

УДК 519.7

Д. А. Еременко

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Алгебры унарных операций ранга 3

Рассмотрено нахождение всех алгебр унарных операций ранга 3. Данный вопрос является актуальным, так как алгебры операций и мультиопераций используются в теории синтеза дискретных преобразователей информации. Представлен новый метод описания алгебр операций через мультиоперации с помощью тождества полуперестановочности и связи Галуа. Приведены определения операций, мультиопераций, суперпозиции операций и мультиопераций, тождества полуперестановочности, алгебры операций и мультиопераций. Описано нахождение алгебр унарных операций ранга 3 с помощью тождества полуперестановочности и связи Галуа. Нахождение алгебр унарных операций ранга 3 было реализовано на языке Python. Результат, полученный с помощью метода описания алгебр операций через мультиоперации, совпал с уже имеющимися результатами, представленными в работе Лай Д. «Функциональные алгебры на конечных множествах». В результате с помощью связи Галуа были описаны все алгебры унарных операций ранга 3 через бинарные мультиоперации.

Мультиоперации, тождество полуперестановочности, операции, алгебры унарных операций

Основные понятия. Алгебры операций и мультиопераций являются традиционными объектами для теории представлений классических абстрактных алгебр, например моноидов, групп, колец, и в то же время любой реальный дискретный преобразователь информации моделируется алгебрами операций (мультиопераций) конечной размерности на конечных множествах. При этом теория алгебр мультиопераций является новой веткой в теории алгебр операций.

Отображение из A^n в A называется n -местной операцией на A . Множество всех n -местных операций на A обозначим через P_A^n . Операции $f \in P_A^n$ на конечном множестве $A = \{a_0 \dots a_{k-1}\}$ можно представлять как отображения $f: \{2^0, \dots, 2^{k-1}\}^n \rightarrow \{0, 1, \dots, 2^{k-1}\}$, получаемые из f при кодировке $a^i \rightarrow 2^i$. При этом операцию f задаем векторной формой $\{a_0 \dots a_{k-1}\}$, где $a_i \in \{0, 1, \dots, 2^{k-1}\}$ и $a_i = f(2^{i_1}, \dots, 2^{i_n})$, а $i_1, \dots, i_n$ есть представление $i-1$ в системе исчисления по основанию k n -разрядным числом.

n -местная операция проектирования по аргументу $i: e_i^n(a_1, \dots, a_n)$.

Суперпозиция операций:

$$\begin{aligned} f \in P_A^n \text{ и } f_1, \dots, f_n \in P_A^m : \\ (ff_1, \dots, f_n)(a_1, \dots, a_m) = \\ = f(f_1(a_1, \dots, a_m), \dots, f_n(a_1, \dots, a_m)). \end{aligned}$$

Алгеброй n -местных операций над множеством A называют любое подмножество $K \subseteq P_A^n$, содержащее все n -местные операции проектирования и замкнутое относительно суперпозиций.

Отображение из A^n в 2^A называется n -местной мультиоперацией на A . Множество всех n -местных мультиопераций на A обозначим через M_A^n .

Операции $g \in M_A^n$ на конечном множестве $A = \{a_0 \dots a_{k-1}\}$ зададим в векторной форме по аналогии с операциями.

Суперпозиция мультиопераций $g \in M_A^n$ и $g_1, \dots, g_n \in M_A^m$:

$$(gg_1, \dots, g_n)(a_1, \dots, a_m) = \bigcup_{b_i \in g_i(a_1, \dots, a_m)} g(b_1, \dots, b_n).$$

Связь Галуа между операциями и мультиоперациями и тождество полуперестановочности для $f \in P_A^n$, $g \in M_A^n$ (общий вид):

$$\begin{aligned} f(ge_1^{nm}, \dots, e_m^{nm}), \dots, (ge_{(n-1)m+1}^{nm}, \dots, e_{nm}^{nm}) \subseteq \\ \subseteq g(fe_1^{nm}, \dots, e_{m+1}^{nm}, \dots, e_{(n-1)m+1}^{nm}), \dots, (fe_m^{nm}, \dots, e_{nm}^{nm}), \end{aligned}$$

f стабильна относительно g , g нормальна относительно f .

Пусть $g \in M_A$ и $f \in P_A$.

$S(g) = \{f \mid f \in P_A \text{ и } f \text{ стабильна относительно } g\}$ – стабилизатор g ;

$N(f) = \{g \mid g \in M_A \text{ и } g \text{ стабильна относительно } f\}$ – нормализатор f .

Пусть $R \subseteq M_A$ и $K \subseteq P_A$.

$S(R) = \bigcap_{g \in R} S(g)$ – стабилизатор множества

мультиопераций R ;

$N(K) = \bigcap_{f \in K} N(f)$ – нормализатор множества

операций K .

Алгебраические замыкания совпадают с замыканиями Галуа.

$$[K] = S(N(K)), \langle R \rangle = N(S(R)).$$

Таким образом, алгебраическое замыкание операции можно получить через тождество полуперестановочности для операций и мультиопераций [1].

Тождество полуперестановочности для $f \in P_A^1$, $g \in M_A^2$ (для унарных операций и бинарных мультиопераций):

$$f(g(e_1, e_2)) \subseteq g(f(e_1), f(e_2)).$$

Нахождение алгебр унарных операций ранга 3. Для нахождения алгебр унарных операций необходимо получить все различные алгебраические замыкания унарных операций. Замыкания алгебраических операций можно получить двумя способами: через суперпозицию операций и через связь Галуа и тождество полуперестановочности (так как алгебраические замыкания совпадают с замыканиями Галуа [1], [2]). Алгебры унарных операций ранга 3 были получены «напрямую» через суперпозицию операций в работе [3], их количество 699. В описываемой работе для нахождения алгебры унарных операций ранга 3 используется второй способ – через связь Галуа и тождество полуперестановочности.

Для получения алгебраических замыканий унарных операций ранга 3 были рассмотрены унарные и бинарные мультиоперации. Получить все 699 алгебр унарных операций удалось при использовании бинарных мультиопераций.

Таким образом, можно утверждать, что бинарные мультиоперации описывают все алгебры унарных операций.

Подробнее рассмотрим способ получения алгебр унарных операций ранга 3 через бинарные мультиоперации ранга 3.

Количество алгебр операций совпадает с количеством различных стабилизаторов мультиопераций

$$[K] = S(N(K)).$$

Отсюда следует, что для нахождения количества алгебр достаточно найти все возможные различные стабилизаторы множеств бинарных мультиопераций ранга 3.

Найдем все возможные различные стабилизаторы множеств бинарных мультиопераций ранга 3.

1. Рассмотрим случай, когда в множество мультиопераций R входит только одна мультиоперация, т. е. найдем стабилизаторы для каждой бинарной мультиоперации ранга 3:

$$S_i(g_i), g_i \in M_A^2.$$

Всего различных $S_i(g_i)$ найдено 699.

2. Рассмотрим случай, когда в множество мультиопераций R входят две мультиоперации. Иными словами, найдем стабилизаторы для каждой пары бинарных мультиоперации ранга 3:

$$g_i, g_j \in M_A^2.$$

$S(g_i, g_j) = S(g_i) \cap S(g_j)$ – стабилизатор пары мультиопераций g_i, g_j .

В результате пересечения новые стабилизаторы не были найдены:

$$S(g_i, g_j) = S(g_x).$$

Соответственно, дальнейшее рассмотрение множеств мультиопераций, состоящих из большего количества мультиопераций, не имеет смысла, так как их пересечения не дадут новых стабилизаторов:

$$\begin{aligned} S(g_i, g_j, g_k) &= S(g_i) \cap S(g_j) \cap S(g_k) = \\ &= S(g_i, g_j) \cap S(g_k) = S(g_x) \cap S(g_k) = S(g_y). \end{aligned}$$

В результате было получено 699 различных стабилизаторов множеств бинарных мультиопераций ранга 3. Следовательно, алгебр унарных операций ранга 3 тоже 699, и они совпадают со стабилизаторами.

Реализация на Python. Чтобы найти стабилизаторы бинарных мультиопераций ранга 3, нужно найти для каждой мультиоперации все полуперестановочные унарные операции ранга 3. Для этого используется функция `def isGalua(f, g)`,

которая на вход получает мультиоперацию и операцию и возвращает 1, если данная операция полуперестановочна, и 0 в обратном случае:

```
def isGalua(f, g):
    brokek = False
    for e in all_e:
        left = uncommon_f(f, g[e[0]][e[1]])
        right = g[f[e[0]][f[e[1]]]
        if left == -1: # eq to 0
            continue
        if right == 0 and left != -1:
            brokek = True
            break
        if not left.issubset(set(format_bin(right))):
            brokek = True
            break
    return not brokek
```

Применим функцию def isGalua(f, g) для каждой мультиоперации и всех операций.

```
for g in all_binary_multioperations:
    g = splitter(g)
    row = []
    for f in all_unary_operations:
        row.append(isGalua(f, g))
```

В результате получим матрицу, строки которой будут стабилизаторами бинарных мультиопераций ранга 3 (табл. 1).

Таблица 1

$f \backslash g$	f_1	$\dots$	f_n
g_1	x		x
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
g_m	x	$\dots$	x

В ячейках проставлены 0 или 1 (1 – если операция и мультиоперация полуперестановочны, 0 – в обратном случае).

Найдем стабилизаторы для каждой пары бинарных мультиоперации ранга 3. Для этого будем попарно перемножать строки матрицы, и если получим новую, то дописываем ее в конец.

```
i = 0
while i < npresult.shape[0]:
    npmult = npresult[i:npresult.shape[0], npresult[i]]
    npresult = np.append(npresult, npmult, axis=0)
    npresult = unique_row_view(npresult)
    i += 1
```

После прохождения цикла новых строк не оказалось, значит, новых стабилизаторов, полученных пересечениями, не было найдено. В табл. 2 представлены алгебры унарных операций ранга 3, описанные через бинарные мультиоперации ранга 3.

Таблица 2

000000000	000000001	000000002	000000003	000000004	000000005
000000006	000000010	000000011	000000014	000000015	000000016
000000017	000000023	000000025	000000034	000000036	000000037
000000050	000000054	000000056	000000057	000000074	000000076
000000103	000000114	000000115	000000130	000000134	000000137
000000205	000000207	000000210	000000214	000000305	000000307
000000327	000000334	000000415	000000455	000000457	000000515
000000577	000000657	000001010	000002040	000002050	000002440
000006070	000010000	000010001	000010010	000010011	000020000
000020001	000020002	000020003	000020004	000020005	000020006
000020007	000020014	000020015	000020016	000020017	000020025
000020034	000020036	000020037	000020050	000020054	000020056
000020057	000020070	000020074	000020076	000021014	000022054
000022200	000022202	000022204	000022206	000022220	000022222
000022224	000022226	000022244	000022246	000022264	000022266
000022404	000022444	000022446	000022604	000022644	000022646
000022664	000023044	000026074	000026264	000026664	000027074
000030000	000030001	000030002	000030004	000030005	000030006
000030007	000030014	000030015	000030016	000030017	000030024
000050000	000061016	000062056	000062057	000066076	000067076
000070001	000070003	000070004	000070005	000070006	000070014
000070015	000070016	000070017	000070026	000070034	000070036
000070037	000070050	000070054	000070056	000070057	000071017
000072056	000072057	000073046	000073047	000076077	000101000
000105000	000121000	000125000	000131000	000175000	000221000
000223000	000231000	000233000	000273000	000321000	000323000
000327000	000331000	000377000	000401000	000421000	000525000
000673000	001000400	001000440	001000600	001002440	001003440
001200040	005000700	010200000	010200010	010200200	010202040

010202050	011200400	011200600	011202440	030700000	100000000
100000001	100000002	100000003	100000004	100000005	100000006
100000007	100000011	100000014	100000015	100000025	100000054
100000111	100000114	100000115	100000205	100000207	100000305
100000307	100000415	100000455	100000515	100001010	100001100
100001101	100001104	100001105	100002404	100005104	100010000
100010002	100010003	100010004	100010005	100010010	100010011
100010100	100010104	100011011	100020000	100020001	100020002
100020003	100020005	100020006	100020007	100020010	100020014
100020015	100020016	100020017	100020023	100020025	100020027
100020034	100020036	100020037	100020054	100020056	100020057
100020074	100020076	100020103	100020107	100020114	100020115
100020130	100020134	100020137	100020205	100020207	100020210
100020214	100020305	100020307	100020327	100020334	100020415
100020455	100020457	100020515	100020577	100020657	100021014
100021104	100021105	100022044	100022045	100022054	100022204
100022206	100022224	100022226	100022244	100022246	100022264
100022266	100022404	100022405	100022406	100022444	100022446
100022604	100022644	100022646	100022664	100023044	100025104
100026074	100026264	100026664	100027074	100030000	100030001
100030002	100030003	100030004	100030005	100030006	100030007
100030010	100030014	100030015	100030016	100030017	100030020
100030024	100030026	100030027	100030100	100030104	100030105
100031015	100032044	100050000	100050001	100050004	100050005
100050104	100061016	100062056	100062057	100066076	100067076
100070000	100070001	100070004	100070005	100070006	100070007
100070014	100070015	100070016	100070017	100070024	100070025
100070026	100070027	100070034	100070036	100070037	100070054
100070056	100070057	100070100	100070104	100070105	100071017
100072056	100072057	100073046	100073047	100076077	100101004
100101101	100101104	100101105	100105104	100110010	100110110
100110111	100111000	100111101	100120010	100120014	100120030
100120034	100120110	100120114	100120130	100120134	100121004
100121104	100121105	100125104	100130005	100130006	100130007
100130010	100130014	100130103	100130107	100130114	100131004
100131105	100134004	100174005	100221000	100221004	100223000
100223004	100231000	100231004	100233000	100233004	100273004
100321000	100321004	100323000	100323004	100327004	100331000
100331004	100377004	100401004	100421004	100525004	100673004
101000110	101000111	101000114	101000115	101000414	101000415
101000444	101000445	101000454	101000455	101000514	101000515
101000554	101000604	101001404	101020114	101020115	101020404
101020406	101020414	101020415	101020444	101020445	101020454
101020455	101020514	101020515	101020554	101020604	101021404
101022444	101022445	101022446	101022454	101022455	101022554
101022644	101022646	101022664	101023444	101024424	101026464
101026664	101030404	101062646	101101100	101101104	101121104
101200004	101200404	101200405	101200444	101202004	101220000
101220004	101220005	101220044	101220404	101220405	101220444
101221000	101221004	101222000	101222004	101222005	101222404
101222405	101222444	101223000	101223004	101230004	101232004
103023444	104101004	104101104	104101105	104105004	104105104
104105105	104121004	104121104	104121105	104125004	104125104
104125105	104401104	104421104	104505104	104525104	105000514
105000554	105000704	105020514	105020554	105020704	105022544
105022554	105026574	105026764	105101104	105101504	105105104
105105504	105121104	105121504	105125104	105125504	105400504
105404504	105420504	105424504	105424524	105426564	105500504
105504504	105520504	105524504	107000704	107020704	110100010
110100110	110110010	110120010	110120014	110120110	110120114
110130010	110130014	110220004	110220005	110220006	110220010

110220014	110220040	110220044	110220200	110220204	110220400
110220404	110220444	110221000	110221004	110222044	110222045
110222046	110222244	110222246	110222264	110222400	110222404
110222444	110223000	110223004	110223044	110224024	110226064
110226264	110230040	110230044	110230400	110230404	110230444
110231000	110231004	110232044	110232400	110232404	110233000
110233004	110233044	110262246	110321000	110321004	110323000
110323004	110323044	111100110	111101110	111110111	111120114
111121114	111130115	111220404	111220405	111220406	111220414
111220415	111220444	111220514	111221000	111221004	111221404
111222454	111222455	111222554	111222644	111222646	111222664
111223000	111223004	111223444	111224424	111226664	111230404
111231000	111231004	111231404	111233000	111233004	111233444
111262646	111266666	111321000	111321004	111321404	111323000
111323004	111323444	111622644	112221000	112221004	113223000
113223004	113223444	114220104	114222144	115220504	115220514
115222554	124525124	125520504	125524524	130320010	130320014
130320030	130320034	130320110	130320114	130320130	130320134
130320200	130320204	130320220	130320224	130320300	130320304
130320320	130320324	130322044	130323044	130324224	130326074
130326264	130720000	130720004	130726064	131320404	131321404
131323444	132326264	133320404	133322444	135320514	135320704
135321514	135326574	135326764	135327574	135720504	135726564
137326764	142421214	145426564	170720000	170720004	175726564
330330130	330330134	330330210	330330214	331333444	505105505
505125505	505401505	505421505	515222555	735376577	735376777
735377577	735777567	737776577	—	—	—

Всего уникальных стабилизаторов бинарных мультиопераций было найдено 699. Каждый стабилизатор описывает алгебру унарных операций ранга 3. Полученные данные согласуются с ранее

полученными результатами в [3]. Таким образом, можно сделать вывод, что бинарные мультиоперации ранга 3 описывают все алгебры унарных операций ранга 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Перязев Н. А. Клоны, ко-клоны, гиперклоны и суперклоны // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2009. Т. 151, кн. 2. С. 120–125.

2. Перязев Н. А., Шаранхаев И. К. Теория Галуа для клонов и суперклонов // Дискрет. матем. 2015. Т. 27, вып. 4. С. 79–93.

3. Lay D. Function Algebras on Finite Sets. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

D. A. Eremenko

Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

ALGEBRAS OF UNARY OPERATIONS OF RANG 3.

This work is devoted to finding all algebras of unary operations of rank 3. This question is relevant, since the algebras of operations and multioperations are used in the theory of the synthesis of discrete information converters. The paper presents a new method for describing algebras of operations through multioperations using the semipermutability identity and the Galois connection. The first section contains definitions of operations, multioperations, superposition operations and multioperations, semi-commutative identities, algebra of operations and multioperations. The second section of the paper describes the finding of algebras of unary operations of rank 3 using the semipermutability identity and the Galois connection. The search for algebras of unary operations of rank 3 was implemented in Python. The result obtained using the method of describing algebras of operations through multioperations coincided with the already available results presented in the work of Lay D. «Functional algebras on finite sets». As a result, using the Galois connection, all algebras of unary operations of rank 3 were described via binary multioperations.

Multioperations, semi-permutability identities, operations, algebras of unary operations