

УДК 681.515

Научная статья

<https://doi.org/10.32603/2071-8985-2026-19-7-45-54>

Исследование адаптивного согласованного управления мультиагентными системами

В. Сюй✉, Х. С. Г. Алмлташи

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

✉ 769059944@qq.com

Аннотация. Предложена структура адаптивного робастного граничного совместного управления для мультиагентных систем. В целях реализации совместного управления крупномасштабными системами дискретные ошибки отображаются в поле ошибок, описываемом дифференциальными уравнениями в частных производных, а для формирования сигналов граничного управления применяется метод бэкстеппинга для дифференциальных уравнений в частных производных. Сформулирован закон распределенного адаптивного робастного управления, который в сочетании с адаптивным законом с оператором проектирования обеспечивает оценку и компенсацию совокупных возмущений в режиме реального времени. Посредством построения композитного функционала Ляпунова доказывается устойчивость «вход–состояние» замкнутой системы, что гарантирует конечную равномерную ограниченность ошибки слежения и ее сходимости в настраиваемую малую окрестность. Результаты имитационного моделирования подтверждают преимущества данной структуры с точки зрения быстродействия слежения и помехоустойчивости.

Ключевые слова: мультиагентные системы, дифференциальные уравнения в частных производных, метод бэкстеппинга, адаптивное робастное управление, устойчивость «вход–состояние».

Для цитирования: Сюй В., Алмлташи Х. С. Г. Исследование адаптивного согласованного управления мультиагентными системами // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2026. Т. 19, № 7. С. 45–54. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-7-45-54.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

Study of Adaptive Coordinated Control of Multi-Agent Systems

W. Xu✉, H. S. G. Almltashi

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

✉ 769059944@qq.com

Abstract. The article proposes an adaptive robust boundary cooperative control framework for multi-agent systems. To address the cooperative control challenge in large-scale systems, discrete tracking errors are first mapped into a partial differential equation error field, enabling the generation of boundary control signals via the PDE backstepping method. On this basis, a distributed adaptive robust control law is synthesized, integrating an adaptation mechanism with a projection operator for real-time estimation and compensation of lumped disturbances. By constructing a composite Lyapunov functional, the input-to-state stability of the closed-loop system is rigorously proven, guaranteeing that tracking errors remain ultimately uniformly bounded and converge to a tunable small neighborhood. Simulation results verify the performance advantages of the proposed framework in terms of rapid tracking and robust disturbance rejection.

Keywords: multi agent systems, partial differential equations, backstepping method, adaptive robust control, input-to-state stability

For citation: Xu W., Almltashi H. S. G. Study of Adaptive Coordinated Control of Multi-Agent Systems // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2026. Vol. 19, no. 7. P. 45–54. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-7-45-54.

Conflict of interests. The authors declare no conflicts of interests.

Введение. В последние годы вопросы кооперативного управления мультиагентными системами (МАС) находят широкое применение в таких областях, как группировки беспилотных летательных аппаратов, колонны беспилотных транспортных средств и кооперативная робототехника, что делает данную тематику одним из наиболее актуальных направлений в теории управления [1], [2]. Задача кооперативного управления слежением заключается в том, чтобы множество агентов посредством локального информационного обмена осуществляли совместное слежение за траекторией лидера при одновременном сохранении заданной формации [3]. Однако наличие в реальных системах совокупных неопределенностей – аэродинамических возмущений, нелинейностей исполнительных механизмов и немоделируемой динамики, существенно ограничивает применимость алгоритмов управления формацией в реальных инженерных задачах [4], [5].

Для решения задачи подавления неопределенностей в МАС методы адаптивного и робастного управления получили широкое распространение. Адаптивное управление позволяет оценивать неизвестные параметры в режиме реального времени, однако при наличии непрерывных внешних возмущений оно склонно к возникновению дрейфа параметров [6]. Робастное управление обладает высокой робастностью к согласованным неопределенностям, но переключающие законы с высоким коэффициентом усиления часто вызывают эффект дребезга [7], [8]. Объединение данных подходов позволяет динамически регулировать переключающий коэффициент усиления онлайн-оцениванием верхней границы возмущений, что обеспечивает сохранение свойств адаптивности и робастности без необходимости априорного знания о верхних границах возмущений [9].

С другой стороны, по мере роста масштаба группировки распределенное управление, базирующееся на дискретной теории графов, демонстрирует недостаточную вычислительную и коммуникационную масштабируемость [10]. Континуальное моделирование позволяет аппроксимировать сеть дискретных агентов в виде поля

ошибок, описываемого дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП), благодаря чему вычислительная сложность алгоритмов управления не зависит от количества агентов N [11], [12]. На этом фундаменте метод бэкстеппинга для ДУЧП, обеспечивающий отображение исходной системы ДУЧП в экспоненциально устойчивую целевую систему через интегральное преобразование Вольтерры, стал одним из ключевых подходов к граничному управлению системами с распределенными параметрами [13]. В последние годы метод бэкстеппинга для ДУЧП нашел применение в задачах управления строем МАС: в [14] на основе ДУЧП предложена структура граничного управления строем МАС с цепочечной топологией; в [15] сочетание упреждающего управления на основе плоскостности и метода бэкстеппинга для ДУЧП позволило реализовать управление строем МАС с двумя степенями свободы в рамках формализма ДУЧП. Тем не менее, существующие методы управления на базе ДУЧП либо опираются на априорное знание точной микродинамики отдельных агентов, либо лишены эффективных механизмов подавления локальных высокочастотных неопределенных возмущений, что накладывает ограничения на их использование в практических приложениях.

Постановка задачи. Основываясь на результатах проведенного анализа, в данной работе предложена структура адаптивного робастного граничного согласованного управления для МАС второго порядка типа «ведущий–ведомый» при наличии неизвестных возмущений. Во-первых, сформирована двухуровневая масштабируемая архитектура управления, интегрирующая макроскопическое управление на основе бэкстеппинга для ДУЧП и микроскопическую распределенную обратную связь для реализации быстрого согласованного слежения в крупномасштабных системах. Во-вторых, разработан закон неотрицательного адаптивного робастного управления с использованием членов утечки и операторов проекции для онлайн-оценивания и компенсации совокупных возмущений, что исключает возможность возникновения дрейфа параметров. Наконец, посредством по-

строения композитного функционала Ляпунова доказано, что замкнутая система удовлетворяет условию устойчивости типа «вход-состояние», обеспечивая равномерную окончательную ограниченность ошибок слежения и их сходимость в регулируемую малую окрестность.

Описание задачи и предварительные сведения. 1. *Динамика агентов и цель построения формации.* Рассматривается крупномасштабная мультиагентная система, состоящая из одного лидера и N ведомых ($i \in \{1, \dots, N\}$). Предполагается, что коммуникационная топология имеет вид одномерного неориентированного цепочечного графа. Каждый ведомый описывается неопределенной мехатронной динамикой второго порядка. В практических задачах группового управления беспилотными летательными аппаратами $q_i, v_i, u_i \in \mathbb{R}^m$; при этом предлагаемое в работе распределенное управление реализуется независимо по осям, и все выводы выполняются покомпонентно (для краткости далее полагается $m = 1$):

$$\dot{q}_i(t) = v_i(t), \quad \dot{v}_i(t) = u_i(t) + d_i(t), \quad (1)$$

где q_i, v_i – соответственно положение и скорость; u_i – локальный управляющий вход; d_i – неизвестное внешнее сосредоточенное возмущение.

Пусть r_i обозначает требуемое смещение i -го ведомого относительно лидера в заданной формации. Введем ошибки слежения:

$$e_{1i}(t) = q_i(t) - q_0(t) - r_i, \quad e_{2i}(t) = v_i(t) - v_0(t).$$

Цель управления состоит в синтезе распределенного закона $u_i(t)$, обеспечивающего ограниченность всех сигналов замкнутой крупномасштабной системы, а также предельную равномерную ограниченность ошибок $\{e_{1i}(t), e_{2i}(t)\}$ и их сходимость в малую окрестность нуля.

Предположение (ограниченность сигналов и измеримость). Траектории лидера $q_0(t), v_0(t), \dot{v}_0(t)$ ограничены, причем ускорение $\dot{v}_0(t)$ доступно всем ведомым как глобальный сигнал прямой связи. Неизвестные возмущения $d_i(t)$ кусочно непрерывны и ограничены, т. е. существует неизвестная константа $\theta_i^* > 0$ такая, что $|d_i(t)| \leq \theta_i^*$.

2. *Континуальная аппроксимация и поле ошибок.* Для описания макроскопического коллективного поведения при $N \rightarrow \infty$ введем нормированную пространственную координату $x_i = \frac{i}{N+1}$;

$i = 1, \dots, N$; $x \in [0, 1]$, и шаг дискретизации $h = \frac{1}{N+1}$. Посредством интерполяции определим макроскопическое поле позиционной ошибки $\psi(x, t)$ по узлам сетки как $\psi(x_i, t) = e_{1i}(t)$.

В (1) система имеет временную динамику второго порядка. Для получения макроскопической диффузионной модели в виде ДУЧП первого порядка по времени вводятся разделение временных масштабов и аппроксимация с демпфированием: при синтезе микроскопического закона управления выбираются достаточно большие коэффициенты по положению и демпфирование по скорости, вследствие чего быстрые состояния, связанные со скользящей поверхностью, за малое время сходятся к квазистационарному режиму. При этом макроскопическая «медленная» динамика в основном определяется лапласовским сопряжением позиционных ошибок.

Чтобы континуальный предел не вырождался, масштаб $1/h^2$ включается в веса ребер коммуникационного графа; для цепочечной топологии ненулевые веса задаются как $a_{(i,i+1)} = 1/h^2$.

В условиях квазистационарности эволюция позиционной ошибки может быть приближенно записана в виде

$$\dot{e}_{1i} \approx \kappa v \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (e_{1j} - e_{1i}) \approx \kappa v \psi_{xx}(x_i, t),$$

где $\kappa > 0$ – коэффициент согласования, $\kappa > 0$ – коэффициент демпфирования. $\psi_{xx} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ – вто-

рая пространственная производная макроскопического поля позиционной ошибки. Введем эквивалентный коэффициент диффузии $A = \kappa v$. При $N \rightarrow \infty$ макрополе позиционной ошибки $\psi(x, t)$ эволюционирует согласно следующему диффузионному ДУЧП:

$$\psi_t(x, t) = A \psi_{xx}(x, t) + \Delta(x, t), \quad x \in (0, 1),$$

где $\Delta(x, t)$ аккумулирует ошибку континуальной аппроксимации дискретного взаимодействия, немоделируемую быструю динамику в условиях демпфирования, а также возмущения во внешнем распределенном поле.

Граничные условия зададим в виде

$$\psi(0, t) = 0, \quad \psi(1, t) = U(t),$$

где $U(t)$ – граничный согласующий сигнал, формируемый макроскопической ДУЧП.

Синтез регулятора. В работе используется регулятор двухуровневой архитектуры:

– на макроуровне реализуется глобальное граничное управление на основе ДУЧП-бэкстеппинга;

– на микроуровне применяется распределенное адаптивно-робастное управление для компенсации локальных возмущений и обеспечения согласованной диффузии.

1. *ДУЧП-бэкстеппинг граничного управления.* Рассмотрим макросистему и введем преобразование Вольтерры бэкстеппинга:

$$w(x, t) = \psi(x, t) - \int_0^x K(x, \xi) \psi(\xi, t) d\xi,$$

где ξ – переменная интегрирования бэкстеппингового преобразования Вольтерры, такое, что целевая система имеет экспоненциально устойчивую диффузионную динамику $w_t = Aw_{xx} - \lambda w$ однородными граничными условиями $w(0, t) = w(1, t) = 0$. Ядро $K(x, \xi)$ должно удовлетворять уравнению ядра:

$$AK_{xx}(x, \xi) - AK_{\xi\xi}(x, \xi) = \lambda K(x, \xi), \quad (2)$$

где w – переменная состояния целевой системы, $\lambda > 0$ – параметр экспоненциальной устойчивости.

Здесь граничные условия для ядра задаются как $K(x, 0) = 0$ и $K(x, x) = \frac{\lambda}{2A}x$. Отметим, что аналитическое выражение для $K(x, \xi)$ в общем случае получить затруднительно; однако при практической реализации $K(x, \xi)$ может быть вычислено из (2), например методом конечных разностей либо спектральными методами.

Тогда граничный согласующий сигнал может быть получен в виде

$$\begin{aligned} U(t) &= \int_0^1 K(1, \xi) \psi(\xi, t) d\xi \approx \\ &\approx h \sum_{i=1}^N K(1, x_i) e_{1i}(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Примечание. Для инъекции сформированного на макроуровне сигнала $U(t)$ в сеть ведомых в конце цепочечной топологии вводится виртуальный узел $i = N + 1$, которому принудительно задается состояние позиционной ошибки $e_{1, N+1}(t) = U(t)$, а также выбирается соответствующий вес связи $a_{N, N+1} = 1/h^2$. Благодаря

такому физически интерпретируемому эквивалентному воздействию достигается реализация

$$\text{гранично } w(x, t) = \psi(x, t) - \int_0^x K(x, \xi) \psi(\xi, t) d\xi, \text{ то}$$

для наблюдаемой ДУЧП-модели на дискретной сети условия Дирихле $\psi(1, t) = U(t)$.

Лемма (сходимость макромодел).

– Экспоненциальная устойчивость. Если $\Delta(x, t) = 0$, то при выборе $U(t)$ по (3) целевая ДУЧП-система строго экспоненциально устойчива в пространстве $L^2(0, 1)$.

– Оценка на основе «вход–состояние» устойчивости. Если распределенное возмущение ограничено и $\Delta(x, t) \neq 0$, то замкнутая ДУЧП-система обладает свойством «вход–состояние» устойчивости, и $\psi(x, t)$ в конечном итоге равномерно ограничена; при этом верхняя оценка установившейся нормы определяется величиной $\sup_{t \geq 0} \|\Delta(\cdot, t)\|_{L^2(0, 1)} < \infty$.

2. *Адаптивно-робастное локальное управление.* Для выполнения сформулированных выше предположений и подавления внешних возмущений отдельных агентов для i -го ведомого ведем составную скользящую переменную:

$$s_i(t) = ce_{1i}(t) + e_{2i}(t). \quad (4)$$

Выберем параметр $c > 0$ – коэффициент взвешивания скользящей поверхности. Тогда, дифференцируя (4), получаем $\dot{s}_i(t) = ce_{2i}(t) + u_i(t) + d_i(t) - \dot{v}_0(t)$.

Сконструируем наблюдательный адаптивный закон с нормированными весами Лапласа в виде

$$\begin{aligned} u_i(t) &= -ce_{2i}(t) + v \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (e_{1j}(t) - e_{1i}(t)) - \\ &- k_i s_i(t) - \hat{\theta}_i(t) \tanh\left(\frac{s_i(t)}{\varepsilon}\right) + \dot{v}_0(t), \end{aligned} \quad (5)$$

где $k_i > 0$; $\varepsilon > 0$ – параметр сглаженного граничного слоя, подавляющий дрожание; $\hat{\theta}_i(t)$ – динамическая оценка неизвестной верхней границы внешнего возмущения; $\mathcal{N}_i$ – множество соседей i -го ведомого в коммуникационном графе.

Чтобы приближение по разделению временных масштабов и демпфированию было корректным, параметры настройки должны удовлетворять условию $c, k_i \gg v\lambda_{\max}(L)$, где L – лапласова матрица коммуникационного графа; $\lambda_{\max}(L)$ –

ее максимальное собственное значение, что обеспечивает, что динамика подпространства s_i существенно быстрее, чем эволюция ошибки e_{1i} .

Построим неотрицательный адаптивный закон проекционного типа.

Чтобы избежать появления отрицательной оценки верхней границы возмущения в процессе адаптации и предотвратить дрейф оценки, используем оператор проекции с ограничением, и зададим закон обновления в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\theta}}_i(t) &= \text{Proj}(\gamma_i |s_i(t)| - \sigma_i \hat{\theta}_i(t)) = \\ &= \begin{cases} \max\{0, \gamma_i |s_i(t)| - \sigma_i \hat{\theta}_i(t)\}, & \hat{\theta}_i(t) = 0; \\ \gamma_i |s_i(t)| - \sigma_i \hat{\theta}_i(t), & \hat{\theta}_i(t) > 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (6)$$

где коэффициенты усиления $\gamma_i, \sigma_i > 0$ подбираются так, что при $\hat{\theta}_i(0) \geq 0$ обеспечивается $\hat{\theta}_i(t) \geq 0$ для всех $t \geq 0$.

На основе стандартного анализа по Ляпунову, с учетом сглаживающей функции $\tanh(\cdot)$ и члена утечки в адаптивном законе, замкнутая система также обладает свойством предельной равномерной ограниченности; тем самым получаемые оценки согласуются с выводами Леммы.

Анализ устойчивости. Теорема (устойчивость замкнутой системы).

Рассмотрим крупномасштабную дискретно-диффузионную мультиагентную систему (1) с заданной коммуникационной топологией. При совместном действии граничного согласующего закона (3), адаптивно-робастного локального управления (5) и неотрицательного проекционного адаптивного закона (6) для любого ограниченного распределенного возмущения $\Delta(\cdot, t)$ и внешних сосредоточенных возмущений $d_i(t)$ все сигналы замкнутой системы остаются ограниченными, а ошибки слежения всех ведомых в конечном итоге равномерно ограничены и сходятся в настраиваемую малую окрестность нуля.

Доказательство. Введем составную функцию Ляпунова следующего вида:

$$V(t) = V_w + V_s + V_\theta,$$

где энергия макроуровневого целевого ДУЧП-поля $V_w = \frac{1}{2} \int_0^1 w^2(x, t) dx$, энергия микроскопических скользящих переменных $V_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N s_i^2$, энер-

гия ошибки параметрической оценки $V_\theta =$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i^2. \text{ При этом ошибка оценки определя-$$

ется как $\tilde{\theta}_i(t) = \theta_i^* - \hat{\theta}_i(t)$.

1. *Анализ энергии макроуровневого ДУЧП-поля.* Рассмотрим целевую систему, полученную посредством преобразования бэкстеппинга, в которой возмущения входят в виде

$$w_t = Aw_{xx} - \lambda w + \Phi(x, t),$$

где $\Phi(\cdot, t)$ представляет собой эквивалентный возмущающий член, возникающий из $\Delta(\cdot, t)$ и $d_i(t)$ после преобразования Вольтерры. Дифференцируя по времени функционал энергии V_w и используя граничные условия $w(0, t) = w(1, t) = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{V}_w &= \int_0^1 w w_t dx = A \int_0^1 w w_{xx} dx - \\ &- \lambda \int_0^1 w^2 dx + \int_0^1 w \Phi dx = -A \int_0^1 w_x^2 dx - \\ &- \lambda \|w\|_{L^2}^2 + \int_0^1 w \Phi dx \leq -\lambda \|w\|_{L^2}^2 + \int_0^1 w \Phi dx. \end{aligned}$$

Применяя неравенства Коши–Шварца и Юнга и выбирая весовой множитель $\lambda/2$ для масштабирования смешанного слагаемого, имеем

$$\int_0^1 w \Phi dx \leq \|w\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2} \leq \frac{\lambda}{2} \|w\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\lambda} \|\Phi\|_{L^2}^2.$$

Подставляя это в $\dot{V}_w$ и учитывая, что $V_w = \frac{1}{2} \|w\|_{L^2}^2$, получаем следующую диссипативную оценку для макрочасти:

$$\begin{aligned} \dot{V}_w &\leq -\lambda \|w\|_{L^2}^2 + \frac{\lambda}{2} \|w\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2\lambda} \|\Phi(\cdot, t)\|_{L^2}^2 = \\ &= -\lambda V_w + \frac{1}{2\lambda} \|\Phi(\cdot, t)\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

2. *Обработка микроскопической скользящей поверхности и лапласовского сопряжения.* Из

$$\text{определения } V_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N s_i^2 \text{ получаем } \dot{V}_s = \sum_{i=1}^N s_i \dot{s}_i.$$

Подставляя локальный закон управления (5) в выражение для $\dot{V}_w$, имеем

$$\dot{V}_s = \sum_{i=1}^N \left(-k_i s_i^2 + s_i v \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (e_{1j} - e_{1i}) + s_i d_i - s_i \hat{\theta}_i \tanh\left(\frac{s_i}{\varepsilon}\right) \right)$$

Для выделения перекрестного члена лапласовского сопряжения введем векторные обозначения:

$$\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_N]^T, \mathbf{e}_1 = [e_{11}, \dots, e_{1N}]^T, \\ \mathbf{e}_2 = [e_{21}, \dots, e_{2N}]^T.$$

Поскольку $\mathbf{s} = c\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, соответствующий перекрестный член можно разложить и оценить следующим образом:

$$-\mathbf{v}\mathbf{s}^T L\mathbf{e}_1 = -\mathbf{v}(c\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)^T L\mathbf{e}_1 = -c\mathbf{v}\mathbf{e}_1^T L\mathbf{e}_1 - \mathbf{v}\mathbf{e}_2^T L\mathbf{e}_1.$$

Первый член оценивается как $-c\mathbf{v}\mathbf{e}_1^T L\mathbf{e}_1 \leq 0$. Для второго члена, используя неравенство Юнга и свойства лапласовской матрицы, введем параметр $\eta > 0$ и получим оценку:

$$|-\mathbf{v}\mathbf{e}_2^T L\mathbf{e}_1| \leq \mathbf{v}\|\mathbf{e}_2\| \|\mathbf{L}\mathbf{e}_1\| \leq \frac{\eta}{2}\|\mathbf{e}_2\|^2 + \frac{\mathbf{v}^2\lambda_{\max}^2(L)}{2\eta}\|\mathbf{e}_1\|^2.$$

Из определения скользящей переменной следует неравенство $\|\mathbf{e}_2\|^2 = \|\mathbf{s} - c\mathbf{e}_1\|^2 \leq 2\|\mathbf{s}\|^2 + 2c^2\|\mathbf{e}_1\|^2$.

Кроме того, исходя из эквивалентности норм при переходе от дискретной сети к континуальной аппроксимации, а также из ограниченности обратного преобразования Вольтерры, норма макроскопической позиционной ошибки оценивается через энергию целевого ДУЧП-поля: существует константа $C_w > 0$ такая, что $\|\mathbf{e}_1\|^2 \leq C_w \|w(\cdot, t)\|_{L^2}^2 = 2C_w V_w$.

Комбинируя приведенные оценки, получаем, что перекрестный лапласовский член может быть жестко оценен сверху величиной вида

$$-\mathbf{v}\mathbf{s}^T L\mathbf{e}_1 \leq \eta\|\mathbf{s}\|^2 + C_1 V_w - c\mathbf{v}\mathbf{e}_1^T L\mathbf{e}_1 \leq \eta\|\mathbf{s}\|^2 + C_1 V_w,$$

где $C_1 = 2C_w \left(\eta c^2 + \frac{\mathbf{v}^2\lambda_{\max}^2(L)}{2\eta} \right)$ – конечная константа.

Для членов, связанных с внешним возмущением и сглаживающей функцией $\tanh$, используя оценку $|d_i(t)| \leq \theta_i^*$ и элементарные алгебраические преобразования слагаемых $s_i d_i - s_i \hat{\theta}_i \tanh\left(\frac{s_i}{\varepsilon}\right)$, получаем:

$$s_i d_i - s_i \hat{\theta}_i \tanh\left(\frac{s_i}{\varepsilon}\right) \leq |s_i| \theta_i^* - \\ - |s_i| |\hat{\theta}_i + \theta_i| |s_i| - s_i \hat{\theta}_i \tanh\left(\frac{s_i}{\varepsilon}\right).$$

Введем ошибку параметрической оценки $\tilde{\theta}_i = \theta_i^* - \hat{\theta}_i$. Тогда, пользуясь стандартной оценкой для сглаженной функции знака $0 \leq |x| - x \tanh\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq 0.2785\varepsilon$, получаем уточненную верхнюю оценку: $s_i d_i - s_i \hat{\theta}_i \tanh\left(\frac{s_i}{\varepsilon}\right) \leq |s_i| \tilde{\theta}_i + 0.2785\varepsilon \hat{\theta}_i$.

Отсюда следует диссипативная оценка для микроскопической скользящей части:

$$\dot{V}_s \leq \sum_{i=1}^N \left[-(k_i - \eta) s_i^2 + |s_i| |\tilde{\theta}_i + 0.2785\varepsilon \hat{\theta}_i| \right] + C_1 V_w. \quad (8)$$

3. Ошибка параметрической оценки и член адаптивной утечки. Поскольку $V_\theta = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \gamma_i^{-1} \times \times \tilde{\theta}_i^2$, $\dot{\tilde{\theta}}_i = -\dot{\hat{\theta}}_i$, то с учетом неотрицательного проекционного адаптивного закона (6) (проекции оператор не изменяет диссипативную направленность $\tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i$) получаем оценку сверху:

$$\dot{V}_\theta \leq -\sum_{i=1}^N \tilde{\theta}_i |s_i| + \sum_{i=1}^N \sigma_i \gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i. \quad (9)$$

Далее, применяя неравенство Юнга к члену адаптивной утечки $\sigma_i \gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i$ и раскладывая $\tilde{\theta}_i \hat{\theta}_i = \tilde{\theta}_i (\theta_i^* - \tilde{\theta}_i)$, имеем

$$\sigma_i \gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i (\theta_i^* - \tilde{\theta}_i) \leq -\frac{\sigma_i}{2\gamma_i} \tilde{\theta}_i^2 + \frac{\sigma_i}{2\gamma_i} (\theta_i^*)^2. \quad (10)$$

Подставляя (10) в (9), получаем

$$\dot{V}_\theta \leq -\sum_{i=1}^N \tilde{\theta}_i |s_i| - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i \gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i^2 + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i \gamma_i^{-1} (\theta_i^*)^2. \quad (11)$$

4. Комплексный анализ устойчивости. Складывая оценки (7), (8) и (11), видим, что ключевой перекрестный член сопряжения ошибок $\sum |s_i| \tilde{\theta}_i$ взаимно компенсируется, и в результате получаем:

$$\dot{V}(t) \leq -(\lambda - C_1) V_w - \sum_{i=1}^N (k_i - \eta) s_i^2 - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i \gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i^2 + \bar{\Delta}, \quad (12)$$

где постоянная остаточная ошибка задается как

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{2\lambda} \sup_{t \geq 0} \|\Phi(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + 0.2785\epsilon N \Theta_{\max} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i \gamma_i^{-1} (\theta_i^*)^2,$$

где $\Theta_{\max} = \max_{1 \leq i \leq N} \theta_i^*$ – максимальная среди всех ведомых верхняя граница неизвестного внешнего возмущения.

Выбирая достаточно большой параметр задания целевой системы $\lambda > C_1$, а также локальные демпфирующие усиления $k_i > \eta$, введем глобальную скорость убывания энергии замкнутой системы: $\alpha = \min\{\lambda - C_1, 2 \min_i (k_i - \eta), \min_i (\sigma_i)\} > 0$. Тогда из (12) следует стандартная диссипативная оценка:

$$\dot{V}(t) \leq -\alpha V(t) + \bar{\Delta}.$$

В силу стандартного сравнения следует, что замкнутая система, включающая макроуровневую ДУЧП-часть и микродинамику мультиагентов, обладает свойством входо-состояниеовой устойчивости, а полный функционал энергии $V(t)$ экспоненциально убывает и в конечном итоге попадает в остаточное множество $\Omega = \{V(t) \leq \bar{\Delta}/\alpha\}$. Доказательство завершено.

Моделирование и анализ. Для подтверждения эффективности предложенного адаптивно-робастного метода управления мультиагентной системой на основе ДУЧП нами проведена систематическая верификация на платформе численного моделирования MatLab.

Рассматривается мультиагентная система, состоящая из одного лидера и $N = 10$ ведомых, при этом коммуникационная топология представляет собой одномерный неориентированный цепочечный граф; шаг дискретизации выбирается как $h = 1/11$. Опорная траектория лидера задается в виде $q_0(t) = \sin(t)$. Требуемые смещения ведомых в формации выбираются как $i = 1, 2, \dots, 10$.

Для верификации робастности предложенного регулятора в моделировании каждому ведомому задается внешнее сосредоточенное возмущение, включающее низкочастотную периодическую компоненту и высокочастотный шум: $d_i(t) = 0.5 \sin(2t + i) + 0.2 \text{randn}()$. Начальные условия для положений и скоростей всех ведомых выбираются как $q_i(0) = 0$, $v_i(0) = 0$, а начальная

оценка верхней границы возмущения задается $\hat{\theta}_i(0) = 0$. Параметры бэкстеппинга: $v = 1.0$, $\kappa = 0.5$, $\lambda = 2.0$. Параметры адаптивно-робастного управления: $c = 5$, $k_i = 10$, $\epsilon = 0.1$. Параметры проекционного адаптивного обновления: $\gamma_i = 5$, $\sigma_i = 0.5$.

На рис. 1 показаны результаты позиционного слежения в условиях неизвестных возмущений. Под действием граничного согласующего сигнала все ведомые быстро выходят из начального состояния, точно воспроизводят траекторию лидера (штриховая линия) и устойчиво сохраняют требуемую формацию. Тем самым подтверждается эффективность континуальной аппроксимации и метода бэкстеппинга для управления групповым движением.

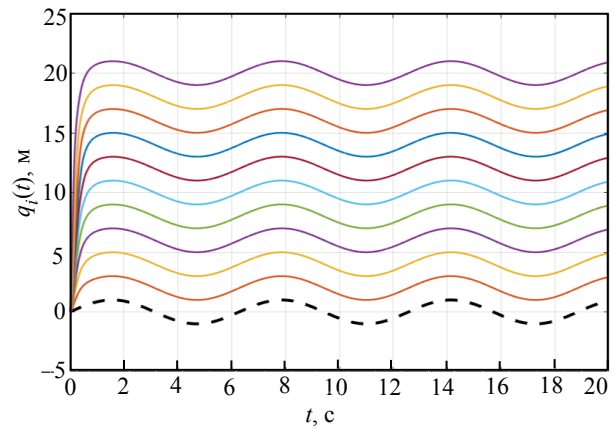


Рис. 1. Качество слежения формации
Fig. 1. Formation tracking quality

На рис. 2 приведены кривые ошибок позиционного слежения $e_{ij}(t)$. Благодаря предложенному адаптивно-робастному закону управления начальные ошибки всех агентов за весьма малое время (порядка 2 с) быстро сходятся и в установившемся режиме остаются в чрезвычайно малой окрестности нуля. Это подтверждает выполнение свойства входо-состояниеовой устойчивости замкнутой системы.

На рис. 3 приведены кривые неизвестных возмущений $\hat{\theta}_i(t)$, формируемые адаптивным законом обновления. На начальном участке моделирования динамическая оценка верхней границы быстро возрастает, обеспечивая требуемую компенсацию возмущений, после чего под действием члена адаптивной утечки $-\sigma_i \hat{\theta}_i$ из закона обновления (6) оценки плавно уменьшается и стабилизируется вблизи малой постоянной величины. Данный результат демонстрирует, что введение проекционного оператора эффективно

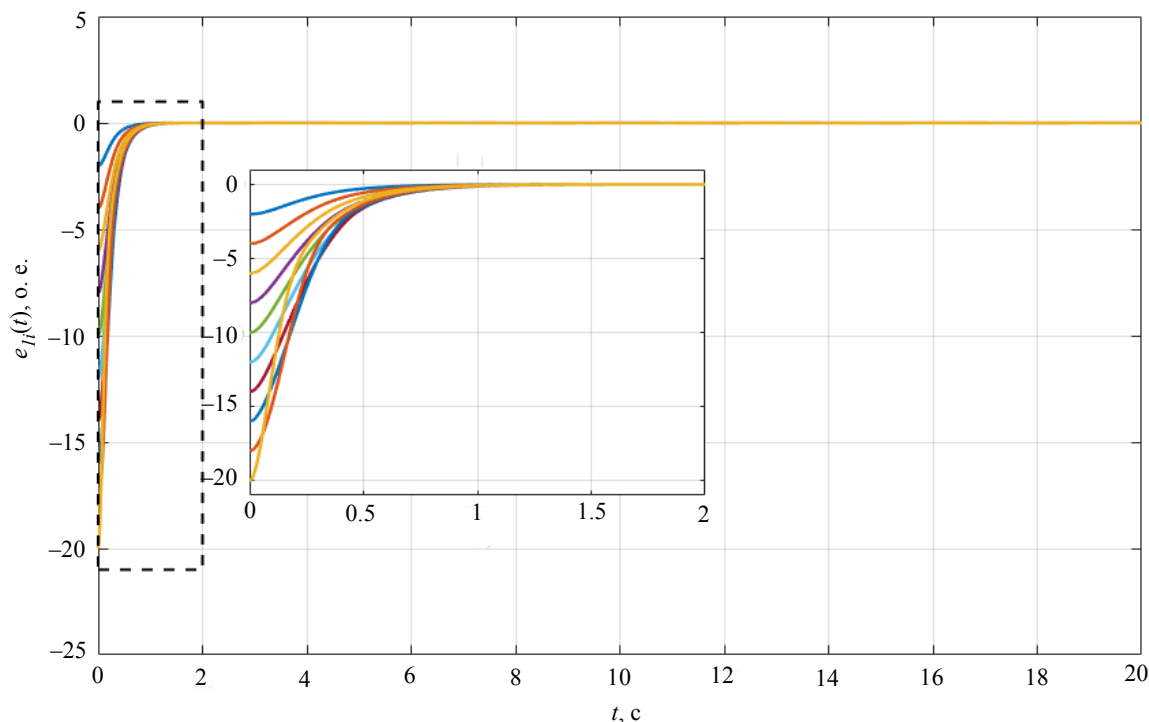


Рис. 2. Сходимость ошибок слежения
Fig. 2. Convergence of tracking errors

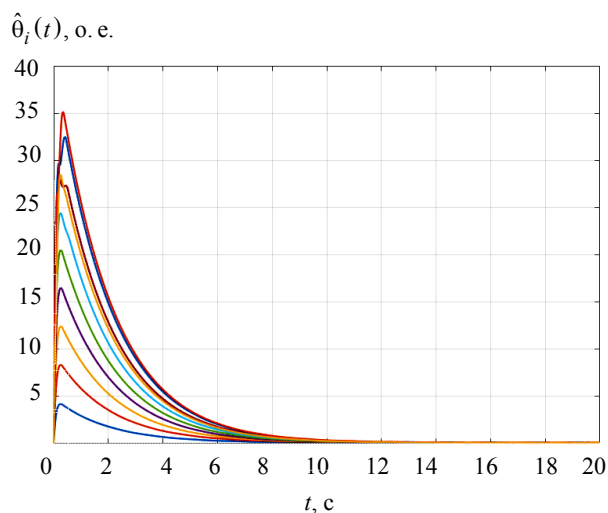


Рис. 3. Оценка адаптивных параметров
Fig. 3. Evaluation of adaptive parameters

предотвращает дрейф параметров и обеспечивает высокую робастность системы.

Выводы и заключение. В данной статье рассмотрена задача управления строем МАС второго порядка типа «ведущий–ведомый» при наличии неизвестных возмущений. Предложена структура адаптивного робастного граничного управления строем для крупномасштабных систем, обеспечивающая равномерную окончательную ограниченность ошибок слежения. Для компенсации неизвестных совокупных возмущений и немоделируемой быстроизменяющейся динамики в рамках передемпфированного приближения применены граничное управление на основе метода бэкстеппинга для ДУЧП и локальное адаптивное робастное управление с оператором проекции. Эффективность разработанных методов подтверждена построением соответствующего композитного функционала Ляпунова. Результаты численного моделирования верифицируют теоретические выводы.

Список литературы

1. Abdulameer H. S., Yassen M. A. Multi-agent systems and swarm intelligence for autonomous drone coordination // Scientific Research J. of Engin. and Computer Sci. 2025. Vol. 5, no. 2. P. 1–7. doi: 10.47310/srjecs.2025.v05i02.002.
2. Brandstätter A. Coordination and control of robotic multi-agent systems in confined environments: diss. ... d-r der Technischen Wissenschaften / Techn. Universität Wien. Vienna, 2025. 129 p. doi: 10.34726/hss.2025.128748.

3. Leader-following formation of heterogeneous multi-agent systems with time-varying topology: A virtual neighbor framework / Z. Xiao, H. Xu, J. Tao, R. Lu, P. Shi // IEEE Trans. on Automation Sci. and Engin. 2025. Vol. 22. P. 21341–21352. doi: 10.1109/TASE.2025.3606489.
4. Su Y. H., Bhowmick P., Lanzon A. A robust adaptive formation control methodology for networked multi-UAV systems with applications to cooperative payload transportation // Control Engin. Practice. 2023. Vol. 138. Art. 105608. doi: 10.1016/j.conengprac.2023.105608.

5. Constrained robust adaptive control design for fixed wing UAV under parameter uncertainties and external disturbances / T. K. Mohammed, W. A. Asfaw, C. M. Abdissa, L. N. Lemma // *Engin. Research Express*. 2025. Vol. 7, no. 2. Art. 025254. doi: 10.1088/2631-8695/add643.

6. Distributed adaptive consensus protocol for heterogeneous nonlinear uncertain multi-agent system with disturbance / H. Wen, Z. Liang, H. Zhou, B. Yao, Z. Mao, L. Lian // *Intern. J. of Robust and Nonlinear Control*. 2024. Vol. 34, no. 3. P. 1475–1492. doi: 10.1002/rnc.7043.

7. Yan T., Xu X., Hu Y. Fixed-time sliding mode-based consensus of multi-agent systems with mismatched disturbances // *J. of the Franklin Institute*. 2023. Vol. 360, no. 18. P. 14914–14925. doi: 10.1016/j.jfranklin.2023.10.023.

8. Wang H., Liu Q. Fixed-time sliding mode consensus tracking for second-order nonlinear multi-agent system with persistent dwell-time switching topologies // *Intern. J. of Robust and Nonlinear Control*. 2024. Vol. 34, no. 11. P. 6987–7006. doi: 10.1002/rnc.7328.

9. Event-triggered adaptive sliding mode control for consensus of multiagent systems with unknown disturbances / T. Chen, X. Zhuang, Z. Hou, H. Chen // *Scientific Reports*. 2022. Vol. 12, no. 1. Art. 17473. doi: 10.1038/s41598-022-21704-4.

10. Ghanavati M. PDE-based modeling and control of multi-agent systems: diss. ... Ph. D. / Wichita State University. Kansas, USA, 2018. URL: <http://hdl.handle.net/10057/15541> (дата обращения: 22.01.2026).

11. Partial differential equation-based multiagent systems formation-containment control with α -leader input delay / H. Chen, Z. Wang, Y. Wang, G. Xu // *Asian J. of Control*. 2024. Vol. 26, no. 2. P. 931–945. doi: 10.1002/asjc.3240.

12. Khansili S., Selivanov A. PDE-based deployment of multi-agent systems with enhanced leader communication and Wentzell boundary control // *Syst. & Control Lett.* 2025. Vol. 204. Art. 106201. doi: 10.1016/j.sysconle.2025.106201.

13. Krstic M., Smyshlyaev A. Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008. 192 p. doi: 10.1137/1.9780898718607.

14. Zhang S., Tang L., Liu Y. J. Formation deployment control of multi-agent systems modeled with PDE // *Math. Biosci. Engin.* 2022. Vol. 19, no. 12. P. 13541–13559. doi: 10.3934/mbe.2022632.

15. Freudenthaler G., Meurer T. PDE-based multi-agent formation control using flatness and backstepping: Analysis, design and robot experiments // *Automatica*. 2020. Vol. 115. Art. 108897. doi: 10.1016/j.automatica.2020.108897.

Информация об авторах

Вэньжань Сюй – аспирант кафедры систем автоматического управления, СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: 769059944@qq.com

<http://orcid.org/0009-0009-3932-281X>

Алмлташи Х. С. Г. – аспирант кафедры систем автоматического управления, СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: humam.almltashi.81@gmail.com

References

1. Abdulameer H. S., Yassen M. A. Multi-agent systems and swarm intelligence for autonomous drone coordination // *Scientific Research J. of Engin. and Computer Sci.* 2025. Vol. 5, no. 2. P. 1–7. doi: 10.47310/srjecs.2025.v05i02.002.

2. Brandstätter A. Coordination and control of robotic multi-agent systems in confined environments: diss. ... d-r der Technischen Wissenschaften / Techn. Universität Wien. Vienna, 2025. 129 p. doi: 10.34726/hss.2025.128748.

3. Leader-following formation of heterogeneous multi-agent systems with time-varying topology: A virtual neighbor framework / Z. Xiao, H. Xu, J. Tao, R. Lu, P. Shi // *IEEE Trans. on Automation Sci. and Engin.* 2025. Vol. 22. P. 21341–21352. doi: 10.1109/TASE.2025.3606489.

4. Su Y. H., Bhowmick P., Lanzon A. A robust adaptive formation control methodology for networked multi-UAV systems with applications to cooperative payload transportation // *Control Engin. Practice*. 2023. Vol. 138. Art. 105608. doi: 10.1016/j.conengprac.2023.105608.

5. Constrained robust adaptive control design for fixed wing UAV under parameter uncertainties and external disturbances / T. K. Mohammed, W. A. Asfaw,

C. M. Abdissa, L. N. Lemma // *Engin. Research Express*. 2025. Vol. 7, no. 2. Art. 025254. doi: 10.1088/2631-8695/add643.

6. Distributed adaptive consensus protocol for heterogeneous nonlinear uncertain multi-agent system with disturbance / H. Wen, Z. Liang, H. Zhou, B. Yao, Z. Mao, L. Lian // *Intern. J. of Robust and Nonlinear Control*. 2024. Vol. 34, no. 3. P. 1475–1492. doi: 10.1002/rnc.7043.

7. Yan T., Xu X., Hu Y. Fixed-time sliding mode-based consensus of multi-agent systems with mismatched disturbances // *J. of the Franklin Institute*. 2023. Vol. 360, no. 18. P. 14914–14925. doi: 10.1016/j.jfranklin.2023.10.023.

8. Wang H., Liu Q. Fixed-time sliding mode consensus tracking for second-order nonlinear multi-agent system with persistent dwell-time switching topologies // *Intern. J. of Robust and Nonlinear Control*. 2024. Vol. 34, no. 11. P. 6987–7006. doi: 10.1002/rnc.7328.

9. Event-triggered adaptive sliding mode control for consensus of multiagent systems with unknown disturbances / T. Chen, X. Zhuang, Z. Hou, H. Chen // *Scientific Reports*. 2022. Vol. 12, no. 1. Art. 17473. doi: 10.1038/s41598-022-21704-4.

10. Ghanavati M. PDE-based modeling and control of multi-agent systems: diss. ... Ph. D. / Wichita State University.

Kansas, USA, 2018. URI: <http://hdl.handle.net/10057/15541> (data obrashhenija: 22.01.2026).

11. Partial differential equation-based multiagent systems formation-containment control with α -leader input delay / H. Chen, Z. Wang, Y. Wang, G. Xu // Asian J. of Control. 2024. Vol. 26, no. 2. P. 931–945. doi: 10.1002/asjc.3240.

12. Khansili S., Selivanov A. PDE-based deployment of multi-agent systems with enhanced leader communication and Wentzell boundary control // Syst. & Control Lett. 2025. Vol. 204. Art. 106201. doi: 10.1016/j.sysconle.2025.106201.

13. Krstic M., Smyshlyaev A. Boundary control of PDEs: A course on backstepping designs. Philadelphia, PA, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008. 192 p. doi: 10.1137/1.9780898718607.

14. Zhang S., Tang L., Liu Y. J. Formation deployment control of multi-agent systems modeled with PDE // Math. Biosci. Engin. 2022. Vol. 19, no. 12. P. 13541–13559. doi: 10.3934/mbe.2022632.

15. Freudenthaler G., Meurer T. PDE-based multi-agent formation control using flatness and backstepping: Analysis, design and robot experiments // Automatica. 2020. Vol. 115. Art. 108897. doi: 10.1016/j.automatica.2020.108897.

Information about the authors

Wenran Xu – postgraduate student of Automatic Control Systems Department, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: 769059944@qq.com

<http://orcid.org/0009-0009-3932-281X>

H. S. G. Almltashi – postgraduate student of Automatic Control Systems Department, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: humam.almltashi.81@gmail.com

Статья поступила в редакцию 13.03.2026; принята к публикации после рецензирования 19.05.2026; опубликована онлайн 28.09.2026.

Submitted 13.03.2026; accepted 19.05.2026; published online 28.09.2026.
