R. J., Gysin M., Seberry J. Application of the discrete Fourier transform to the search for generalised Legendre pairs and Hadamard matrices // Australasian J. of Combinatorics. 2001. Vol. 23. P. 75–86.

6. Balonin N. A., Sergeev M. B. Kak gipoteze Adamara pomoch' stat' teoremoj. CHast' 1 // Informacionno-upravlyayushchie sistemy. 2018. № 6. S. 2–13. doi: 10.31799/1684-8853-2018-6-2-13. (In Russ.).

7. Balonin N. A., Sergeev M. B. Kritskie matricy Odina i teni, soprovozhdayushchie prostye chisla i ih stepeni // Informacionno-upravlyayushchie sistemy. 2022. № 1. S. 2–7. doi: 10.31799/1684-8853-2022-1-2-7. (In Russ.).

8. Colbourn C. J., Dinitz J. H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. USA, Florida: CRC Press, 2007. 967 p.

9. Awyzio G., Seberry J. On Good Matrices and Skew Hadamard Matrices, 2015. 15 p. URL: <https://documents.uow.edu.au/~jennie/WEB/WEB15/Awyzio-Seberry2015.pdf>.

10. Balonin N. A., Seberry J. Two infinite families of symmetric Hadamard matrices // Australian journal of combinatorics. 2017. Vol. 69(3). P. 349–357.

11. Balonin N. A., Balonin Y. N., Djokovic D. Z., Karbovskiy D. A., Sergeev M. B. Construction of symmetric Hadamard matrices // Information and Control Systems. 2017. No. 5. S. 2–11. doi: 10.15217/issn1684-8853.2017.5.2.

12. Balonin YU. N., Sinicyna O. I. Generaciya simmetrichnyh ortogonal'nyh matric Adamara s tremya blokami (Propusov) na baze predvaritel'nogo poiska chasti posledovatel'nostej. Svid. o registracii programmy dlya

EVM № 2020662383 ot 13.10.20. Zayavka № 2020661882 ot 13.10.20. (In Russ.).

13. Balonin YU. N., Sergeev A. M. Nakoplenie par ortogonal'nyh posledovatel'nostej dlya poiska simmetrichnyh ortogonal'nyh matric Adamara s tremya blokami (Propusov). Svid. o registracii programmy dlya EVM № 2020662384 ot 13.10.20. Zayavka № 2020661883 ot 13.10.20. (In Russ.).

14. Kurtyanik D. V., Sergeev A. M., Samikov A. V., Semenov A. A. O vizual'noj ocenke rezul'tatov poiska matric Adamara // Nauka. Tekhnika. Tekhnologii (politekhnicheskij vestnik), Otrasleye nauchnye i prikladnye issledovaniya: Fiziko-matematicheskie nauki. 2018. № 4. S. 19–26. (In Russ.).

15. Balonin YU. N., Sergeev A. M. Programmnyj kompleks klient-servernogo poiska biciklicheskih matric Adamara v real'nom masshtabe vremeni. Svid. registracii programmy dlya EVM № 2018617112 ot 19.06.18 g. Zayavka № 2018614018 ot 23.04.18. (In Russ.).

16. Balonin YU. N., Sergeev A. M. Programmnyj kompleks poiska biciklicheskih matric na osnove tablicy perekrestnyh ssylok. Svid. o registracii programmy dlya EVM No. 2018616390 ot 01.06.18. Zayavka № 2018613876 ot 18.04.18. (In Russ.).

17. Vostrikov A. A., Balonin YU. N., Kurtyanik D. V., Sergeev A. M., Sinicyna O. I. O gibridnom metode zashchity videodannyh v IP-setyah // Telekommunikacii. 2018. № 2. S. 34–39. (In Russ.).

---

#### Information about the author

**Nikolay A. Balonin** – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Department Computer Systems and Networks of Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation.

E-mail: [korbendfs@mail.ru](mailto:korbendfs@mail.ru)

<https://orcid.org/0000-0001-7338-4920>

**Daniil V. Kurtyanik** – Senior Lecturer of the Department Computer Systems and Networks of Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation.

E-mail: [dvk88@yandex.ru](mailto:dvk88@yandex.ru)

<https://orcid.org/0000-0002-2895-6990>

Статья поступила в редакцию 17.05.2022; принята к публикации после рецензирования 23.05.2022; опубликована онлайн 21.10.2022.

Submitted 17.05.2022; accepted 23.05.2022; published online 21.10.2022.

---