УДК 519.2

Е. А. Бурков, П. И. Падерно, Е. А. Толкачёва
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Стохастическое моделирование комплексных процедур классификации*

Рассмотрена проблема неопределенности стохастической модели комплексной процедуры классификации объектов, которая возникает при высокой несогласованности результатов отдельных базовых процедур. Предложены два различных подхода к разрешению неопределенности, возникающей при совместном использовании нечетного числа базовых процедур классификации, не допускающей грубых ошибок. Первый подход заключается в повторном использовании базовых процедур до тех пор, пока не будет получен однозначный результат классификации. Второй подход не требует повторного применения базовых процедур и опирается на разрешение неопределенности посредством системы решающих правил, позволяющей определить результат комплексной классификации с помощью совместного применения принципа большинства и принципа среднего. Рассмотрено применение производящих функций специального вида для вычисления элементов вероятностной матрицы комплексной процедуры, образованной произвольным нечетным числом базовых процедур. Приведенные подходы могут служить основой для программной реализации инструментария решения прикладных задач классификации объектов с использованием современных методов интеллектуального анализа данных.

Вероятностная матрица, комплексная процедура классификации объектов, принцип большинства, принцип среднего, процедура классификации, стохастическая модель

Использование технологий искусственного интеллекта (ИИ), согласно национальной стратегии развития ИИ [1], связано с интеллектуальной поддержкой процессов принятия решений. На современном этапе классификация остается наиболее востребованным методом в приложениях теории принятия решений. Прикладные задачи классификации объектов возникают в различных областях деятельности человека, например при оценке аварийности зданий и сооружений, при анализе экологической обстановки, при оценивании перспективности кандидата на занимаемую должность [2]. Отличительной чертой прикладных классификационных задач является использование неполных, зачастую неформализованных данных и расплывчатых, описательных процедур.

Классические методы решения прикладных задач классификации позволяют формализовать описание процессов функционирования различных систем для дальнейшей их дискретизации и алгоритмизации. Именно таким образом реализуется обобщенный структурный метод [3], построенный на использовании типовых элементов (типовых функциональных единиц) для описания отдельных фрагментов алгоритмов деятельности. Находящийся сейчас на подъеме в связи с развитием информационных и компьютерных технологий нейросетевой подход стремится смоделировать устройства для воспроизведения механизмов анализа данных, что дает возможность дальнейшей автоматизации процедур и процессов [4]. Авторы же данной статьи придерживаются концепции, в которой человек и его деятельность служат основой для моделирования интеллектуальных систем, что, с одной стороны, близко классическому подходу «черного ящика» [5], а с другой, отвечает современному представлению об ИИ, в частности тренду извлечения семантики знаний для практического использования семантических моделей знаний [6]. При этом предлагаемый

* Окончание. Начало в № 5, 6/2021.

стохастический поход к моделированию классификации [7], [8] позволяет (наряду с нейросетевым) разрабатывать комплексы технологических решений для прикладных задач, что соответствует национальной стратегии развития ИИ [1].

Общая постановка задачи классификации объектов, стохастический подход к моделированию процедур классификации, а также использование различных решающих правил для получения стохастической модели комплексной процедуры классификации, образуемой совместным использованием двух базовых процедур, были рассмотрены в [7], [8]. В данной статье идеи, представленные в них, обобщаются и предлагается способ определения стохастической модели комплексной процедуры, состоящей из произвольного нечетного числа базовых процедур классификации.

При этом для наглядности и удобства рассмотрения сделано допущение, что на упорядоченном множестве классов V базовые процедуры набора M откалиброваны таким образом, что ошибка классификации любого объекта s не превышает единичного шага индекса нумерации классов $\forall j = \overline{1,m}: \ M_j(s \mid s \in V_i) \in \{V_{i-1},\ V_i,\ V_{i+1}\}$. Таким образом исключаются грубые ошибки классификации объектов. Тогда каждой из базовых процедур классификации можно поставить в соответствие ленточную вероятностную матрицу

$$\mathbf{P}_j = \begin{pmatrix} p_{j11} & p_{j12} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ p_{j21} & p_{j22} & p_{j23} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_{jii-1} & p_{jii} & p_{jii+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{jnn-1} & p_{jnn} \end{pmatrix}, \ j = \overline{1,m}, \qquad (1)$$

$$\forall i = \overline{1,n}: \sum_{k=1}^{n} p_{jik} = 1.$$

Элемент p_{jik} матрицы (1) есть вероятность отнесения j-й базовой процедурой объекта i-го класса к k-му классу (если $i \neq k$, то это вероятность ошибки процедуры при классификации объекта i-го класса). С учетом приведенных предположений будем считать, что $\forall j \in \overline{1,m}: p_{j10} = p_{jnn+1} = 0.$

Аналогичным образом можно представить матрицу комплексной процедуры классификации $\widehat{M}$, элементы которой представляют собой вероятности всех возможных исходов комплексной классификации объектов при совместном использовании полного набора базовых процедур:

$$\widehat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \widehat{p}_{11} & \widehat{p}_{12} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{p}_{21} & \widehat{p}_{22} & \widehat{p}_{23} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \widehat{p}_{ii-1} & \widehat{p}_{ii} & \widehat{p}_{ii+1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \widehat{p}_{nn-1} & \widehat{p}_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

В данной статье рассмотрим трудности, связанные с корректным переходом от набора матриц (1) к матрице (2), и приведем способы расчета элементов матрицы (2) на основе элементов набора матриц (1) сначала для случаев трех базовых процедур M_1, M_2 и M_3, а затем и для произвольного нечетного числа базовых процедур.

Стохастическая модель комплексной процедуры классификации при использовании трех базовых процедур. Исходя из заданных условий объект $s \in V_i$ по итогам выполнения комплексной классификации набором процедур M_1, M_2 и M_3 можно отнести: 1) к классу V_i (правильная классификация); 2) к смежному классу V_{i-1} (ошибка завышения класса объекта); 3) к смежному классу V_{i+1} (ошибка занижения класса объекта). Данное решение принимается на основе сопоставления результатов классификации объекта s каждой из базовых процедур в отдельности. При этом возможно как полное совпадение результатов базовых процедур $M_1(s)$ = $M_2(s)$ = = $M_3(s)$, при котором не возникает затруднений с итоговой классификацией объекта s, так и частичное совпадение $M_j(s) = M_k(s) \neq M_l(s)$ или же полное несовпадение $M_1(s) \neq M_2(s) \neq M_3(s)$.

В случае полного совпадения результатов базовых процедур очевидное решение – отнести объект s к указанному всеми процедурами классу, т. е. $\widehat{M}(s) = M_1(s) = M_2(s) = M_3(s)$. Случаи частичного совпадения и полного несовпадения результатов требуют более сложного анализа и применения решающих правил или принципов, реализация которых для совместного использования двух процедур классификации рассмотрена в [8]. Поскольку в данной работе речь идет о совместном использовании трех и более процедур, то для разрешения неоднозначности частичного совпадения их результатов логично прибегнуть к принципу большинства, с помощью которого неопределенность разрешается отнесением объекта к классу, который был указан более чем половиной процедур. Тогда результатом комплексной классификации при частичном совпадении результата базовых процедур M_1, M_2 и M_3 будет отнесение объекта s к классу, на который указало большинство процедур, следовательно, для набора из трех процедур нужно, чтобы две из них дали одинаковый результат, т. е. $\widehat{M}(s) = M_j(s) = M_k(s)$.

Однако при полном несовпадении результатов всех базовых процедур принцип большинства не позволяет разрешить возникающую неопределенность, поэтому в подобном случае вместо него будем использовать принцип среднего, что допустимо, поскольку рассматривается задача классификации на упорядоченном множестве классов. Учитывая, что мы приняли невозможными грубые ошибки классификации, в случае полного несовпадения результатов трех базовых процедур результат комплексной классификации всегда будет совпадать с истинным классом принадлежности объекта, т. е. $\widehat{M}(s) \in V_i$, $s \in V_i$, $i = \overline{2, n-1}$. Как можно заметить, полное несовпадение результатов процедур M_1, M_2 и M_3 при заданной совокупности условий возможно, только если объект s не принадлежит ни одному из крайних классов V_1 и V_n. Соответственно, при распознавании с помощью этих процедур объекта, относящегося к крайним классам, ситуация неопределенности не может возникнуть, что упрощает распознавание таких объектов. Детальное рассмотрение расчета элементов вероятностной матрицы (2) начнем именно с объектов, принадлежащих крайним классам.

При распознавании объекта $s \in V_1$ элементы первой строки матрицы (2) могут быть найдены следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\widehat{p}_{11} = P\left(\widehat{M}(s) \in V_1 \mid s \in V_1\right) = p_{111}p_{211}p_{311} + \\
+p_{111}p_{211}p_{312} + p_{111}p_{212}p_{311} + p_{112}p_{211}p_{311} = \\
= p_{111}p_{211} + (p_{111}p_{212} + p_{112}p_{211})p_{311}; \\
\widehat{p}_{12} = P\left(\widehat{M}(s) \in V_2 \mid s \in V_1\right) = p_{112}p_{212}p_{312} + \\
+p_{112}p_{212}p_{311} + p_{112}p_{211}p_{312} + p_{111}p_{212}p_{312} = \\
= p_{112}p_{212} + (p_{112}p_{211} + p_{111}p_{212})p_{312}; \\
\widehat{p}_{11} + \widehat{p}_{12} = P\left(\widehat{M}(s) \in V_1 \mid s \in V_1\right) + \\
+P(\widehat{M}(s) \in V_2 \mid s \in V_1) = 1.
\end{gathered} \tag{3}
$$

Численные значения $\widehat{p}_{11}$ и $\widehat{p}_{12}$, рассчитываемые в (3), в сумме образуют единицу, поскольку $\widehat{p}_{11}$ и $\widehat{p}_{12}$ – единственные отличные от нуля элементы первой строки вероятностной матрицы (2), сумма элементов каждой строки которой равна единице.

При распознавании объекта $s \in V_n$ элементы n-й строки матрицы (2) могут быть найдены следующим образом:

$$
\begin{gathered}
\widehat{p}_{nn} = P\left(\widehat{M}(s) \in V_n \mid s \in V_n\right) = p_{1nn}p_{2nn}p_{3nn} + \\
+ p_{1nn}p_{2nn}p_{3nn-1} + p_{1nn}p_{2nn-1}p_{3nn} + \\
+ p_{1nn-1}p_{2nn}p_{3nn} = p_{1nn}p_{2nn} + (p_{1nn}p_{2nn-1} + \\
+p_{1nn-1}p_{2nn})p_{3nn}; \\
\widehat{p}_{nn-1} = P\left(\widehat{M}(s) \in V_{n-1} \mid s \in V_n\right) = \\
= p_{1nn-1}p_{2nn-1}p_{3nn-1} + p_{1nn-1}p_{2nn-1}p_{3nn} + \\
+ p_{1nn-1}p_{2nn}p_{3nn-1} + p_{1nn}p_{2n-1n}p_{3nn-1} = \\
= p_{1nn-1}p_{2nn-1} + (p_{1nn-1}p_{2nn} + p_{1nn}p_{2nn-1})p_{3nn-1}; \\
\widehat{p}_{nn} + \widehat{p}_{nn-1} = P\left(\widehat{M}(s) \in V_n \mid s \in V_n\right) + \\
+ P\left(\widehat{M}(s) \in V_{n-1} \mid s \in V_n\right) = 1.
\end{gathered} \tag{4}
$$

По аналогии с (3) и (4) вероятность правильного отнесения (распознавания) объекта $s \in V_i$, $i = \overline{2, n-1}$ составит

$$\begin{aligned}\widehat{p'}_{ii} &= P(\widehat{M}(s)\in V_i \mid s\in V_i) = p_{1ii}p_{2ii}p_{3ii} + \\ &+ p_{1ii}p_{2ii}p_{3ii-1} + p_{1ii}p_{2ii}p_{3ii+1} + \\ &+ p_{1ii}p_{2ii-1}p_{3ii} + p_{1ii}p_{2ii+1}p_{3ii} + \\ &+ p_{1ii-1}p_{2ii}p_{3ii} + p_{1ii+1}p_{2ii}p_{3ii} = p_{1ii}p_{2ii} + \\ &+ p_{1ii}(1-p_{2ii})p_{3ii} + (1-p_{1ii})p_{2ii}p_{3ii} = \\ &= p_{1ii}p_{2ii} + p_{1ii}p_{3ii} + p_{2ii}p_{3ii} - 2p_{1ii}p_{2ii}p_{3ii}, \\ & i=\overline{2,n-1}.\end{aligned} \tag{5}$$

Вероятность завышения класса объекта $s\in V_i$, $i=\overline{2,n-1}$, т. е. его отнесения к классу с меньшим индексом, будет равна

$$\begin{aligned}\widehat{p'}_{ii-1} &= P(\widehat{M}(s)\in V_{i-1} \mid s\in V_i) = p_{1ii-1}p_{2ii-1}p_{3ii-1} + \\ &+ p_{1ii-1}p_{2ii-1}p_{3ii} + p_{1ii-1}p_{2ii-1}p_{3ii+1} + \\ &+ p_{1ii-1}p_{2ii}p_{3ii-1} + p_{1ii-1}p_{2ii+1}p_{3ii-1} + \\ &+ p_{1ii}p_{2ii-1}p_{3ii-1} + p_{1ii+1}p_{2ii-1}p_{3ii-1} = \\ &= p_{1ii-1}p_{2ii-1} + p_{1ii-1}(1-p_{2ii-1})p_{3ii-1} + \\ &+ (1-p_{1ii-1})p_{2ii-1}p_{3ii-1} = p_{1ii-1}p_{2ii-1} + \\ &+ p_{1ii-1}p_{3ii-1} + p_{2ii-1}p_{3ii-1} - \\ &- 2p_{1ii-1}p_{2ii-1}p_{3ii-1},\ i=\overline{2,n-1}.\end{aligned} \tag{6}$$

Вероятность занижения класса объекта $s\in V_i$, $i=\overline{2,n-1}$, т. е. его отнесения к классу с большим индексом, составит

$$\begin{aligned}\widehat{p'}_{ii+1} &= P(\widehat{M}(s)\in V_{i+1} \mid s\in V_i) = p_{1ii+1}p_{2ii+1}p_{3ii+1} + \\ &+ p_{1ii+1}p_{2ii+1}p_{3ii} + p_{1ii+1}p_{2ii+1}p_{3ii-1} + \\ &+ p_{1ii+1}p_{2ii}p_{3ii+1} + p_{1ii+1}p_{2ii-1}p_{3ii+1} + \\ &+ p_{1ii}p_{2ii+1}p_{3ii+1} + p_{1ii-1}p_{2ii+1}p_{3ii+1} = \\ &= p_{1ii+1}p_{2ii+1} + p_{1ii+1}(1-p_{2ii+1})p_{3ii+1} + \\ &+ (1-p_{1ii+1})p_{2ii+1}p_{3ii+1} = p_{1ii+1}p_{2ii+1} + \\ &+ p_{1ii+1}p_{3ii+1} + p_{2ii+1}p_{3ii+1} - \\ &- 2p_{1ii+1}p_{2ii+1}p_{3ii+1},\ i=\overline{2,n-1}.\end{aligned} \tag{7}$$

Вероятность незавершенности комплексной классификации, т. е. неопределенности результата комплексной процедуры, когда результаты всех базовых процедур различны, будет равна

$$\begin{aligned}q_i &= p_{1ii-1}p_{2ii}p_{3ii+1} + p_{1ii-1}p_{2ii+1}p_{3ii} + \\ &+ p_{1ii}p_{2ii-1}p_{3ii+1} + p_{1ii}p_{2ii+1}p_{3ii-1} + \\ &+ p_{1ii+1}p_{2ii-1}p_{3ii} + p_{1ii+1}p_{2ii}p_{3ii-1},\ i=\overline{2,n-1}.\end{aligned} \tag{8}$$

Следует заметить, что сумма вероятностей (5)–(8) равна 1, т. е. верно соотношение

$$\widehat{p'}_{ii} + \widehat{p'}_{ii-1} + \widehat{p'}_{ii+1} + q_i = 1,\ i=\overline{2,n-1}. \tag{9}$$

Возникает вопрос, что же делать с возможной незавершенностью комплексной классификации?

Могут быть предложены два подхода: либо повторно применять набор базовых процедур к объекту, комплексную классификацию которого не удалось завершить сразу, вплоть до получения однозначного результата, либо сформулировать правило или способ разрешения рассматриваемой неопределенности без необходимости повторного использования набора базовых процедур.

Рассмотрим первый из предложенных подходов. Нормируем вероятности (5)–(7), что влечет за собой одинаковое увеличение всех найденных вероятностей (элементов результирующей матрицы (2)):

$$\begin{aligned}\widehat{p''}_{ii-1} &= \frac{\widehat{p'}_{ii-1}}{1-q_i} = \frac{p'_{ii-1}}{\widehat{p'}_{ii} + \widehat{p'}_{ii-1} + \widehat{p'}_{ii+1}},\ i=\overline{2,n-1}; \\ \widehat{p''}_{ii} &= \frac{\widehat{p'}_{ii}}{1-q_i} = \frac{\widehat{p'}_{ii}}{\widehat{p'}_{ii} + \widehat{p'}_{ii-1} + \widehat{p'}_{ii+1}},\ i=\overline{2,n-1}; \\ \widehat{p''}_{ii+1} &= \frac{\widehat{p'}_{ii+1}}{1-q_i} = \frac{\widehat{p'}_{ii+1}}{\widehat{p'}_{ii} + \widehat{p'}_{ii-1} + \widehat{p'}_{ii+1}},\ i=\overline{2,n-1}.\end{aligned} \tag{10}$$

Для однозначной комплексной классификации объекта $s\in V_i$, $i=\overline{2,n-1}$ потребуется $m_i\in\mathbb{N}$ раз задействовать набор базовых процедур, причем вероятность конкретного значения m_i равна $(1-q_i)q_i^{m_i-1}$. Несложно показать, что среднее значение m_i

$$\overline{m}_i = \frac{1}{1-q_i} = \frac{1}{\widehat{p'}_{ii} + \widehat{p'}_{ii-1} + \widehat{p'}_{ii+1}},\ i=\overline{2,n-1}.$$

Поскольку в случае принадлежности объекта крайним классам V_1 и V_n ситуация незавершенности комплексной процедуры возникнуть не может, в этих случаях всегда будет достаточно однократного применения набора базовых процедур, т. е. $m_1 = m_n = 1$.

Очевидный недостаток первого подхода к устранению неопределенности комплексной классификации заключается в затратах (времени, финансов или иных ресурсов), связанных с неоднократным применением набора базовых процедур. Поэтому, если имеются какие-либо ограничения на использование процедур классификации, целесообразно прибегать ко второму подходу, при котором в случае неопределенности классификации объекта $s \in V_i$, $i = \overline{2, n-1}$ набором базовых процедур принимается решение об отнесении спорного объекта к классу V_i (более подробный анализ такого решения приведен далее), т. е. вероятности (5)–(7) пересчитываются следующим образом:

$$\widehat{p}_{ii} = \widehat{p'}_{ii} + q_i, \quad \widehat{p}_{ii-1} = \widehat{p'}_{ii-1}, \quad \widehat{p}_{ii+1} = \widehat{p'}_{ii+1}, \quad i = \overline{2, n-1}. \tag{11}$$

Выполним с помощью (10) и (11) краткий сравнительный анализ обоих подходов на достаточно простом частном случае. Рассмотрим набор трех идентичных на вероятностном уровне базовых процедур M_1, M_2 и M_3, вероятностные матрицы (1) которых абсолютно одинаковы. Положим, что выполняется неравенство $0.7 \le p_{jii} \le 1$, $j = 1, 2, 3$, $i = \overline{2, n-1}$, и запишем выражения (5)–(8) для данного частного случая:

$$\widehat{p'}_{ii} = 3p_{ii}^2 - 2p_{ii}^3,$$
$$\widehat{p'}_{ii-1} = 0.75(1 - p_{ii})^2 - 0.25(1 - p_{ii})^3,$$
$$\widehat{p'}_{ii+1} = 0.75(1 - p_{ii})^2 - 0.25(1 - p_{ii})^3,$$
$$q_i = 1.5 p_{ii}(1 - p_{ii})^2,$$
$$\overline{m}_i = \frac{1}{1 - 1.5 p_{ii}(1 - p_{ii})^2}.$$

Численные результаты вычислений соответствующих вероятностей для первого и второго подходов при различных значениях вероятности p_{ii} правильной классификации объекта $s \in V_i$, $i = \overline{2, n-1}$ любой из процедур M_1, M_2 и M_3, а также соответствующие значения среднего числа использований полного набора базовых процедур приведены в табл. 1.

Сравнительный анализ 3-го и 7-го столбцов табл. 1 показывает, что второй подход дает завышенную по сравнению с первым подходом оценку правильности решения задачи классификации с использованием трех одинаковых по своим стохастическим моделям процедур. Из этого следует, что при планировании использования трех процедур для классификации объектов способ формирования комплексной процедуры должен быть оговорен заранее с учетом возможного возрастания расхода ресурсов при реализации первого подхода.

Итак, мы рассмотрели способ определения стохастической модели комплексной процедуры классификации объектов в форме вероятностной матрицы (2) для частного случая, когда комплексная процедура $\widehat{M}$ представляет собой набор из трех совместно используемых базовых процедур классификации. Перейдем к более общему случаю, когда число базовых процедур, образующих комплексную процедуру, равно $2N+1$, $N \in \mathbb{N}$. При этом будем полагать, что прочие условия и ограничения сохраняются, в частности стохастические модели всех рассматриваемых процедур классификации могут быть представлены в виде вероятностных матриц (1).

Стохастическая модель комплексной процедуры классификации при произвольном нечетном числе базовых процедур. Пусть заданы $2N+1$, $N \in \mathbb{N}$ базовых процедур классификации и соответствующие им вероятностные матрицы $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_{2N+1}$, имеющие вид (1). Требуется определить вероятностную матрицу вида (2) комплексной процедуры $\widehat{M}$, образуемой совместным использованием полного набора базовых процедур.

Для нахождения элементов вероятностной матрицы комплексной процедуры классификации $\widehat{M}$ воспользуемся аппаратом производящих функций. Аргументы каждой из вводимых далее производящих функций соответствуют различным результатам классификации анализируемого объекта базовыми процедурами:

Таблица 1

p_{ii}	$\widehat{p''}_{ii-1}$	$\widehat{p''}_{ii}$	$\widehat{p''}_{ii+1}$	$\overline{m}_i$	$\widehat{p}_{ii-1}$	$\widehat{p}_{ii}$	$\widehat{p}_{ii+1}$
0.70	0.067	0.866	0.067	1.100	0.061	0.878	0.061
0.75	0.046	0.908	0.046	1.075	0.043	0.914	0.043
0.80	0.029	0.941	0.029	1.050	0.028	0.944	0.028
0.85	0.016	0.967	0.016	1.030	0.016	0.968	0.016
0.90	0.007	0.985	0.007	1.014	0.007	0.986	0.007
0.95	0.002	0.996	0.002	1.003	0.002	0.996	0.002

x – завышение класса объекта, т. е. $M_j(s \mid s \in V_i) \in V_{i-1}$;

y – правильное распознавание объекта, т. е. $M_j(s \mid s \in V_i) \in V_i$;

z – занижение класса объекта, т. е. $M_j(s \mid s \in V_i) \in V_{i+1}$.

Степени аргументов, образующих каждый одночлен $x^j y^k z^l$, $j+k+l=2N+1$, определяют число процедур, для которых был получен соответствующий результат классификации объекта полным набором базовых процедур. Коэффициенты вида $\varphi(j,k,l)$, стоящие перед соответствующими одночленами, представляют собой вероятность данного сочетания результатов классификации объекта набором базовых процедур.

Первоначально зададим производящие функции для случаев, когда объект s принадлежит одному из крайних классов V_1 или V_n, а затем перейдем к промежуточному случаю. Для объектов, принадлежащих классу V_1, производящая функция будет иметь вид

$$\Phi_1(y,z) = \prod_{m=1}^{2N+1} (p_{m11}y + p_{m12}z) = \sum_{k+l=2N+1} \varphi_1(k,l) y^k z^l, \tag{12}$$

а для объектов класса V_n –

$$\Phi_n(x,y) = \prod_{m=1}^{2N+1} (p_{mnn-1}x + p_{mnn}y) = \sum_{j+k=2N+1} \varphi_n(j,k) x^j y^k. \tag{13}$$

В свою очередь, для объектов, принадлежащих классам с индексом от 2 до $n-1$, производящие функции, соответственно, будут иметь вид

$$\Phi_i(x,y,z) = \prod_{m=1}^{2N+1} (p_{mii-1}x + p_{mii}y + p_{mii+1}z) = \sum_{j+k+l=2N+1} \varphi_i(j,k,l) x^j y^k z^l, \; i = \overline{2,n-1}. \tag{14}$$

Проанализируем введенные производящие функции (12)–(14).

Сумма $\hat{p}_{11} = \sum_{k=N+1}^{2N+1} \varphi_1(k, 2N+1-k)$ части коэффициентов производящей функции (12) представляет собой вероятность того, что большинство базовых процедур отнесут объект $s \in V_1$ к классу V_1. Тогда сумма оставшейся части коэффициентов (12) представляет собой вероятность

$$\hat{p}_{12} = \sum_{k=1}^{N} \varphi_1(k, 2N+1-k) = \sum_{l=N+1}^{2N+1} \varphi_1(2N+1-l, l)$$

того, что большинство процедур отнесут объект $s \in V_1$ к классу V_2.

Сумма $\hat{p}_{nn} = \sum_{k=N+1}^{2N+1} \varphi_n(2N+1-k, k)$ части коэффициентов производящей функции (13) представляет собой вероятность того, что большинство базовых процедур отнесут объект $s \in V_n$ к классу V_n. Тогда сумма оставшейся части коэффициентов (13) представляет собой вероятность

$$\hat{p}_{nn-1} = \sum_{k=1}^{N} \varphi_n(2N+1-k, k) = \sum_{j=N+1}^{2N+1} \varphi_n(j, 2N+1-j)$$

того, что большинство процедур отнесут объект $s \in V_n$ к классу V_{n-1}.

Соответственно, для объектов классов $V_2, \ldots, V_{n-1}$ вероятность того, что базовых процедур, которые отнесут объект $s \in V_i, i = \overline{2,n-1}$ к классу V_{i-1}, будет большинство, может быть найдена как

$$\hat{p}_{ii-1} = \sum_{\substack{j=N+1 \\ k+l=2N+1-j}}^{2N+1} \varphi_i(j,k,l). \tag{15}$$

Аналогично для объектов классов $V_2, \ldots, V_{n-1}$ вероятность того, что процедур, которые отнесут объект $s \in V_i$, $i = \overline{2,n-1}$ к классу V_{i+1}, будет большинство, может быть найдена как

$$\widehat{p}_{ii+1} = \sum_{\substack{l=N+1 \\ j+k=2N+1-l}}^{2N+1} \varphi_i(j,k,l). \tag{16}$$

Вероятность того, что базовых процедур, которые отнесут объект $s \in V_i$, $i = \overline{2, n-1}$ к классу V_i, будет большинство, в свою очередь, может быть найдена как

$$\widehat{p'}_{ii} = \sum_{\substack{k=N+1 \\ j+l=2N+1-k}}^{2N+1} \varphi_i(j,k,l). \tag{17}$$

Отдельно от (15)–(17) идут случаи, когда после применения полного набора базовых процедур для распознавания объекта $s \in V_i$, $i = \overline{2, n-1}$ ни на один выходной класс не будет указывать большинство процедур. Вероятность того, что возникнет подобная неопределенная ситуация, может быть найдена как

$$q_i = \sum_{j,k=1}^{N} \varphi_i(j,k,2N+1-j-k).$$

При этом выполняется соотношение, аналогичное (9):

$$\widehat{p'}_{ii} + \widehat{p}_{ii-1} + \widehat{p}_{ii+1} + q_i = 1, \; i = \overline{2, n-1}.$$

Как было отмечено ранее, для разрешения неопределенности, обусловленной невозможностью определить результат комплексной процедуры классификации с помощью принципа большинства, воспользуемся принципом среднего, поскольку рассматривается упорядоченное множество классов. В общем виде принцип среднего можно представить следующим образом:

$$\hat{v} = \left[\sum_{i=1}^{2N+1} i n_i \Big/ \sum_{i=1}^{2N+1} n_i + 0.5 \right], \tag{18}$$

где $\hat{v}$ – индекс класса, к которому будет отнесен объект s по итогам комплексной классификации на основе усреднения результатов набора из $2N+1$ процедур с последующим взятием целой части; n_i – число базовых процедур из использованного набора, которые отнесли объект s к i-му классу.

Поскольку рассматривается набор процедур, которые не допускают грубых ошибок классификации, а множество выходных классов ограничено истинным классом принадлежности объекта и смежными с ним классами, (18) можно привести к виду

$$\hat{v} = \left[\frac{j(i-1) + ki + l(i+1)}{2N+1} + 0.5 \right] = \left[i + \frac{l-j}{2N+1} + 0.5 \right]. \tag{19}$$

Проанализировав (19), можно заключить, что для того чтобы объект $s \in V_i$ был отнесен комплексной процедурой к классу V_{i-1} или классу V_{i+1}, слагаемое $(l-j)/(2N+1)$ по модулю должно быть не меньше 0.5. Однако при наличии неопределенности, обусловленной невозможностью установить результат комплексной процедуры с помощью принципа большинства, указанное слагаемое всегда будет принимать значение, не превышающее по модулю 0.5, поскольку в этом случае $j, l = \overline{1, N}$. Следовательно, указанная неопределенность существует, принцип среднего при возможности отнесения объекта s только к одному из трех упорядоченных смежных классов всегда будет относить его среднему классу, т. е. $j, k, l < N+1 : \widehat{M}(s) \in V_i$, и можно окончательно определить вероятность правильной комплексной классификации объекта $s \in V_i$, $i = \overline{2, n-1}$ как

$$\widehat{p}_{ii} = \widehat{p'}_{ii} + q_i = \sum_{\substack{k=N+1 \\ j+l=2N+1-k}}^{2N+1} \varphi_i(j,k,l) + \sum_{j,k=1}^{N} \varphi_i(j,k,2N+1-j-k).$$

Таким образом, в границах рассматриваемой совокупности условий использование принципа среднего для определения результата комплексной классификации объектов целесообразно в тех случаях, когда ни на один из выходных классов не указало большинство (более N) процедур. Тогда принцип среднего позволяет разрешить неопределенность, возникающую в отдельных случаях при использовании принципа большинства. Поэтому, когда распознаваемые объекты могут быть отнесены только к одному из трех упорядоченных смежных классов, целесообразно использовать для определения вероятностной матрицы (2) комплексной процедуры классификации $\widehat{M}$ совместно принцип среднего и принцип большинства, т. е. следующую систему решающих правил:

$$\begin{cases} j \geq N+1:\ x^j y^k z^l \to x \ \Rightarrow M(s) \in V_{i-1}; \\ k \geq N+1:\ x^j y^k z^l \to y \ \Rightarrow M(s) \in V_i; \\ l \geq N+1:\ x^j y^k z^l \to z \ \Rightarrow M(s) \in V_{i+1}; \\ j,k,l < N+1:\ x^j y^k z^l \to y \ \Rightarrow M(s) \in V_i. \end{cases} \qquad (20)$$

На основе (20) для ранее рассмотренного частного случая, когда $2N+1=3$, можно составить табл. 2 перехода от совокупностей результатов базовых процедур классификации объекта s к результату классификации этого объекта комплексной процедурой, построенной с применением:

1) только принципа большинства;

2) только принципа среднего;

3) принципа большинства с привлечением принципа среднего в случае возникновения неопределенности при использовании принципа большинства.

Результаты и выводы. Проведенный анализ задачи определения параметров стохастической модели комплексной процедуры классификации объектов выявил ряд возникающих неопределенностей (противоречий результатов использования отдельных процедур), которые можно преодолеть различными способами. Разработаны два подхода к комплексированию результатов совместного использования нечетного числа базовых процедур классификации. Первый подход предполагает повторное использовании базовых процедур до получения однозначного результата классификации. Проведена оценка среднего числа возможных повторов. Второй подход базируется на разрешении неопределенности на основе использования принципа средних значений. Показано, что второй подход дает завышенную по сравнению с первым подходом оценку правильности решения задачи классификации. Для случая использования базового набора, состоящего из трех сходных процедур, проведена численная оценка вероятностей, получаемых с применением обоих подходов. Для общего случая с нечетным числом применяемых базовых процедур предложено использовать математический аппарат производящих функций специального вида, позволяющий однозначно определять элементы вероятностной матрицы комплексной процедуры. Разработана система решающих правил, позволяющая комплексировать результаты применения базового набора процедур, основанная на совместном использовании принципа большинства и принципа среднего.

Полученные результаты стохастического моделирования процессов классификации могут быть положены в основу при создании современных информационных и интеллектуальных систем поддержки принятия решений в условиях многокритериального выбора.

Таблица 2

Результат базовой процедуры	Результат комплексной процедуры на основе		
	принципа большинства	принципа среднего	принципа большинства, затем принципа среднего
x^3	$\widehat{M}(s) \in V_{i-1}$	$\widehat{M}(s) \in V_{i-1}$	$\widehat{M}(s) \in V_{i-1}$
y^3	$\widehat{M}(s) \in V_i$	$\widehat{M}(s) \in V_i$	$\widehat{M}(s) \in V_i$
z^3	$\widehat{M}(s) \in V_{i+1}$	$\widehat{M}(s) \in V_{i+1}$	$\widehat{M}(s) \in V_{i+1}$
x^2y	$\widehat{M}(s) \in V_{i-1}$	$\widehat{M}(s) \in V_{i-1}$	$\widehat{M}(s) \in V_{i-1}$
xy^2	$\widehat{M}(s) \in V_i$	$\widehat{M}(s) \in V_i$	$\widehat{M}(s) \in V_i$
x^2z	$\widehat{M}(s) \in V_{i-1}$	$\widehat{M}(s) \in V_i$	$\widehat{M}(s) \in V_{i-1}$
xz^2	$\widehat{M}(s) \in V_{i+1}$	$\widehat{M}(s) \in V_i$	$\widehat{M}(s) \in V_{i+1}$
y^2z	$\widehat{M}(s) \in V_i$	$\widehat{M}(s) \in V_i$	$\widehat{M}(s) \in V_i$
yz^2	$\widehat{M}(s) \in V_{i+1}$	$\widehat{M}(s) \in V_{i+1}$	$\widehat{M}(s) \in V_{i+1}$
xyz	Неопределенность	$\widehat{M}(s) \in V_i$	$\widehat{M}(s) \in V_i$

Рассмотренная задача использования стохастической модели для описания комплексной процедуры классификации может быть отнесена к одной из областей современного интеллектуального анализа данных. Применение разработанного механизма решающих правил в рамках используемой стохастической модели позволяет формировать вероятностную матрицу комплексной процедуры классификации на основе вероятностных матриц частных процедур. Предложенный подход сохраняет независимость стохастической модели от используемых правил классификации объектов и области применения этих правил. Предложенный комплекс моделей процедур классификации объектов в значительной степени упрощает процесс подготовки и проведения различных классификационных мероприятий.

Предлагаемый подход имеет высокий потенциал не только при разрешении частных противоречий (возникающих неопределенностей), но и в перспективе для анализа и формулирования ресурсно-вероятностного подхода к решению реальных классификационных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Указ Президента РФ «О развитии искусственного интеллекта в Российской Федерации» от 10 окт. 2019 г. № 490. URL: http://www.kremlin.ru/acts/news/61785 (дата обращения 22.05.2021).

2. Литвак Б. Г. Разработка управленческого решения. М.: Изд-во «Дело», 2004.

3. Информационно-управляющие человеко-машинные системы. Исследование, проектирование, испытания. Справочник / под общ. ред. А. И. Губинского, В. Г. Евграфова. М.: Машиностроение, 1993.

4. Николенко С. И., Кадурин А. А., Архангельская Е. О. Глубокое обучение. СПб.: Питер, 2021.

5. Ручкин В. Н., Фулин В. А. Универсальный искусственный интеллект и экспертные системы. СПб.: BHV, 2009.

6. Городецкий В. И., Юсупов Р. М. Искусственный интеллект: метафора, наука и информационная технология // Мехатроника, автоматизация, управление. 2020. № 21(5). С. 282–294.

7. Стохастическая модель классификации объектов / Е. А. Бурков, Е. А. Толкачева, П. И. Падерно, Ф. Э. Сатторов // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2021. № 5. С. 5–10.

8. Бурков Е. А., Толкачева Е. А., Падерно П. И. Использование решающих правил для разрешения противоречий между процедурами классификации объектов // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2021. № 6. С. 11–17.

E. A. Burkov, P. I. Paderno, E. A. Tolkacheva
Saint Petersburg Electrotechnical University

STOCHASTIC MODELING OF INTEGRATED CLASSIFICATION PROCEDURES

The paper considers the problem of defining the stochastic model of an integrated procedure for object classification, which arises when an odd number of basic classification procedures are used together. To resolve the uncertainty arising from a high inconsistency of the results of individual basic procedures, two different approaches have been proposed. The first approach is to reuse basic procedures until an unambiguous classification result is obtained. The second approach does not require repeated application of basic procedures and is based on resolving uncertainty using the average principle. The application of generating functions of a special type for calculating the elements of a probabilistic matrix of an integrated procedure formed by an arbitrary odd number of basic procedures is considered. A system of decision rules is given that allows to determine the result of an integrated classification using the joint application of the majority principle and the average principle. These approaches can serve as a basis for the software implementation of tools for solving applied problems of object classification using modern data mining methods.

Probability matrix, integrated classification of objects, average principle, majority principle, classification procedure, stochastic model