

УДК 538.4

К. И. Ким, К. К. Ким
 Петербургский государственный университет
 путей сообщения Императора Александра I

Исследование устойчивости движения поршневого потока жидкого металла в магнитогидродинамическом генераторе

Формулируется задача устойчивости движения поршневого потока под действием бегущего магнитного поля в МГД-генераторе безэлектродного типа. Поршневой поток состоит из жидкометаллических поршней (объемов жидкого металла), которые отделяются друг от друга объемами газа. Схема МГД-генератора представляет собой два поршневых потока, отделенных друг от друга тонкой изоляционной стенкой. Потoki сдвинуты друг относительно друга на половину длины волны внешнего бегущего магнитного поля, созданного токами, протекающими по обмоткам статора. Через поршни протекают постоянные токи, направленные встречно в соседних поршнях. При наличии возмущений движение поршней носит неустойчивый характер. С помощью второго метода Ляпунова выводятся достаточные критерии устойчивости установившегося движения жидкометаллического поршневого потока по отношению к малым возмущениям расстояния между поршнями и формулы для оценки сверху интеграла Коши уравнения возмущенного движения поршня.

МГД-генератор, жидкий металл, поршневой поток, устойчивость, метод Ляпунова

При разработке жидкометаллических безэлектродных МГД-генераторов переменного тока необходимо решить ряд научно-технических задач, к которым относится создание силы, ускоряющей жидкий металл. Среди возможных решений выделяется метод поршневого потока. Поршневой поток представляет собой череду жидкометаллических поршней, разделенных газовыми «пробками». Поршни могут быть в поперечном сечении круглыми (цилиндрический канал) или прямоугольными (плоский канал). В этом случае можно создать простое по конструкции ускоряющее устройство, которое имеет прямой канал постоянного сечения с фиксированными давлениями газа на его концах [1], [2].

Жидкометаллические поршни ускоряются с помощью импульсов энергии адиабатического расширения газа, непосредственно передаваемой на поршни. Жидкометаллические поршни – крупномасштабные объекты, поэтому их сепарация не представляет особой трудности. Также снимаются ограничения на расход жидкого металла, что обуславливает возможность создания синхронных генераторов большой мощности.

Для МГД-генератора поршневого потока значительный интерес представляет конструкция, в канале (с поперечным габаритом h) которой используются два параллельно протекающих жидкометаллических плоских поршневых потока металла. Потoki имеют ограниченную ширину и разделены стенкой с толщиной Δ , причем центры инерции соседних поршней (длиной l в направлении оси y) разных потоков находятся один относительно другого на расстоянии τ (рис. 1), а соседние поршни в каждом из потоков сдвинуты на 2τ . Через поршни (длиной $2L$ и толщиной δ), принадлежащие разным потокам, в направлении оси y протекают постоянные токи во встречных направлениях (эти направления на рис. 1 показаны крестиками и точками), поэтому любую пару соседних поршней можно рассматривать как виток с постоянным током. Трехфазные статорные обмотки, расположенные на ферромагнитных стенках (верхней и нижней) канала, создают магнитное поле в виде бегущей волны с длиной 2τ . Взаимодействие этого поля с токами в поршнях движет последние. На рис. 1 P_-^0 и P_+^0 обозначают установившиеся значения давления до поршня и за ним соответственно.

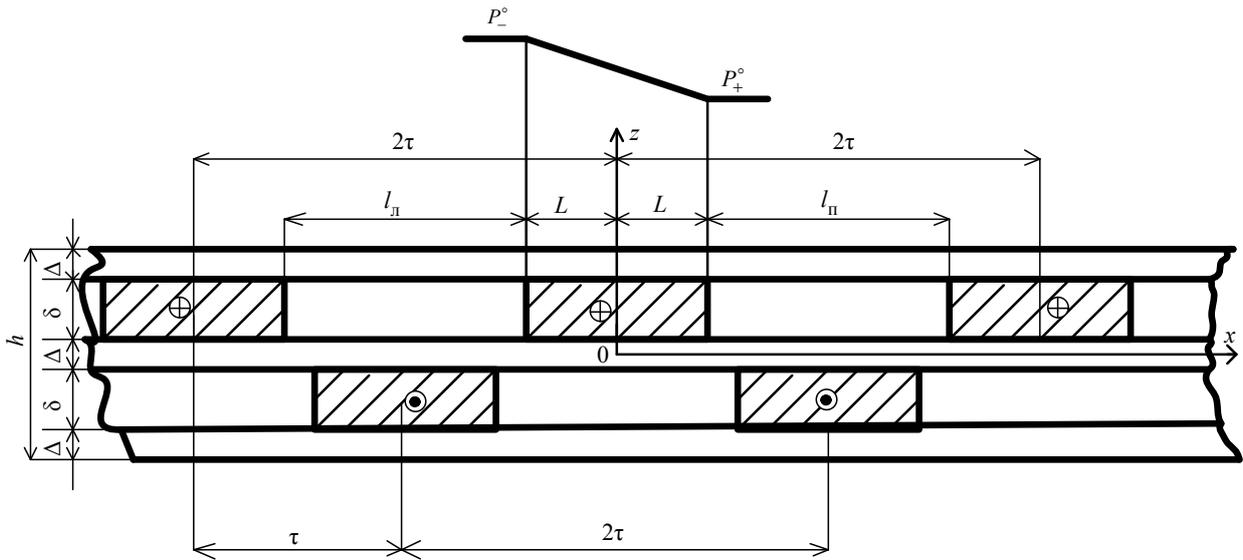


Рис. 1

Установившееся движение среднего поршня. При установившемся движении жидкометаллического поршневого потока скорость бегущего поля статора равна скорости движения поршней. Предполагается, что возникают малые возмущения расстояния между соседними поршнями.

При формулировании критериальных соотношений будем считать газ упругой средой, а границы между газом и поршнем – плоскими. Согласно первому предположению характерное время разрушения контактной поверхности из-за неустойчивости Рэля–Тейлора значительно превышает время релаксации возмущенных движений поршня. Второе предположение связано с адиабатичностью процессов сжатия и расширения газа.

Уравнение установившегося движения поршня выглядит следующим образом:

$$M \frac{du}{dt} = (P_- - P_+)q - F_1 - F_2, \quad (1)$$

где M – масса поршня; u – скорость поршня в неподвижной системе координат xuz ; P_- и P_+ – давления слева и справа от поршня; q – площадь поперечного сечения поршня в плоскости uz ; F_1 и F_2 – электромагнитная сила и сила трения поршня о стенки канала.

Уравнение движения газа в адиабатической постановке выглядит следующим образом:

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\text{grad } p, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho v) = 0, \quad \frac{p}{\rho^\gamma} = \text{const}, \quad (2)$$

где ρ , v , p – плотность, скорость движения, давление газа соответственно; γ – показатель адиабаты.

Введем величины

$$\left. \begin{aligned} P_- &= P_-^o + p_-, \quad F_1 = F_1^o + f_1, \quad u = u^o + \frac{d\vartheta}{dt}; \\ P_+ &= P_+^o + p_+, \quad F_2 = F_2^o + f_2, \quad u = u^o + \frac{\partial \theta}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где здесь и далее верхний индекс « o » обозначает установившиеся значения, вторые слагаемые – возмущения. $\vartheta(t)$ – смещение поршня в подвижной системе координат Xuz , жестко связанной с поршнем, относительно его равновесного положения в установившемся движении (рис. 2). $\theta(t, X)$ – среднее (направленное) смещение молекул газа в подвижной системе координат Xuz .

Предполагаем, что движение газа одномерно, $v = e_x u_x$, из-за незначительности вклада, вносимого акустическим давлением p_-, p_+ . По этой же причине далее не учитывается и изменение величины q .

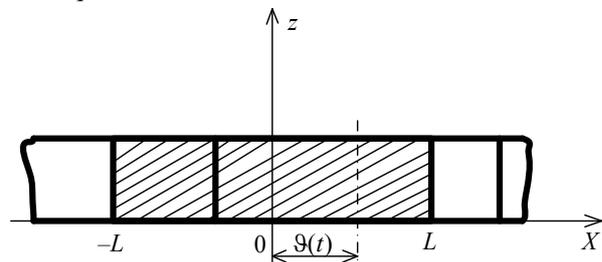


Рис. 2

Уравнение возмущенного движения получим, внося (3) в (1) и (2)

$$M \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = (p_- - p_+)q - f_1 - f_2; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - a_0 \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} = 0, \quad (5)$$

где $a_0 = \sqrt{\gamma RT}$ – скорость звука; $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$ – адиабатическая постоянная; C_p – молярная теплоемкость при постоянном давлении; C_V – молярная теплоемкость при постоянном объеме $p_- = -\gamma P_-^\circ \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{-L}$, $p_+ = -\gamma P_+^\circ \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{+L}$.

Выполним оценку отдельных величин, входящих в (4). Для определения возмущения электромагнитной силы f_1 рассмотрим уравнения электродинамики системы (рис. 1) при малых скольжениях потоков относительно внешнего магнитного поля. Под скольжением понимается

$$s = \frac{\alpha}{\omega} \frac{d\vartheta}{dt},$$

где $\alpha = \frac{\pi}{\tau}$; ω – круговая частота статорного напряжения.

Заменим систему из двух поршневых потоков (рис. 1) однокомпонентным потоком с электропроводностью σ током j_v :

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 \sin \frac{2\pi z}{h} \cos(\alpha x), \quad j_v = j_1 \cos(\alpha x),$$

$$\sigma_0 = \frac{\delta}{h} \sigma_{\Pi}, \quad \sigma_1 = \frac{c_1}{\pi} \left(\cos \frac{2\pi \Delta}{h} + \cos \frac{\pi \Delta}{h} \right), \quad j_1 = \frac{\delta}{h} c_1 j_{\Pi},$$

где σ_{Π} – электропроводность поршня; j_{Π} – плотность тока в поршне, обусловленная внешним источником; c_1 – коэффициент при первом члене ряда Фурье для кривой электропроводности; z и x – вертикальная и продольная оси соответственно.

Уравнения электродинамики можно записать следующим образом:

$$\Delta A - \mu_0 \sigma \frac{\partial A}{\partial t} = -\mu_0 j_v;$$

$$\left. \frac{\partial A}{\partial z} \right|_{\pm h/2} = \pm F_{m1} \sin(\omega st + \alpha x - \varphi_1) \pm \pm F_{m2} \sin(\alpha x - \varphi_2),$$

$$F_{m1} = \frac{3}{2} \mu_0 w I_1, \quad F_{m2} = \frac{3}{2} \mu_0 w I_2, \quad w = \frac{2w_{\Phi}}{\tau};$$

$$-U_m \exp(-j^\circ \omega st) = \frac{\partial \psi}{\partial t} + L_s \frac{\partial i}{\partial t} + j^\circ \omega (\psi + L_s i),$$

$$\psi = -j^\circ p w l \int_{-\tau}^{\tau} \left[A \left(\frac{h}{2} \right) + A \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \exp(j^\circ \alpha x) dx,$$

где A – y -компонента векторного потенциала; μ_0 – магнитная проницаемость вакуума; w_{Φ} – число витков в фазе статорной обмотки; p – число волн поля статора на длине канала; U_m – амплитуда статорного напряжения, I_1 и I_2 составляющие тока статора, обусловленные напряжением $-U_m \exp(-j^\circ \omega st)$ и током в жидкости соответственно; φ_1 и φ_2 – фазовые углы величин I_1 и I_2 , при $t = 0$, L_s – индуктивность рассеяния статорной обмотки; j° – мнимая единица.

Положим

$$A = s - \frac{2 \operatorname{ch}^{1/2}(\lambda h)}{\lambda \operatorname{sh}(\lambda h)} \operatorname{ch}(\lambda z) F_{m1} \exp[-j^\circ (\omega st + \alpha x - \varphi_1)] +$$

$$+ \frac{\mu_0 j_1}{\alpha^2} \exp\left[j^\circ \left(\frac{\pi}{2} - \alpha x \right) \right] -$$

$$- \frac{2 \operatorname{ch}^{1/2}(\alpha h)}{\alpha \operatorname{sh}(\alpha h)} \operatorname{ch}(\alpha z) F_{m2} \exp[-j^\circ (\alpha x - \varphi_2)],$$

$$\lambda = r + j^\circ v = \alpha \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(1 + (\epsilon s)^2 \right)^{1/2} + 1 \right] \right\}^{1/2} -$$

$$- j^\circ \alpha \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(1 + (\epsilon s)^2 \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{1/2}. \quad (6)$$

Тогда

$$\Delta s - \mu_0 \sigma \frac{\partial s}{\partial t} = f(t, x, z);$$

$$f(t, x, z) = j^\circ \omega s \mu_0 (\sigma - \sigma_0) \frac{2 \operatorname{ch}^{1/2}(\lambda h)}{\lambda \operatorname{sh}(\lambda h)} \times$$

$$\times \operatorname{ch}(\lambda z) F_{m1} \exp[-j^\circ (\omega st + \alpha x - \varphi_1)];$$

$$\frac{\partial s}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = \pm \frac{1}{2} h. \quad (7)$$

Величина S по t и x удовлетворяет условию периодичности, поэтому, имея в виду (7) и структуру $f(t, x, z)$, положим

$$s = \sum_0^m a_{m0} \cos \frac{2m\pi z}{h} + \sum_0^{m,n} \cos \frac{2m\pi z}{h} \times$$

$$\times [b_{mn} \cos(\omega st + n\alpha x) + c_{mn} \sin(\omega st + n\alpha x)], \quad (8)$$

где a_{m0} , b_{mn} , c_{mn} – комплексные числа. Выражение (8) удовлетворяет условию полноты, и поэтому в среднем должно сходиться.

Используя метод Галеркина [3], можно видеть, что

$$\int_{0-\tau-h/2}^{\zeta} \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-h/2}^{h/2} f(t, x, z) \varphi dt dx dz = 0,$$

где $\zeta = \frac{2\pi}{\omega S}$; φ – любая из координатных функций из (8). Таким образом, для коэффициентов a_{m0} , b_{mn} , c_{mn} получим систему однородных алгебраических уравнений, в связи с чем эти коэффициенты будут равны нулю. Следовательно, $S = 0$.

Фактическая величина векторного потенциала дается мнимой частью (6), т. е. она равна

$$A = F_{m1} [a(z) \sin(\omega st - \alpha x - \varphi_1) - b(z) \cos(\omega st - \alpha x - \varphi_1)] + \frac{2 \operatorname{ch}^{1/2}(\alpha h)}{\alpha \operatorname{sh}(\alpha h)} \operatorname{ch}(\alpha z) F_{m2} \sin(\alpha x - \varphi_2) + \frac{\mu_0 j_1}{\alpha^2} \cos(\alpha x),$$

где

$$a(z) = q_1 \cos(vz) \operatorname{ch}(rz) - q_2 \sin(vz) \operatorname{sh}(rz),$$

$$q_1 + j q_2 = \frac{2 \operatorname{ch}^{1/2}(\lambda h)}{\lambda \operatorname{sh}(\lambda h)},$$

$$b(z) = q_1 \sin(vz) \operatorname{sh}(rz) + q_2 \cos(vz) \operatorname{ch}(rz).$$

Будем считать, что $(\varepsilon S)^2 \ll 1$, $h \ll \tau$. Тогда получим

$$I_1 = \frac{U_m}{x_d}; \quad I_2 = \frac{2pw\tau\omega}{\alpha^2 x_d} j_1; \quad \varphi_1 = -\delta_c,$$

где δ_c – угол мощности,

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2}; \quad x_d = \omega L_s + \frac{3 \cdot 2f}{p} l (2w_\Phi)^2 \mu_0 \frac{1 + \operatorname{ch}(\alpha h)}{\operatorname{sh}(\alpha h)}.$$

Электромагнитную силу, действующую на поршень, определим следующим образом:

$$F_1 = \langle f \rangle 2Ll\delta, \quad \langle f \rangle = \frac{1}{2\tau h} \int_{-\tau}^{\tau} \int_{-h/2}^{h/2} j B_z dx dz,$$

$$j = \sigma_0 \frac{\partial A}{\partial t} - j_v, \quad B_z = \frac{\partial A}{\partial x},$$

где $\langle f \rangle$ – среднее значение плотности электромагнитной силы.

Имеем

$$F_1 = F_m \sin \delta_c + C\vartheta + D \frac{d\vartheta}{dt},$$

$$F_m = 3\mu_0 \frac{j_1 U_m}{\pi x_d} \frac{2w_\Phi}{p} \frac{\delta}{h} Ll,$$

$$C = F_m \alpha \cos \delta_c,$$

$$D = \left(3w_\Phi \frac{U_m}{x_d} \right)^2 \frac{\mu_0 \varepsilon \alpha}{\omega(\tau p)^2} \frac{1 + \operatorname{ch}(\alpha h)}{\operatorname{sh}(\alpha h)} \frac{\delta}{h} 2Ll. \quad (9)$$

В (9) первый член соответствует установившемуся режиму. Таким образом, возмущение электромагнитной силы равно

$$f_1 = C\vartheta + D \frac{d\vartheta}{dt}. \quad (10)$$

Сила трения о стенки канала

$$F_1 = \zeta \frac{\rho u^2}{2} \frac{L}{h} q,$$

где ζ – коэффициент трения, определяемый по известным формулам в зависимости от числа Рейнольдса.

Отсюда для возмущения силы трения получим

$$f_2 = \chi \frac{d\vartheta}{dt}, \quad \chi = \zeta \rho u^2 \frac{L}{h} q. \quad (11)$$

Для формулирования (4) необходимо определить возмущения p_- и p_+ , которые зависят от возмущенного движения газа. Для этого рассмотрим (5).

Из решений, удовлетворяющих (5), выберем решение, совпадающее с решением (4) при $X = \mp L$. Учитывая (10) и (11), допустим, что оно при мгновенных возмущениях имеет или периодический, или аperiodический характер. Тогда решение (5) запишем в одном из следующих видов:

$$\theta_i = \theta_{1i} + \theta_{2i} = f_{1i} (a_0 t - X - L_i) \times \exp \left[\frac{k}{a_0} (a_0 t - X - L_i) \right] +$$

$$+ f_{2i} (a_0 t - X - L_i) \exp \left[\frac{k}{a_0} (a_0 t - X - L_i) \right], \quad (12)$$

$$i = -, +; \quad L_- = -L_+ = L;$$

$$\theta_i = \theta_{1i} + \theta_{2i} = A_{1i} \exp \left[\frac{k_1}{a_0} (a_0 t - X - L_i) \right] +$$

$$+ A_{2i} \exp \left[\frac{k_2}{a_0} (a_0 t - X - L_i) \right] \quad (13)$$

где $A_{1i} = \text{const}$; $A_{2i} = \text{const}$; k , k_1 и k_2 – произвольные постоянные.

Нижние индексы «-» и «+» обозначают области, находящиеся слева и справа от поршня.

Из (12) следует:

$$\left. \frac{\partial \theta_{2i}}{\partial X} \right|_{-L_i} = \lambda_i \left. \frac{\partial \theta_{1i}}{\partial X} \right|_{-L_i},$$

и далее

$$\left. \frac{\partial \theta_i}{\partial X} \right|_{-L_i} = \frac{1 + \lambda_i}{(1 - \lambda_i)a_0} \left. \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right|_{-L_i},$$

где $\lambda_i = \text{const}$ и в общем случае $\lambda_- \neq \lambda_+$. Так как

$$\theta_i|_{-L_i} = \vartheta,$$

где ϑ – смещение поршня, то получим

$$\begin{aligned} (p_- - p_+)q &= R \frac{d\vartheta}{dt}, \\ R &= \left(\frac{1 + \lambda_-}{1 - \lambda_-} P_-^\circ - \frac{1 + \lambda_+}{1 - \lambda_+} P_+^\circ \right) \frac{\gamma}{a_0} q. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, (4) можно записать как

$$M \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} - D_3 \frac{d\vartheta}{dt} + C\vartheta = 0, \quad (15)$$

где $D_3 = R - D - \chi$.

Отсюда получим

$$\gamma^1 = \frac{D_3}{2M}, \quad \omega = \sqrt{\frac{4MC - D_3^2}{2M}}, \quad 4MC > D_3^2. \quad (16)$$

Здесь γ^1 и ω – инкремент и частота колебаний поршня при кратковременных возмущениях.

В (14) величина λ_i есть отношение амплитуд левобегущей и правобегущей волн на краях поршня. Следовательно, величина λ_i зависит от возмущенного движения ближайших соседних поршней. Возможны два сценария: соседние поршни неподвижны и соседние поршни совершают синхронное с рассматриваемым движение, но их амплитуда – другая. Первый случай интереса не вызывает, поэтому рассмотрим второй, для которого из условий согласования колебаний соседних поршней со звуковым колебанием газа найдем

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \\ &= \frac{\beta_i^2 - 1}{\exp\left(\pm 2\gamma^1 \frac{l_i}{a_0}\right) - 2\beta_i \cos(\omega l_i)/a_0 \exp\left(\pm \gamma^1 \frac{l_i}{a_0}\right) + \beta_i^2}, \end{aligned}$$

$$\beta_i \operatorname{ch} \frac{\gamma^1 l_i}{a_0} - \cos \frac{\omega l_i}{a_0} = 0, \quad (17)$$

где β_i – отношение амплитуд соседних поршней к амплитуде среднего поршня, верхний знак – для случая $i = +$, а нижний – для $i = -$.

Следовательно, при известных расстояниях l_- и l_+ между поршнями (рис. 1) с помощью (14), (16) и (17) можно рассчитать все требуемые величины, связанные с колебательными переходами поршня под действием кратковременных возмущений. Расчеты по (14), (16) и (17) свидетельствуют о незначительности вклада акустического давления $R \frac{d\vartheta}{dt}$. Так, например, при $D_3 = 2 \cdot 10^3 \text{ Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2}$, $C = 3.98 \cdot 10^5 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2}$, $M = 91 \text{ кг}$, $P_-^\circ = 250 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$, $P_+^\circ = 238 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$, $a_0 = 440 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $l_- = l_+ = 0.75 \text{ м}$, $q = 0.0375 \text{ м}^2$ имеем $R = 40 \text{ кг} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-1}$. Следовательно, акустическое давление играет второстепенную роль.

Если $D_3^2 > 4MC$, возможны аperiodические переходы (13) рассматриваемого поршня. Соседние поршни будут также совершать аperiodические переходы, при этом величина R определится следующим образом:

$$R = \left(P_-^\circ - P_+^\circ \right) \frac{\gamma}{a_0} q.$$

Оценка показывает, что роль величины R в данном случае будет более заметной, чем при колебаниях поршней.

Следует отметить, что постоянно действующие возмущения не учтены в (15).

Поршни в потоке связаны друг с другом газовыми слоями между ними (акустическое давление на поршни) и электромагнитным взаимодействием.

Акустическое давление зависит от статических давлений P_-° и P_+° , действующих на поршни в установившемся движении потока, а в случае колебательных переходов – и от расстояний l_- и l_+ между поршнями. По условиям обеспечения нормальной работы устройства канал слегка расширяется вдоль длины, поэтому в процессе движения поршня по каналу указанные величины постоянно меняются. Однако это изменение не может быть стационарно. Последнее связано с тем, что размер поршней вдоль x все же значите-

лен (порядка длины полуволны поля статора), а время пребывания поршня на канале малó (порядка сотен долей секунды) и может быть меньше времени релаксации механических переходных процессов (для приведенных ранее числовых значений это время составляет порядка 0.1 с). Следовательно, изменение статического давления газа, связанное с полезной работой поршня, также должно сопровождаться образованием акустических волн и давлений. Ясно, что это давление будет носить характер постоянно действующих возмущений и будет функцией t , $\vartheta u \frac{d\vartheta}{dt}$.

Поле взаимоиндукции поршней связано с размерами поршней и расстояниями между ними. При движении поршня по каналу из-за расширения последнего отмеченные величины непрерывно изменяются, а следовательно, меняется и поле взаимоиндукции. Более того, на изменения этого поля и поля самоиндукции поршня влияет ограниченность длины канала. Как результат, в коллективе сил, воздействующих на поршень, дополнительно появляются постоянно действующие электромагнитные возмущения, зависящие от t , $\vartheta u \frac{d\vartheta}{dt}$.

Чтобы учесть постоянно действующие акустические и электромагнитные возмущения, нужно ввести член $f\left(t, \vartheta, \frac{d\vartheta}{dt}\right)$ в (15) и записать

$$M \frac{d^2\vartheta}{dt^2} - D_3 \frac{d\vartheta}{dt} + C\vartheta = f\left(t, \vartheta, \frac{d\vartheta}{dt}\right). \quad (18)$$

Невозможность аналитического описания функции $f\left(t, \vartheta, \frac{d\vartheta}{dt}\right)$ не должна смущать, так как в дальнейшем достаточно знать лишь верхние пределы этой функции. При таком условии (18) выполняется для любого поршня, что дает право называть его уравнением возмущенного движения жидкометаллического поршневого потока.

Устойчивость движения поршневого потока. Представим (18) нормальной системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_1(t, y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} &= a_{21}y_1, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{d\vartheta}{dt}, y_2 = \vartheta, a_{11} = \frac{D_3}{M}, \\ a_{12} &= -\frac{C}{M}, a_{21} = 1, f_1 = \frac{f}{M}. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (19) при $f_1 = 0$ определяются невозмущенное ($y_1 = y_2 = 0$) и возмущенное (обусловленное действием мгновенных возмущений при $t = 0$), движения. Если $f_1 \neq 0$, эта же система при ненулевых начальных условиях описывает возмущенное движение при действии мгновенных и постоянно действующих возмущений.

С помощью второго метода Ляпунова определим критерий устойчивости движения ($y_1 = y_2 = 0$) на отрезке времени $[0, T]$ (T – время пребывания поршня в канале) относительно величин

$$\{\bar{y}_{10}, \bar{y}_{20}\}, \bar{f}_1(t), \{\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t)\}, \quad (21)$$

которые служат верхними границами модулей начальных возмущений, возмущающей силы и последующих возмущений соответственно [4]–[6].

В этом случае для определения достаточных критериев устойчивости необходимо оценить сверху интеграл Коши уравнений (19), для чего требуется построить положительно определенную функцию Ляпунова V от y_1, y_2 . Эту функцию вместе с (19) необходимо исследовать.

Предположим, что

$$\begin{aligned} V &= A \exp \gamma(t) = \\ &= (A_{11}y_1^2 + A_{22}y_2^2 + 2A_{12}y_1y_2) \exp \gamma(t), \\ A_{12} &= A_{21}, \end{aligned}$$

где $\gamma(t)$ – некоторая функция, положительная и вещественная на отрезке $[0, T]$. Величины A_{11}, A_{12}, A_{22} удовлетворяют следующему уравнению:

$$\begin{aligned} (a_{11}y_1 + a_{12}y_2) \frac{\partial V}{\partial y_1} + a_{21}y_1 \frac{\partial V}{\partial y_2} = \\ = (u_1y_1^2 + u_2y_2^2) \exp \gamma(t), \end{aligned}$$

где u_1 и u_2 – произвольные отрицательные временные функции.

Допуская, что $u_1 = -\frac{a_{21}}{a_{12}}u_2$, определим

$$A_{11} = -\frac{a_{21}u_2}{a_{11}a_{12}}, \quad A_{12} = \frac{u_2}{2a_{12}},$$

$$A_{22} = \left(\frac{1}{a_{11}} - \frac{a_{11}}{2a_{12}a_{21}} \right) u_2.$$

Для того чтобы V была положительно определенной функцией, при $u_2 < 0$ достаточно выполнения условий Гурвица:

$$-a_{12}a_{21} > 0, \quad -a_{11} > 0.$$

Первое неравенство, в соответствии с (20) сводящееся к $C > 0$, выполняется автоматически, а второе неравенство приводится к

$$D_3 < 0. \quad (22)$$

Согласно уравнениям (19), полная производная функции Ляпунова V при $f_1 = 0$ равна

$$\begin{aligned} V &= B \exp \gamma(t) = \\ &= (B_{11}y_1^2 + B_{22}y_2^2 + 2B_{12}y_1y_2) \exp \gamma(t), \end{aligned} \quad (23)$$

$$B_{12} = B_{21},$$

где

$$B_{11} = \dot{\gamma}A_{11} - \frac{a_{21}}{a_{12}}u_2, \quad (24)$$

$$B_{22} = \dot{\gamma}A_{22} + u_2, \quad B_{12} = \dot{\gamma}A_{12}.$$

При получении (23) и (24) было сделано предположение, что $u_2 = \text{const}$. Чтобы производная функции Ляпунова V была отрицательно определенной функцией, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$B_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix} > 0.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \frac{|D_3|}{M} &> \dot{\gamma} > 0, \\ \left(1 - \frac{M\dot{\gamma}}{|D_3|} \right)^2 - \frac{|D_3|\dot{\gamma}}{2C} \left(1 - \frac{M\dot{\gamma}}{2|D_3|} \right) &> 0. \end{aligned} \quad (25)$$

При выполнении условий (22) и (25) оценки $X_k(0, t, \bar{y}_0)$ сверху модуля интеграла Коши $|y_k(t)|$ уравнений (19) при $f_1 = 0$

$$|y_k(t)| \leq X_k(0, t, \bar{y}_0) \leq \bar{y}_k(t), \quad k = 1, 2, \quad (26)$$

где $y_k(t) \bar{y}_k(t)$ – интегралы Коши при начальных условиях $y_0, \bar{y}_0, y_0 < \bar{y}_0$, соответственно, можно получить по выражению [6]

$$X_k = \left[A(\bar{y}_0) \frac{M_k}{A_n} \right]^{1/2} \exp \varphi(t, 0), \quad k = 1, 2, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} A(\bar{y}_0) &= A_{11}\bar{y}_{10}^2 + A_{22}\bar{y}_{20}^2 + 2A_{12}\bar{y}_{10}\bar{y}_{20}, \\ A_n &= A_{11}A_{22} - A_{12}^2, \quad M_1 = A_{22}, \quad M_2 = A_{11}, \\ \varphi(t, 0) &= \frac{1}{2} [\gamma(0) - \gamma(t)]. \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом получим

$$\begin{aligned} X_1 &= \left[\left(\bar{y}_{10}^2 + \Delta_1 \bar{y}_{20}^2 + \frac{|D_3|}{M} \bar{y}_{10}\bar{y}_{20} \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right]^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_m t \right), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} X_2 &= \left[\left(\bar{y}_{10}^2 + \Delta_1 \bar{y}_{20}^2 + \frac{|D_3|}{M} \bar{y}_{10}\bar{y}_{20} \right) \frac{1}{\Delta_2} \right]^{-1/2} \times \\ &\quad \times \exp \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_m t \right), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\Delta_1 = \frac{D_3^2}{2M^2} + \frac{C}{M}$; $\Delta_2 = \frac{D_3^2}{4M^2} + \frac{C}{M}$; $\dot{\gamma}_m$ – максимальное значение $\dot{\gamma}$ (находится из (27)).

Ранее допускалось, что $f_1 = 0$. В случае $f_1 \neq 0$, т. е. при постоянном воздействии возмущающих сил, критерии (22) и (25) остаются в силе. Однако нужно учесть вклад f_1 в выражения для оценок сверху интегралов Коши уравнений (26). Для этого требуется вместо (26) использовать

$$Y_k(0, t, \bar{y}_0) \leq \bar{y}_k(t), \quad k = 1, 2, \quad (31)$$

где $\bar{y}_k(t)$ – интеграл Коши уравнений (20) при $f_1 \neq 0$ и \bar{y}_0 . Величину Y_k можно рассчитать по формуле [7]

$$\begin{aligned} Y_k &= X_k + \sum_{l=10}^2 \int Z_k^{(l)}(t, \tau) \bar{f}_1(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \\ Z_k^{(l)}(t, \tau) &= z_k^{(l)}(t, \tau) \exp \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_m t \right) = \\ &= \left(A_{ll} \frac{M_k}{A_n} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_m t \right). \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь X_k вычисляются по выражениям (29) и (30), а M_k и A_n определяются по (28). Имеем

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + \frac{2}{\dot{\gamma}_m} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_m t\right) \right] z_1^{(1)} \bar{f}_1, \\ Y_2 &= X_2 + \frac{2}{\dot{\gamma}_m} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{2} \dot{\gamma}_m t\right) \right] z_2^{(1)} \bar{f}_1, \\ z_1^{(1)} &= \Delta_1^{1/2} \Delta_2^{-1/2}, \quad z_2^{(1)} = \Delta_2^{-1/2}. \end{aligned} \quad (33)$$

где $\bar{f}_1 = \text{const}$ – верхний предел функции

$$f\left(t, \vartheta, \frac{d\vartheta}{dt}\right).$$

Отметим, что условиями (22), (25) и (31) задаются достаточные критерии устойчивости движения поршневого потока в бегущем магнитном поле на отрезке $[0, T]$ относительно наперед заданных величин (21). Верхние оценки интегралов Коши уравнения возмущенного движения при мгновенных возмущениях и наличии постоянно действующих возмущающих сил вычисляются по формулам (29), (30) и (33). Эти формулы содержат одни и те же величины (см. (27), (32)), которыми определяется и функция Ляпунова V . Следовательно, представление о качестве данных формул и о том, настолько удачно построена функция Ляпунова V , можно получить, сравнивая результаты, вычисленные по (29) и (30), с точным решением уравнений (19) при мгновенных возмущениях.

На рис. 3 приведены результаты расчетов Y_1 , и его оценки X_k по выражению (29) при следую-

щих данных: $D_3 = 2 \cdot 10^3 \text{ Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-2}$, $C = 3.98 \cdot 10^5 \text{ Дж} \cdot \text{м}^{-2}$, $M = 91 \text{ кг}$, $P_-^0 = 250 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$, $P_+^0 = 238 \cdot 10^5 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$, $a_0 = 440 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $l_- = l_+ = 0.75 \text{ м}$, $q = 0.0375 \text{ м}^2$, $\gamma^1 = -10.34 \text{ с}^{-1}$, $\omega = 65.32 \text{ с}^{-1}$, $\dot{\gamma}_m = 18 \text{ с}^{-1}$, $\bar{y}_{10} = 220 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $\bar{y}_{20} = 0.05 \text{ м}$. Величины γ^1 и ω рассчитывались по (14), (16) и (17), а $\dot{\gamma}_m$ – из условий (21).

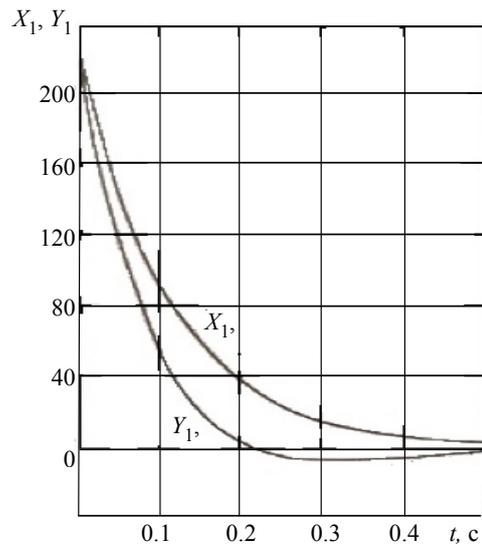


Рис. 3

Приведенное сравнение доказывает правильность полученных достаточных критериев устойчивости движения жидкометаллического поршневого потока под действием бегущего магнитного поля в синхронном МГД-генераторе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ким К. К. Групповое свойство уравнений индукции для сплошной среды с нелинейной электропроводностью МГД-генератора // Межвуз. сб. науч. тр. «Вестн. инженеров железнодорожного транспорта». Самара. 2003. С.433–443.
2. Ким К. К. Расчет мощности устройства формирования поршневых потоков жидкого металла МГД-генератора // Вестн. ПГУПС. 2003 Вып. 1. С.110–114.
3. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. М.: Наука, 1965.

4. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
5. Четаев. Н. Г. Устойчивость движения. М.: Гостехиздат, 1955.
6. Дубошин Г. П. Основы теории устойчивости движения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1952.
7. Карачаров К. А., Пилютин А. Г. Введение в техническую теорию устойчивости движения М.: Физматгиз, 1962.

K. I. Kim, K. K. Kim

Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University

THE RESEARCH OF THE STABILITY OF THE MOVEMENT OF A LIQUID METAL PISTON FLOW IN A MAGNETOHYDRODYNAMIC GENERATOR

We formulate the problem of stability of the piston flow motion under the action of a running magnetic field in an MHD generator of an electrodeless type. The piston flow consists of the liquid metal pistons (the volumes of liquid metal) that are separated from each other by volumes of gas. The scheme of the MHD generator consists of two piston flows separated from each other by a thin insulating wall. The flows are shifted relative to each other by half the wave length of the external running magnetic field created by the currents flowing through the stator windings. The direct currents flow through the pistons. These currents are directed in opposite directions in neighboring pistons. In the presence of disturbances the movement of the pistons is unstable. Using the second Lyapunov method we deduced sufficient criteria for the stability of the steady motion of a liquid-metal piston flow about the small perturbations of the distance between the pistons. The formulas for estimating the Cauchy integral of the equation of the perturbed piston motion from above are derived too.

MHD generator, liquid metal, piston flow, stability, second Lyapunov method
