

A. S. Anuchin, E. O. Stolyarov, D. M. Shpak, D. K. Surnin
National Research University «Moscow Power Engineering Institute»

G. L. Demidova
ITMO University

Rishad Ahmed
University of Nottingham

NESTED LOOP CONTROL OF A BUCK CONVERTER WITH FEEDFORWARD CORRECTION USING OUTPUT VOLTAGE SIGNAL

Buck converters are commonly used in industry, electric vehicles, and renewable energy systems. However, most papers where control algorithms for such converters are considered are devoted to low-power systems operating in intermittent current mode. They are also devoted to methods based on complex mathematical descriptions that are sensitive to changes of parameters, without taking into account current limitation and the availability of external disturbances. This paper deal with a DC buck converter cascaded control system. The idea of development control algorithm was taken from the theory of electric drives control and implemented in a power supply for auxiliary needs used in underground trains. Mathematical modelling results of the converter modes with the proposed control system taking into account various disturbances and sensors inaccuracies has been obtained.

Buck converter, nested loop control, continuous current mode, current controller, voltage controller, positive feedback

УДК 681.513.6

Ле Хонг Куанг, Путов В. В., Шелудько В. Н.
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Нелинейное робастное управление многостепенным механическим объектом с адаптивной компенсацией неизвестного возмущения

Рассматривается задача построения нелинейного робастного управления многостепенным нелинейным механическим объектом с одновременной адаптивной компенсацией неизвестного возмущения. Неизвестное возмущение полагается детерминированным и представляется как выход линейной автономной модели с неизвестными постоянными параметрами. Для решения задачи адаптивной компенсации неизвестного возмущения строится нелинейный наблюдатель возмущения, структура которого определяется видом объекта. Структура нелинейного робастного управления многостепенным механическим объектом синтезируется на основе метода обратного обхода интегратора и объединяется с алгоритмами адаптивной компенсации возмущения, построенными на основе нелинейного наблюдателя возмущения и алгоритмов адаптации с так называемой параметрической проекцией. Построенное нелинейное робастное управление с нелинейным наблюдателем и алгоритмами адаптивной компенсации возмущения исследуется с помощью программы MatLab/Simulink.

Многостепенный нелинейный механический объект с неизвестным возмущением, нелинейное робастное управление, нелинейный наблюдатель возмущения, каскадная структура, метод обратного обхода интегратора, адаптивная компенсация неизвестного возмущения, алгоритмы параметрической проекции

Задачи повышения точности адаптивных систем в условиях действия неизмеримых внешних возмущений всегда привлекали внимание исследователей, отвечая реальным потребностям по-

вышения точности управления техническими объектами, и разработка таких систем является одним из актуальных направлений исследований в этой области.

Так, широкое распространение в конце прошлого века получили методы огрубления адаптивных алгоритмов управления, обеспечивающих экспоненциальную устойчивость систем при отсутствии внешних возмущений и сохраняющих ограниченность всех сигналов при воздействии возмущений. К таковым относятся так называемые алгоритмы с σ -модификацией, а именно, с отрицательной обратной связью, с зоной нечувствительности и с переключением [1]–[3], а также адаптивные робастные алгоритмы с так называемой параметрической проекцией (parameter projection) [4], [5].

В то же время, методы огрубления не решают задачи целенаправленного повышения точности адаптивных систем, и в начале нынешнего столетия развиваются методы активной компенсации внешних возмущений [2]. К ним относится и метод внутренней модели, когда в предположении детерминированности возмущений строится генератор внешних возмущений, играющий роль встроенного в систему управления наблюдателя возмущения, обеспечивающего задачу его компенсации [2], [6]. Однако компенсация возмущений с помощью наблюдателя возможна при условии, что известны параметры модели возмущения и объекта управления, что вступает в противоречие с постановкой задачи адаптивного управления. Более естественно в постановке задач адаптивной компенсации возмущений с помощью наблюдателей предположение параметрической неопределенности как генераторов возмущений, так и самих объектов управления. Исследованию возможностей распространения методов внутренней модели на классы неопределенных генераторов возмущений и управляемых объектов посвящены [7], [8].

В статье рассматриваются вопросы применения изложенных в [7], [8] методов построения нелинейных наблюдателей возмущений к задаче построения управления многостепенным нелинейным механическим объектом с возмущением, при этом к построению нелинейной робастной системы управления динамикой лагранжевой модели механического объекта, представленной

двухкаскадной структурой, привлекается метод обратного обхода интегратора [2], [8]–[11], а адаптивные робастные алгоритмы компенсации возмущений реализуются на базе алгоритмов с параметрической проекцией [4].

Нелинейный наблюдатель детерминированных внешних возмущений. Будем рассматривать многостепенный нелинейный механический объект, описываемый векторно-матричным уравнением Лагранжа вида

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{q} \in R^n$ – вектор обобщенных координат; $\dot{\mathbf{q}} \in R^n$ – вектор обобщенных скоростей; $\boldsymbol{\tau} \in R^n$ – вектор управляющих входов (сил, моментов); $M(\mathbf{q}) \in R^{n \times n}$ – функциональная матрица инерции, неособенная, симметричная и положительно определенная для всех \mathbf{q} ; $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \in R^{n \times n}$ – функциональная матрица кориолисовых и центробежных сил, зависящих от скоростей; $\mathbf{D}(\mathbf{q}) \in R^n$ – вектор-функция гравитационных сил; $\mathbf{d}(t) \in R^n$ – вектор неизвестных ограниченных внешних возмущений; n – число степеней подвижности объекта.

Пусть детерминированная модель неизвестного возмущения \mathbf{d} рассматривается как вектор, компонентами которого являются ограниченные периодические функции, что наиболее распространено на практике:

$$\mathbf{d}_i(t) = \sum_{j=1}^k b_{i,j} \sin(\omega_{i,j}t + \phi_{i,j}),$$

являющиеся каждая суммой k гармоник с неизвестными частотами $\omega_{i,j}$, амплитудами $b_{i,j}$ и начальными фазами $\phi_{i,j}$. Здесь и далее символы j, i означают номера гармоники $j = \overline{1, k}$ и степени $i = \overline{1, n}$ соответственно.

Следуя [7], [8], будем считать, что возмущение \mathbf{d} представимо в виде выхода линейного конечномерного генератора

$$\dot{\boldsymbol{\chi}} = S\boldsymbol{\chi}; \quad (2)$$

$$\mathbf{d} = V\boldsymbol{\chi}, \quad (3)$$

где $\boldsymbol{\chi} \in R^m$ – вектор состояния генератора; $m = 2nk$; $S \in R^{m \times m}$, $V \in R^{n \times m}$ – матрицы неизвестных коэффициентов, причем матрица S имеет все

собственные значения, лежащие на мнимой оси; пара (S, V) полностью наблюдаема.

Согласно [7], [8], вектор неизвестного возмущения \mathbf{d} , описываемый уравнениями (2), (3), может быть сформирован как выход так называемой канонической формы представления генератора (2), (3), удобной для применения в синтезе искомого наблюдателя неизвестного возмущения [7]:

$$\dot{\zeta} = G\zeta + N\mathbf{d}, \quad (4)$$

$$\mathbf{d} = \Theta^T \zeta. \quad (5)$$

Здесь $G, N \in R^{m \times m}$ – произвольные матрицы, причем G – гурвицева, т. е. квадратная, матрица, все собственные значения которой имеют отрицательные вещественные части; $\Theta \in R^{m \times n}$ – неизвестная матрица постоянных коэффициентов; вектор-регрессор $\zeta \in R^m$ (вектор состояния канонической формы) (4), (5) связан с вектором состояния $\chi \in R^m$ исходной модели (2), (3) соотношением подобия $\zeta = F\chi$, $F \in R^{m \times m}$ – невырожденная матрица, являющаяся единственным решением матричного уравнения

$$FS - GF = NV, \quad (6)$$

где G, N – полностью управляемая пара; $\Theta = (VF^{-1})^T$.

Как отмечается в [7], [8], в канонической форме генератора возмущений (4), (5) матрицы G, N выбираются произвольно, что сводит неопределенность возмущения $\mathbf{d}(t)$ к неопределенности матрицы постоянных параметров Θ , зависящей через матрицу F от неизвестных матриц S и V (см. (6)). Поскольку (4) нерешимо в силу неизвестности вектора \mathbf{d} , то уравнения (4), (5) являются виртуальным наблюдателем возмущения.

Реальный нелинейный наблюдатель для неопределенного регрессора ζ строится с учетом уравнений объекта (1) следующим образом [7], [12]:

$$\dot{\hat{\zeta}} = \boldsymbol{\eta} + NM(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\eta}} = G\boldsymbol{\eta} + GNM(\mathbf{q})\mathbf{q} - \dot{N}M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \\ + N[C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) - \boldsymbol{\tau}], \end{aligned} \quad (8)$$

где $\hat{\zeta}$ – оценка вектора ζ , а $\boldsymbol{\eta}$ – вспомогательный вектор, генерируемый динамическим фильтром (8).

Тогда неизвестный вектор возмущения \mathbf{d} может быть представлен в виде [7]

$$\mathbf{d} = \Theta^T \hat{\zeta} + \boldsymbol{\varepsilon}_d, \quad (9)$$

где оценка $\hat{\zeta}$ вырабатывается наблюдателем (7), (8); $\boldsymbol{\varepsilon}_d$ – экспоненциально затухающий вектор ошибки. Действительно, введем в рассмотрение вектор ошибки оценки состояния ζ генератора (7), (8) вида

$$\tilde{\zeta} = \zeta - \hat{\zeta}. \quad (10)$$

Подставляя $\zeta = \hat{\zeta} + \tilde{\zeta}$ в (5) и учитывая (9), получаем $\boldsymbol{\varepsilon}_d = \Theta^T \tilde{\zeta}$. Дифференцируя (10) и учитывая (1), (4), (7) и (8), получим

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\zeta}} = G\tilde{\zeta} + N\mathbf{d} - \dot{\boldsymbol{\eta}} - NM(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} - \dot{N}M(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \\ = G[\zeta - \boldsymbol{\eta} - NM(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}] = G(\zeta - \hat{\zeta}), \end{aligned} \quad (11)$$

откуда в силу гурвицевости матрицы G следует сходимость $\tilde{\zeta} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Отметим, что в рамках рассматриваемой задачи матрицы генератора V и S неизвестны, и поэтому матрица Θ также неизвестна. Таким образом, неопределенность внешнего возмущения \mathbf{d} сведена к неопределенности матрицы постоянных параметров Θ параметризованной модели возмущения (4), (5). Линейная регрессионная модель вида (4), (5) с неизвестной матрицей постоянных коэффициентов Θ широко распространена в задачах адаптивной идентификации и адаптивного управления, поэтому для компенсации возмущения, представленного в виде (4), (5), могут быть применены известные методы адаптивного управления [2], [9].

Нелинейное робастное управление с адаптивной компенсацией возмущения. Преобразуем уравнение Лагранжа (1) к форме Коши. Пусть $\mathbf{x}_1 = \mathbf{q}$, $\mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}$, тогда система дифференциальных уравнений объекта (1) может быть приведена к каскадной форме следующего вида:

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{x}_2, \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = M^{-1}(-C\mathbf{x}_2 - \mathbf{D}) + M^{-1}\boldsymbol{\tau} + M^{-1}\mathbf{d}, \quad (13)$$

где $M = M(\mathbf{x}_1)$; $C = C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$; $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{x}_1)$; $\mathbf{d} = \Theta^T \hat{\zeta} + \Theta^T \tilde{\zeta}$.

Каскадная структура уравнений (12), (13) позволяет использовать метод обратного обхода

интегратора к построению нелинейной робастной системы управления объектом (1) с адаптивной компенсацией возмущения [2], [9]–[11].

Шаг 1. Введем новые переменные

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_d, \quad (14)$$

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}, \quad (15)$$

где \mathbf{x}_d – программный сигнал для \mathbf{x}_1 , а переменную $\boldsymbol{\alpha}$ будем рассматривать как виртуальное управление.

Дифференцируя \mathbf{z}_1 по (14) и принимая во внимание (12), (15), получим

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{z}_2 + \boldsymbol{\alpha} - \dot{\mathbf{x}}_d. \quad (16)$$

Выберем функцию Ляпунова в виде

$$V_1 = 0.5\mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_1$$

и вычислим ее производную в силу уравнения (16)

$$\dot{V}_1 = \mathbf{z}_1^T \dot{\mathbf{z}}_1 = \mathbf{z}_1^T (\mathbf{z}_2 + \boldsymbol{\alpha} - \dot{\mathbf{x}}_d). \quad (17)$$

Примем виртуальное управление $\boldsymbol{\alpha}$ в виде

$$\boldsymbol{\alpha} = -k_1 \mathbf{z}_1 + \dot{\mathbf{x}}_d, \quad (18)$$

где k_1 – положительно определенная симметричная матрица.

Подставляя $\boldsymbol{\alpha}$ в производную (17), получим производную \dot{V}_1 в виде

$$\dot{V}_1 = -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2, \quad (19)$$

где слагаемое $\mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2$ в (19) будет скомпенсировано на следующих шагах процедуры синтеза.

Уравнение (16), учитывая $\boldsymbol{\alpha}$ по (18), запишем в виде

$$\dot{\mathbf{z}}_1 = -k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2.$$

Шаг 2. Дифференцируя \mathbf{z}_2 по (15) и подставляя производную $\dot{\mathbf{x}}_2$ из (13), а также принимая во внимание (9) и то, что $\boldsymbol{\varepsilon}_d = \Theta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}}$, получим

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}_2 &= M^{-1} [-C\mathbf{x}_2 - \mathbf{D} + \boldsymbol{\tau} + \mathbf{d} - M\dot{\boldsymbol{\alpha}}] = \\ &= M^{-1} [-C\mathbf{x}_2 - \mathbf{D} + \boldsymbol{\tau} + \Theta^T \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \Theta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - M\dot{\boldsymbol{\alpha}}]. \end{aligned} \quad (20)$$

Рассмотрим на этом завершающем шаге функцию Ляпунова вида

$$V_2 = V_1 + 0.5\mathbf{z}_2^T M \mathbf{z}_2.$$

Вычислим полную производную функции \dot{V}_2 в силу уравнения ошибки (20) и, учитывая (19), получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \mathbf{z}_2^T M \dot{\mathbf{z}}_2 + 0.5\mathbf{z}_2^T \dot{M} \mathbf{z}_2 = \\ &= -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^T [-C\mathbf{x}_2 - \mathbf{D} + \boldsymbol{\tau} + \Theta^T \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \\ &\quad + \Theta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - M\dot{\boldsymbol{\alpha}}] + 0.5\mathbf{z}_2^T \dot{M} \mathbf{z}_2 = \\ &= -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 + 0.5\mathbf{z}_2^T [-2C + \dot{M}] \mathbf{z}_2 + \\ &\quad + \mathbf{z}_2^T [-C\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{D} + \boldsymbol{\tau} + \Theta^T \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \Theta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - M\dot{\boldsymbol{\alpha}}] = \\ &= -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^T \times \\ &\quad \times [-C\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{D} + \boldsymbol{\tau} + \Theta^T \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \Theta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - M\dot{\boldsymbol{\alpha}}]. \end{aligned} \quad (21)$$

Известно, что $\dot{M} - 2C$ – кососимметрическая матрица, поэтому имеет место тождество $0.5\mathbf{z}_2^T (\dot{M} - 2C) \mathbf{z}_2 = 0$ для любого вектора \mathbf{z}_2 . Закон нелинейного робастного управления, объединенный с адаптивной компенсацией возмущения, может быть представлен в соответствии с (21) в виде

$$\boldsymbol{\tau} = -\mathbf{z}_1 - k_2 \mathbf{z}_2 + M\dot{\boldsymbol{\alpha}} + C\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{D} - \hat{\Theta}^T \hat{\boldsymbol{\zeta}}, \quad (22)$$

где k_2 – положительно определенная симметричная матрица; матрица $\hat{\Theta} = [\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i]$ со столбцами $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$, $i = \overline{1, n}$, – настраиваемая матрица-оценка неизвестной матрицы Θ , а производная $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ заменяется ее аналитическим выражением $\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -k_1(\mathbf{x}_2 - \dot{\mathbf{x}}_d) + \ddot{\mathbf{x}}_d$.

Рассмотрим следующие адаптивные робастные алгоритмы с так называемой параметрической проекцией (parameter projection) для настройки столбцов матрицы $\hat{\Theta}$ [4], [5]:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}}_i = \Gamma_i \text{Proj}(-z_{2,i} \hat{\boldsymbol{\zeta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i), \quad i = \overline{1, n}, \quad (23)$$

где $\Gamma_i = \Gamma_i^T \in R^{m \times m}$, $i = \overline{1, n}$, – симметричные положительно определенные матрицы; $z_{2,i}$ – i -й элемент вектора \mathbf{z}_2 ; $\text{Proj}(-z_{2,i} \hat{\boldsymbol{\zeta}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}_i)$ – проекционные операторы (projection operator) для столбцов $\hat{\boldsymbol{\theta}}_i$ матрицы-оценки $\hat{\Theta}$, которые задаются следующим образом [4], [5]. Введем (для иллюстрации) некоторые векторы \mathbf{w} и $\boldsymbol{\theta}$, и пусть вектор коэффициентов $\boldsymbol{\theta}$ принадлежит компактному выпуклому множеству $\Omega := \{\boldsymbol{\theta} : \|\boldsymbol{\theta}\| \leq \theta_0\}$, где θ_0 – известная положительная константа. Тогда проекционный оператор определяется как

$$\text{Proj}(\mathbf{w}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{cases} \mathbf{w}, & \text{если } p(\hat{\boldsymbol{\theta}}) < 0; \\ \mathbf{w}, & \text{если } p(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \geq 0 \text{ и } \nabla p(\hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{w} \leq 0; \\ \left[I - \frac{p(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \nabla p(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \nabla p(\hat{\boldsymbol{\theta}})^T}{\|\nabla p(\hat{\boldsymbol{\theta}})\|^2} \right] \mathbf{w}, & \\ \text{если } p(\hat{\boldsymbol{\theta}}) \geq 0 \text{ и } \nabla p(\hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{w} > 0, \end{cases}$$

где I – единичная матрица; $p(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ – выпуклая непрерывно дифференцируемая функция вида

$$p(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \frac{\|\hat{\boldsymbol{\theta}}\|^2 - \theta_0^2}{\varepsilon_p^2 + 2\varepsilon_p \theta_0};$$

ε_p – произвольная положительная константа; $\nabla p(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ – градиент функции p по $\hat{\boldsymbol{\theta}}$; $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Воспользуемся также следующим свойством проекционного оператора [5]:

$$-\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T (\text{Proj}(\mathbf{w}, \hat{\boldsymbol{\theta}})) \leq -\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \mathbf{w}, \quad (24)$$

где $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} - \hat{\boldsymbol{\theta}}$ – ошибка оценки вектора $\boldsymbol{\theta}$. Выберем определенно положительную функцию Ляпунова в виде

$$V_{2a} = V_2 + 0.5 \sum_{i=1}^3 \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i + \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T Q \tilde{\boldsymbol{\zeta}},$$

где $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_i = \boldsymbol{\theta}_i - \hat{\boldsymbol{\theta}}_i$, $i = \overline{1, n}$ и положительно определенная матрица $Q = Q^T \in R^{m \times m}$ является решением следующего матричного уравнения:

$$G^T Q + QG = -\Theta \Theta^T. \quad (25)$$

Вычисляя производную $\dot{V}_{2a}(t)$ с учетом (21), (22), (24), получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2a} &= -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^T \times \\ &\times [-C\boldsymbol{\alpha} - \mathbf{D} + \boldsymbol{\tau} + \Theta^T \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \Theta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - M\dot{\boldsymbol{a}}] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i + \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T Q \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}^T Q \tilde{\boldsymbol{\zeta}} = \\ &= -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_2^T [-\mathbf{z}_1 - \hat{\Theta}^T \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \Theta^m \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \Theta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}}] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\tilde{\boldsymbol{\theta}}}_i + \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T Q \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}^T Q \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \leq \\ &\leq -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^T k_2 \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_2^T \tilde{\Theta}^T \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \mathbf{z}_2^T \Theta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \mathbf{z}_{2,i} \tilde{\boldsymbol{\theta}}_i^T \hat{\boldsymbol{\zeta}} + \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T Q \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}^T Q \tilde{\boldsymbol{\zeta}}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\tilde{\Theta} = \Theta - \hat{\Theta}$. Используя неравенство Юнга [13], имеем

$$\mathbf{z}_2^T \Theta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} \leq 0.25 \mathbf{z}_2^T \mathbf{z}_2 + \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T (\Theta \Theta^T) \tilde{\boldsymbol{\zeta}}. \quad (27)$$

Из (11) и (25) получим

$$\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T Q \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\zeta}}}^T Q \tilde{\boldsymbol{\zeta}} = \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T G^T Q \tilde{\boldsymbol{\zeta}} + \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T Q G \tilde{\boldsymbol{\zeta}} = -\tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T (\Theta \Theta^T) \tilde{\boldsymbol{\zeta}}. \quad (28)$$

Подставляя (27) и (28) в (26), получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2a} &\leq -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^T k_2 \mathbf{z}_2 + 0.25 \mathbf{z}_2^T \mathbf{z}_2 + \\ &+ \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T \Theta \Theta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} - \tilde{\boldsymbol{\zeta}}^T \Theta \Theta^T \tilde{\boldsymbol{\zeta}} = -\mathbf{z}_1^T k_1 \mathbf{z}_1 - \\ &- \mathbf{z}_2^T (k_2 - 0.25 I_{n \times n}) \mathbf{z}_2 \leq -\mu (\|\mathbf{z}_1\|^2 + \|\mathbf{z}_2\|^2), \end{aligned}$$

где $\mu = \min\{\lambda_{\min}(k_1), \lambda_{\min}(k_2 - 0.25 I_{n \times n})\}$, $\lambda_{\min}(\cdot)$ – минимальное собственное значение матрицы (\cdot) , а расчетная матрица k_2 должна удовлетворять $k_2 \geq 0.25 I_{n \times n}$.

Закон нелинейного робастного управления, объединенный с адаптивной компенсацией неизвестного возмущения (22), и алгоритмы адаптации с параметрической проекцией (23) обеспечивают неположительность (знакоотрицательность) производной \dot{V}_2 (т. е. отрицательную определенность ее по части переменных $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ и неположительность по всем переменным $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \tilde{\Theta}, \tilde{\boldsymbol{\zeta}}$) положительно определенной функции Ляпунова $V_{2a} = V_{2a}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \tilde{\Theta}, \tilde{\boldsymbol{\zeta}})$, что гарантирует ограниченность указанных переменных. Согласно известной теореме Ж. Ла-Салля [2] о сходимости к наибольшему инвариантному множеству решений, определяемых нулями производной $\dot{V}_{2a}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\zeta}})$, будут иметь место предельные соотношения $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_d) = 0$ и

$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{z}_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{x}_2 - \boldsymbol{\alpha}) = 0$. Можно также показать,

что, в силу замены переменных (14), (15), гладкости $\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\alpha}$, а также ограниченности переменных $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \tilde{\Theta}, \tilde{\boldsymbol{\zeta}}$, переменные $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ будут также предельно ограничены. То же можно утверждать и о нелинейном наблюдателе возмущения (7), (8). Далее, вследствие того что функция Ляпунова V_{2a} удовлетворяет неравенствам, характерным для квадратичных форм, сходимость переменных к инвариантному множеству глобальная и носит экспоненциальный характер [2]. При этом сходимость всех переходных процессов будет быстрее, чем убывание (или возрастание) функций $\exp(-0.5\mu t)$ или $(1 - \exp(-0.5\mu t))$.

В заключение сведем воедино результаты синтеза, а именно, нелинейный робастный закон управления объектом (1), объединенный с адаптивной коррекцией возмущения $\mathbf{d}(t)$ (22), адаптивный робастный алгоритм настройки с параметрической проекцией (23) и нелинейный наблюдатель возмущения (7), (8):

$$\begin{cases} \tau = -z_1 - k_2 z_2 + M(\mathbf{x}_1) \dot{\mathbf{a}} + \\ + C(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mathbf{a} + \mathbf{D}(\mathbf{x}_1) - \hat{\Theta}^T \hat{\zeta}, \\ \hat{\Theta} = [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_i]; \quad \dot{\hat{\theta}}_i = \\ = \Gamma_i \text{Proj}(z_{2,i} \hat{\zeta}, \hat{\theta}_i), \quad i = \overline{1, n}; \\ \hat{\zeta} = \eta + NM(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}; \\ \dot{\eta} = G\eta + HNM(\mathbf{q})\mathbf{q} - NM(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \\ + N[C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}(\mathbf{q}) - \tau]; \\ \mathbf{z}_1 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_d; \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{x}_2 - \dot{\mathbf{a}}; \\ \mathbf{a} = -k_1 \mathbf{z}_1 + \dot{\mathbf{x}}_d; \\ \dot{\mathbf{a}} = -k_1(\mathbf{x}_2 - \dot{\mathbf{x}}_d) + \ddot{\mathbf{x}}_d; \\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{q}; \quad \mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{q}}. \end{cases}$$

Пример. Компьютерное исследование нелинейного робастного управления трехзвенным механическим манипулятором с адаптивной компенсацией возмущения. Рассмотрим в качестве механического объекта трехзвенный манипулятор (рис. 1), на котором приведены также обозначения расчетных геометрических размеров и точечных масс звеньев.

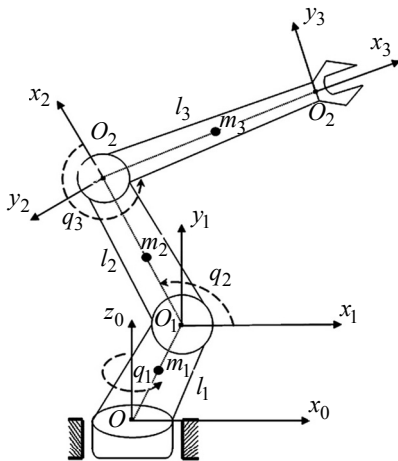


Рис. 1

Матрицы M , C и вектор \mathbf{D} уравнения Лагранжа (1) имеют следующее строение:

$$M(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{22} & M_{23} \\ 0 & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix};$$

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix}.$$

Пусть $a_1 = (m_1/12 + m_2/4 + m_3/4)l_1^2$; $a_2 = (m_2/6 + m_3/2)l_2^2$; $a_3 = (m_3/6)l_3^2$; $a_4 = (m_3/4)l_1 l_3$; $a_6 = (m_3/4)l_2 l_3$; $a_5 = (m_2/4 + m_3/2)l_1 l_2$; $a_7 = (m_3 + m_2/2)l_2 g$; $a_8 = (m_3/2)l_3 g$; $q_4 = 2q_2$; $q_5 = q_2 + q_3$; $q_6 = 2q_2 + q_3$; $q_7 = 2q_2 + 2q_3$; $c_i = \cos(q_i)$, $s_i = \sin(q_i)$, $i = \overline{1, 7}$.

С помощью программы Mathcad15 получены следующие расчетные соотношения элементов функциональных матриц M , C и вектора \mathbf{D} :

$$\begin{aligned} M_{11} &= a_1 + a_2 + a_3 + a_2 c_4 + a_3 c_7 + \\ &+ 2a_4 c_5 + 2a_5 c_2 + 2a_6 c_3 + 2a_6 c_6; \\ M_{22} &= 2a_2 + 2a_3 + 4a_6 c_3; \quad M_{33} = 2a_3; \\ M_{23} &= M_{32} = 2a_3 + 2a_6 c_3; \\ C_{12} &= -a_3 s_7 \dot{q}_1 - a_2 s_4 \dot{q}_1 - \\ &- a_4 s_5 \dot{q}_1 - a_5 s_2 \dot{q}_1 - 2a_6 s_6 \dot{q}_1; \\ C_{22} &= -2a_6 s_3 \dot{q}_3; \\ C_{11} &= -a_3 s_7 \dot{q}_2 - a_2 s_4 \dot{q}_2 - a_4 s_5 \dot{q}_2 - \\ &- a_5 s_2 \dot{q}_2 - 2a_6 s_6 \dot{q}_2 - a_3 s_7 \dot{q}_3 - \\ &- a_4 s_5 \dot{q}_3 - a_6 s_3 \dot{q}_3 - a_6 s_6 \dot{q}_3; \\ C_{21} &= -C_{12}; \\ C_{13} &= -a_3 s_7 \dot{q}_1 - a_4 s_5 \dot{q}_1 - a_6 s_3 \dot{q}_1 - a_6 s_6 \dot{q}_1; \\ C_{23} &= -2a_6 s_3 (\dot{q}_2 + \dot{q}_3); \quad C_{31} = -C_{13}; \\ C_{32} &= 2a_6 s_3 \dot{q}_2; \\ D_1 &= 0; \quad D_2 = a_7 c_2 + a_8 c_5; \quad D_3 = a_8 c_5. \end{aligned}$$

$$\mathbf{q} = [q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T.$$

Компьютерное исследование работоспособности нелинейного робастного управления и алгоритмов адаптивной компенсации возмущения. Компьютерные исследования нелинейной взаимосвязанной модели трехзвенного манипулятора (см. рис. 1) проводились со следующими числовыми параметрами его сочленений: $m_1 = 6$ кг; $m_2 = 5$ кг; $m_3 = 5$ кг; $g = 9.8$; $l_1 = 0.35$ м; $l_2 = 0.5$ м; $l_3 = 0.5$ м.

Параметры матриц нелинейного робастного закона и алгоритмов адаптивной компенсации

вида $k_1 = k_1^T \in R^{3 \times 3}$, $k_2 = k_2^T \in R^{3 \times 3}$, $\Gamma_i = \Gamma_i^T \in R^{12 \times 12}$ ($i = \overline{1,3}$), $\hat{\Theta} = [\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3] \in R^{12 \times 3}$, $\hat{\theta}_i = [\hat{\theta}_{1,i}, \hat{\theta}_{2,i}, \dots, \hat{\theta}_{12,i}]^T \in R^{12}$ ($i = \overline{1,3}$) – i -й столбец-вектор и $\hat{\xi} \in R^{12}$, $\eta \in R^{12}$, $G \in R^{12 \times 12}$, $N \in R^{12 \times 3}$ задавались следующие:

– параметры адаптивной компенсации возмущения с проекционными алгоритмами:

$$N = [1 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0; 0 \ 1 \ 0; 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 1];$$

$$G = 10^{-6} \text{diag}(-2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2, -2);$$

$$\Gamma_1 = 0.1I_{12 \times 12}; \Gamma_2 = 0.2I_{12 \times 12}; \Gamma_3 = 0.3I_{12 \times 12};$$

– параметры проекционных операторов для $i = \overline{1,3}$: $\varepsilon_{p_1} = \varepsilon_{p_2} = \varepsilon_{p_3} = 0.1$; $\theta_{01} = \theta_{02} = \theta_{03} = 30$;

– параметры линейных обратных связей: $k_1 = \text{diag}(4, 4, 4)$, $k_2 = \text{diag}(25, 25, 25)$.

Результаты моделирования представлены на рис. 2–5.

Вариант 1 моделирования. На рис. 2 сплошными линиями показаны программные $q_{id}(t)$, а штриховыми – реальные $q_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ траектории (сверху вниз) первого, второго и третьего звеньев манипулятора в переходных процессах по управлению и обработке приложенных к звеньям реальных возмущений $d_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ (рис. 3).

На рис. 3 показаны сплошными линиями реальные возмущения $d_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, приложенные (сверху вниз) к первому, второму и третьему звеньям манипулятора, а штриховыми – оценки $\hat{\theta}_i^T \hat{\xi}$, $i = 1, 2, 3$ реальных возмущений в переходных процессах адаптивной компенсации реальных возмущений.

Программные траектории $q_{id}(t)$, $i = 1, 2, 3$ (рис. 2) и реальные возмущения $d_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ (рис. 3) построены по следующим соотношениям соответственно:

– программные траектории манипулятора – по соотношениям вида

$$q_d = \begin{bmatrix} q_{1d} \\ q_{2d} \\ q_{3d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sin(7\pi t) \\ 1 + \sin(8\pi t) \\ 1 + \sin(9\pi t) \end{bmatrix};$$

– внешние возмущения – по соотношениям вида

$$d(t) = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 4 \sin(14\pi t) + 4 \sin(15\pi t) \\ 4 + 4 \sin(16\pi t) + 4 \sin(18\pi t - \pi/2) \\ 3 + 3 \sin(15\pi t - \pi/2) + 3 \sin(19\pi t) \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Вариант 2 моделирования. На рис. 4 и 5 показаны те же процессы, что и на рис. 2 и 3, но при программных траекториях, построенных по соотношениям в виде единичных скачков

$$q_d = \begin{bmatrix} q_{1d} \\ q_{2d} \\ q_{3d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1(t) \\ 1(t) \\ 1(t) \end{bmatrix},$$

и при возмущениях, построенных по соотношениям

$$d(t) = \begin{bmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{bmatrix} = 2 \times \begin{bmatrix} 4 + 4 \sin(14\pi t) + 4 \sin(15\pi t) \\ 4 + 4 \sin(16\pi t) + 4 \sin(18\pi t - \pi/2) \\ 3 + 3 \sin(15\pi t - \pi/2) + 3 \sin(19\pi t) \end{bmatrix}$$

с амплитудами, увеличенными в 2 раза по сравнению с амплитудами в соотношениях (29) в варианте 1.

Из рис. 2 видно, что возмущенные положения звеньев робота-манипулятора q_1, q_2, q_3 отслеживают программные траектории со скоростью сходимости большей, чем убывание экспоненты $\exp\left(-\frac{1}{0.033}t\right)$, и время сходимости в пятипроцентную «трубку» составляет ≤ 0.10 с. Из рис. 3

видно, что адаптивный наблюдатель возмущения вырабатывает оценки неизвестных возмущений со скоростью сходимости большей, чем убывание

экспоненты $\exp\left(-\frac{1}{0.033}t\right)$, и время компенсации

неизвестного возмущения до пятипроцентной

ошибки составляет ≤ 0.1 с. Из рис. 4 видно, что реальные траектории $q_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ звеньев ма-

нипулятора отслеживают скачкообразные программные траектории $q_{id}(t)$, $i = 1, 2, 3$ со скоростью сходимости большей, чем убывание экспоненты $\exp\left(-\frac{t}{0.04}\right)$, и время сходимости в пяти-

процентную трубку составляет ≤ 0.12 с.

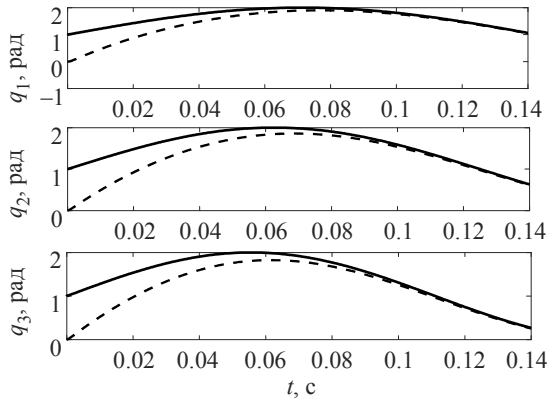


Рис. 2

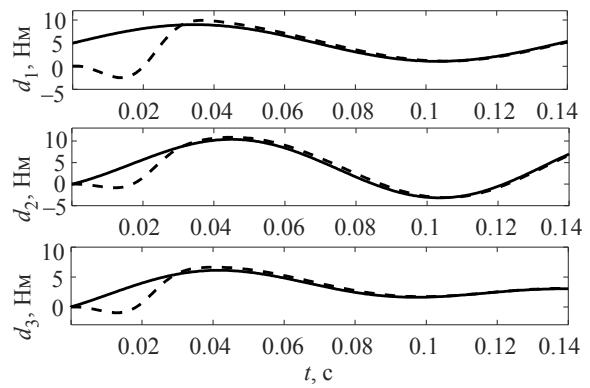


Рис. 3

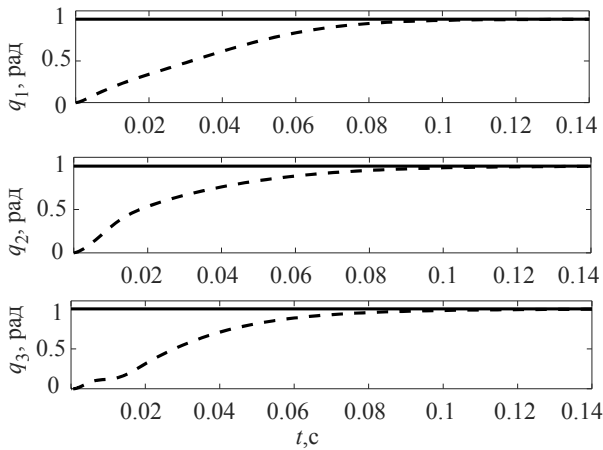


Рис. 4

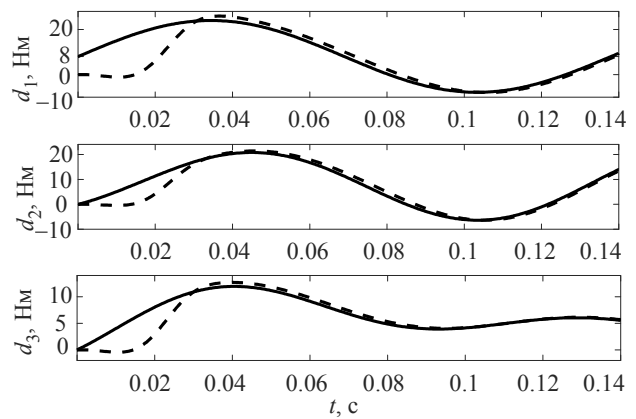


Рис. 5

Из рис. 5 видно, что блок адаптивной компенсации реальных возмущений с нелинейным наблюдателем вырабатывает оценки $\theta_i^T \hat{\xi}$ неизвестных возмущений со скоростью сходимости большей, чем убывание экспоненты $\exp\left(-\frac{t}{0.047}\right)$, и время адаптивной компенсации неизвестного возмущения до пятипроцентной ошибки составляет ≤ 0.14 с. Таким образом, при двукратном изменении амплитуд возмущения не только не нарушается работоспособность, но и сохраняются быстродействие и точность построенной нелинейной робастной системы с адаптивной компенсацией возмущений.

Заключение.

1. В статье решена задача построения нелинейной робастной системы управления с адаптивной компенсацией неизвестного возмущения для класса многостепенных нелинейных механических объектов.

2. В качестве детерминированной модели неизвестного возмущения принята наиболее распространенная на практике модель в виде n -мер-

ного вектора, компонентами которого являются конечные суммы ограниченных гармоник с неизвестными частотами, амплитудами и начальными фазами (n – число степеней подвижности объекта) и который, следуя методу, изложенному в [7], [8], представлен как выход канонической формы, на основе которой построена линейно параметризованная модель неизвестного возмущения с неизвестной матрицей постоянных параметров и неизвестным регрессором.

3. Центральными результатами, полученными в статье, являются результаты синтеза, выполненного во взаимосвязи с выбранным классом нелинейных лагранжевых объектов, а именно:

– синтез по методу, изложенному в [7], [8], нелинейного наблюдателя для недоступного регрессора, построенного с учетом уравнений Лагранжа объекта (1);

– синтез нелинейного робастного управления, объединенного с блоком адаптивной компенсации неизвестного возмущения, построенного методом обратного обхода интегратора для лагранжева объекта (1), приведенного к каскадному виду;

– синтез алгоритмов адаптивной компенсации методом так называемой параметрической проекции.

4. Результаты моделирования, выполненного на примере трехзвенного манипулятора, подтверждают работоспособность и эффективность по-

строенного нелинейного робастного управления многостепенным нелинейным механическим объектом с адаптивной компенсацией неизвестного детерминированного возмущения в условиях неконтролируемого изменения параметров детерминированного возмущения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nikiforov V. O. Adaptive nonlinear servocompensation of unknown extremal disturbance // 14th IFAC World Congress. Beijing, China, 1999. Vol. I. P. 283–289.
2. Fradkov A. L., Miroshnik I. V., Nikiforov V. O. Non-linear and adaptive control of complex systems. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher, 1999.
3. Iuannon P. A., Kokotovic P. V. Instability analysis and improvement of robustness of adaptive control // Automatica. 1984. Vol. 20, № 5. P. 583–594.
4. Ikhouane F. I., Krstic V. Adaptive backstepping with parameter projection: robustness and performance // Automatica. 1998. Vol. 34, № 4. P. 429–435.
5. Cai Z., De Queiroz M. S., Dawson D. M. A sufficiently smooth projection operator // IEEE. Transaction Automatic Control. 2006. Vol. 51, № 1. P. 135–139.
6. Мирошник И. В., Никифоров В. О. Синтез линейных систем автоматического управления // СПб.: Изд-во СПбГУИТМО, 2000.
7. Никифоров В. О. Наблюдатели внешних детерминированных возмущений I. Объекты с известными параметрами // Автоматика и телемеханика. 2004. № 10. С. 13–24.

8. Никифоров В. О. Наблюдатели внешних детерминированных возмущений II. Объекты с неизвестными параметрами // Автоматика и телемеханика. 2004. № 11. С.40–48.
9. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V. Non-linear and Adaptive Control Design. New York: John Wiley and Sons, 1995.
10. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V. Adaptive nonlinear control without overparametrization // Systems and Control Letters. 1992. Vol. 19. P. 177–185.
11. Исследования адаптивных следящих систем управления четырехзвенным манипуляционным роботом / В. В. Путов, В. Н. Шелудько, Нгуен Дык Фу, Чу Чонг Шы // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2019. № 12. С. 19–26.
12. Ле Хонг Куанг, Путов В. В., Шелудько В. Н. Робастное управление многостепенным механическим объектом с адаптивной компенсацией возмущения // XXIII Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям. СПб.: СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2020.
13. Tolsted E. An elementary derivation of the Cauchy, Holder, and Minkowski inequalities from Young's inequality // Mathematics Magazine. Vol. 37, № 1, 1964. С. 2–12.

Le Hong Quang, V. V. Putov, V. N. Sheludko
Saint Petersburg Electrotechnical University

NONLINEAR ROBUST CONTROL OF A MULTI-STAGE MECHANICAL PLANT WITH ADAPTIVE COMPENSATION FOR AN UNKNOWN DISTURBANCE

The article considers the problem of constructing a nonlinear robust control for a multi-stage nonlinear mechanical object with simultaneous adaptive compensation of an unknown disturbance. An unknown disturbance is assumed to be deterministic and is presented as the output of a linear autonomous model with unknown constant parameters. To solve the problem of adaptive compensation of an unknown disturbance, a nonlinear observer of an unknown disturbance is constructed, the structure of which is determined by the type of object. The structure of nonlinear robust control of a multi-stage mechanical object is synthesized on the basis of the integrator backtracking method and is combined with algorithms for adaptive compensation of disturbances built on the basis of a nonlinear observer of disturbances and adaptation algorithms with the so-called parametric projection. The study of the constructed nonlinear robust control with a nonlinear observer and algorithms for adaptive compensation of disturbances is carried out using the MatLab/Simulink program.

Multi-stage plant with unknown disturbance, nonlinear robust control, nonlinear disturbance observer, cascade structure, integrator backtracking method, adaptive compensation of unknown disturbance, parametric projection algorithms