

## Математические и графовые модели специализированных мультиагентных систем с распределенным решением прикладных задач

Т. Г. Черноусова

Московский государственный технический университет  
им. Н. Э. Бауман. Москва, Россия

anakiz100@gmail.com

**Аннотация.** Рассматривается понятие специализированной мультиагентной системы (СМАС) как системы, предназначенной для распределенного решения либо одной прикладной задачи, либо сильно ограниченного круга прикладных задач. Нередко такие задачи требуют выполнения большого числа однородных операций, что может привести к значительному увеличению размеров системы и, как следствие, неэффективному управлению, падению быстродействия. Поэтому целесообразно открытую СМАС большого размера разбить на классы агентов и найти отношения между ними, что соответствует разбиению прикладной задачи  $T$  на подзадачи и определению отношений между этими подзадачами. Такой путь влечет за собой двухуровневое распределенное управление агентами СМАС. На первом уровне исследуются отношения агентов внутри классов, а на втором – отношения между классами агентов. В статье предлагается мультимодельный подход для построения, моделирования и анализа СМАС. Обсуждаются свойства агента и его математическая модель, описываемая 5-значным набором, а также математическая модель класса агентов, описываемая 12-значным набором, в который входят такие составляющие, как коллективная база знаний агентов, коллективная коммуникационная среда, ментальная, социальная и другие составляющие. Отношения между классами агентов отражаются в математической модели открытой СМАС. Если разбиение задачи  $T$  представляется неориентированным ациклическим графом  $GR'$ , концевые вершины которого имеют степень, равную единице, а внутренние – степень, равную двум, то  $GR'$  определяется как простое дерево. В том случае, когда любой класс агентов является полным графом  $K$ , декартово произведение  $CP' = GR' \times K_n$  по доказанной теореме есть графовая модель открытой СМАС, состоящая из компонентов  $K$  и связок между ними. Согласно следствию этой теоремы от  $CP'$  можно перейти к мультиграфовой модели  $MYL' = (MV', ME')$  системы, если компонентам  $K$  поставить в соответствие вершины этой модели  $mv'_{com} \in MV'$ , а связкам – ее ребра  $me'_{con1} \in ME'$ . При этом число ребер между любыми двумя вершинами  $MYL'$  равно  $n$ . Проведение анализа мультиграфовых моделей открытых СМАС больших размеров позволит значительно снизить сложность их исследования на структурном уровне.

**Ключевые слова:** агент, класс агентов, декартово произведение графов, математическая и мультиграфовая модели специализированной мультиагентной системы, мультимодельный подход

**Для цитирования:** Черноусова Т. Г. Математические и графовые модели специализированных мультиагентных систем с распределенным решением прикладных задач // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2023. Т. 16, № 6. С. 81–95. doi: 10.32603/2071-8985-2023-16-6-81-95.

Original article

## Mathematical and Graph Models of Specialized Multi-Agent Systems with Distributed Solution of Applied Problems

T. G. Chernousova

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

anakiz100@gmail.com

**Abstract.** The concept of a specialized multi-agent system (SMAS) as a system designed for a distributed solution of either one applied problem or a highly limited range of applied problems is considered. Such problems

frequently require a large number of homogeneous operations, which can lead to a significant increase in the size of the system and, as a result, to inefficient control and a drop in performance. Therefore, it is advisable to divide a large-sized open SMAS into classes of agents and find relationships between them. This corresponds to dividing the applied task  $T$  into subtasks and determining relations between these subtasks. Such a path entails a two-level distributed control over SMAS agents. At the first and second levels, respectively, the relations of agents within classes and between classes of agents are studied. This paper proposes a multi-model approach to constructing, modeling, and analyzing SMAS. The properties of the agent and its mathematical model, described by a 5-digit set, as well as the mathematical model of the class of agents, described by a 12-digit set, which includes such components as the collective knowledge base of agents, the collective communication environment, mental, social, and other components, are discussed. Relations between classes of agents are reflected in a mathematical model of open SMAS. If a partition of a problem  $T$  is represented by an undirected acyclic graph  $GR'$  whose terminal vertices have degree one and whose interior vertices have degree two, then  $GR'$  is defined as a simple tree. In the case when any class of agents is a complete graph  $K$  then the Cartesian product  $CP' = GR' \times K_n$ , according to the proved theorem, is a graph model of an open SMAS, consisting of the components  $K$  and connectives between them. According to the corollary of this theorem, it is possible to pass from  $CP'$  to the multigraph model  $MYL' = (MV', ME')$  of the system, if the components  $K$  are associated with the vertices of this model  $mv'_{com} \in MV'$ , and the connectives are associated with its edges  $me'_{con1} \in ME'$ . Moreover, the number of edges between any two vertices  $MYL'$  is equal to  $n$ . The analysis of multigraph models of open SMAS of large sizes will significantly reduce the complexity of their study at the structural level.

**Keywords:** agent, class of agents, Cartesian product of graphs, mathematical and multigraph models of a specialized multi-agent system, multi-model approach

**For citation:** Chernousova T. G. Mathematical and Graph Models of Specialized Multi-Agent Systems with Distributed Solution of Applied Problems // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2023. Vol. 16, no. 6. P. 81–95. doi: 10.32603/2071-8985-2023-16-6-81-95.

---

**Введение.** В настоящий момент агентно-ориентированная технология, преимущественно базирующаяся на распределенном искусственном интеллекте (Distributed Artificial Intelligence), а также теории систем и системном анализе (systems theory and systems analysis), активно используется в проектировании систем, основанных на знаниях KBS (Knowledge Based Systems) и отличающихся своим целевым поведением при решении ряда узкоспециализированных распределенных прикладных задач  $T$  (tasks) в одной или нескольких онтологиях  $O$  (ontologies) или предметных областях [1]–[8]. Такие системы назовем открытыми СМАС. В качестве примера СМАС с распределенным решением прикладной задачи приведем систему управления обнаружением и ликвидацией аварий, пожаров на промышленных предприятиях [1], систему управления аэрофото съемкой железнодорожных путей сообщения с помощью беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) для последующего проведения работ по геоинформационному моделированию [2], систему наблюдения с групповым обнаружением наземных объектов [3]. Классификация сфер промышленного применения агентно-ориентированной технологии представлена в [4]. Однако создание открытой СМАС большого размера

приводит к существенному усложнению программно-алгоритмического обеспечения, неэффективному управлению, что в свою очередь снижает быстродействие системы. Поэтому уместно СМАС большого размера разбить на классы агентов в соответствии с распределенным решением прикладной задачи  $T$  и определить связи между ними.

В статье представлены математические модели агента, класса агентов и СМАС. Агент описывается 5-значным набором, который включает в себя информационные атрибуты, ментальные и социальные компоненты, средства коммуникации, а также множество онтологий или предметных областей, с которыми агент поддерживает отношения. Математическая модель класса агентов разработана на основании математической модели агента и характеризуется 12-значным набором. Класс агентов обладает собственными коллективными знаниями, отличается своими интеллектуальными методами рассуждения и приобретения знаний, методами коммуникации и миграции, а также не лишен вспомогательных методов, которые способствуют исполнению специальных требований и функций для распределенного решения прикладной задачи  $T$  в целом.

Для разработки математической модели СМАС с распределенным решением прикладной задачи Т предлагается выполнить разбиение этой задачи на подзадачи и найти отношения порядка между ними. Если полученное упорядоченное множество не превышает заданного числа подзадач  $I'$  и указанного критерия разнородности этих подзадач  $CH'$ , то представляется целесообразным однородные подзадачи объединить в классы и определить отношения порядка между классами подзадач. Отметим, что допускается разбивать Т с учетом ограничения на число классов подзадач.

Математическая модель СМАС, состоящая из классов агентов и отношений между этими классами, находится при выполнении отображения на нее по правилам  $RL_1$  прикладной задачи Т, представленной классами подзадач и отношениями порядка между ними. Правила  $RL_1$  обеспечивают взаимосвязанность классов подзадач и классов агентов, определяют структуру СМАС и ее размер, влияют на интеллектуальные и функциональные возможности как агентов, так и их классов.

В первой части статьи показано, что математические модели агента, класса агентов и открытой СМАС большого размера взаимосвязаны, из чего следует организация двухуровневой структуры системы и двухуровневого распределенного управления ею. Исследование структуры СМАС и структур одного или нескольких видов ее классов предполагает анализ свойств агентов и их отношений между собой внутри классов, а также анализ отношений между классами агентов при достижении системой поставленной цели. Аналогично создание двухуровневого распределенного управления требует осуществления управления поведением агентов внутри их классов на первом уровне и реализацию управления классами агентов, а значит, непосредственно самой системой, на втором уровне.

Во второй части статьи структурный анализ СМАС большого размера и ее классов предлагается проводить с помощью соответствующих им графовых моделей. Рассматривается частный случай, когда разбиение прикладной задачи Т можно представить простым деревом  $GR'$ , а любой класс агентов – полным графом  $K_n$ . Тогда в соответствии с доказанной теоремой декартово произведение  $CP' = GR' \times K_n$  есть графовая модель СМАС, состоящая из компонентов  $K_n$  и связей между ними. С учетом следствия этой теоремы продемонстрирован переход от  $CP'$  к связному мультиграфу  $MYL' = (MV', ME')$ , где любой вер-

шине  $mv'_{com} \in MV' (com = \overline{1, COM})$  ставится в соответствие компонент  $K_n$  графа  $CP'$ , а ребрам  $me'_{con1} \in ME' (con1 = \overline{1, CON1})$  – связи между компонентами  $K_n$ . Принимая во внимание, что число вершин  $|MV'|$  связного мультиграфа  $MYL'$  определяется количеством компонентов графа  $CP'$ :  $|MV'| = COM$ , то число его ребер вычисляется по формуле  $|ME'| = CON1 = n \times (|MV'| - 1) = n \times (COM - 1)$ , где  $n$  – число ребер любой связи между вершинами мультиграфа  $MYL'$ .

Таким образом, предложенный мультимодельный подход предоставляет возможность создания мультиграфовой модели СМАС, которая значительно облегчает анализ отношений между классами агентов. Исследования математических и графовых моделей классов агентов СМАС позволяют определять и уточнять виды технически исполняемых агентов, а также протоколы обмена информацией как внутри классов, так и между классами агентов реализуемой системы на аппаратно-программном уровне.

**Математические модели агента, класса агентов и СМАС.** Зачастую СМАС реализуется на аппаратно-программном уровне, в силу чего из известных в литературе определений агента приведем определение, которое в 1995-м г. дали М. Wooldridge и N. Jennings [9]: «Агент – это аппаратная и программная сущность, способная действовать в интересах целей, поставленных перед ним владельцем и/или пользователем». Поскольку СМАС – это распределенная система, то из вышеприведенного определения следует, что ключевое свойство агента  $a_l (a_l \in A, l = \overline{1, L})$  состоит в наличии у него локальной цели LG (local goal), для достижения которой он должен обладать чувствительностью к внешней среде, т. е. иметь сенсоры. Именно сенсоры дают агенту  $a_l$  знания о внешней среде, с помощью которых он строит модель своего поведения в реальном масштабе времени. Это означает, что агент  $a_l$  обладает свойством адаптации к изменяющимся условиям и параметрам внешней среды. Вместе с тем среда функционирования агента  $a_l$ , а в конечном счете – среда функционирования СМАС, имеет ряд ограничений. Множество допустимых условий и параметров среды PCPE (permissible conditions and parameters of the environment) влияют на формирование модели поведения агента  $a_l$  СМАС для исполнения им своей локальной цели LG.

Знания агента  $a_l$  о текущем состоянии внешней среды и других агентах системы с учетом РСРЕ – это его убеждения  $B$  (beliefs). В качестве убеждений могут использоваться простые логические правила, например логические правила, состоящие из условий (IF) и выбора действий (THEN) согласно этим условиям. Следует иметь в виду, что при отсутствии информации об истинности получаемых извне знаний ТК (truth of knowledge) агент  $a_l$ , основываясь на своих убеждениях  $B$ , может делать неверные заключения. Мотивационными составляющими агента  $a_l$  являются его желания  $D$  (desires), которые представляют собой те состояния, которые для него желательны для достижения собственной локальной цели  $LG$ , а в итоге – цели СМАС. Намеченные желания могут противоречить друг другу, поэтому на пути к достижению агентом  $a_l$  его локальной цели необходимо регулярно анализировать желания  $D$  на предмет их непротиворечивости [7]–[9].

Действия агента  $a_l$  по достижению им локальной цели  $LG$  целесообразны. Достижение цели агентом означает, что его поведение направлено на получение той части реального результата, которая ему делегирована согласно распределенному алгоритму прикладной задачи  $T$  при реализации этого алгоритма системой в одной или нескольких внешних средах. СМАС функционирует в асинхронном режиме по распределенному коммуникационному протоколу, который позволяет координировать работу агентов  $A = \{a_l\} (l = \overline{1, L})$  посредством обмена сообщениями между ними на одном или нескольких языках коммуникации высокого уровня  $LC$  (languages of communications), а также принимать информацию из внешней среды и туда же ее передавать. При этом следует обратить внимание на периоды времени, с которыми осуществляется прием/передача информации, поскольку эти временные параметры оказывают непосредственное влияние на отказоустойчивость СМАС. Система считается отказоустойчивой, если в результате ее системного сбоя, произошедшего по тем или иным причинам, либо ложного поведения отдельных агентов решение прикладной задачи  $T$  продолжается, и оно корректно. Помимо исполнения собственной локальной цели  $LG$  агент, активизировав соответствующие свои функции, может брать на себя некоторые обязательства  $OB$

(obligations), например подавления или замены других агентов. Непротиворечивое подмножество желаний  $D1 (D1 \in D)$ , выбранное определенным образом, вместе с согласованным множеством обязательств  $OB$  составляют намерения  $IN$  (intentions) агента  $a_l$ :

$$IN = \{D1, OB\}. \quad (1)$$

Планирование, т. е. определение последовательности действий, позволяет агенту  $a_l$  осуществлять свои намерения  $IN$  (1) по достижению им локальной цели  $LG$ . При этом отметим, что поскольку убеждения агента  $a_l$  могут меняться, то его намерения  $IN$  (1), основанные на желаниях  $D1$  и обязательствах  $OB$ , также подлежат изменениям. Следовательно, подвержены изменениям планы  $P$  (plans) агента  $a_l$  по достижению им локальной цели  $LG$ . Агент  $a_l$  планирует свои действия и приобретает новые знания благодаря интеллектуальным рассуждениям  $IR$  (intellectual reasoning) на основании одной или нескольких логик  $LOG$  (logics).

Кроме изменяемых знаний агент  $a_l$  имеет знания, которые остаются неизменными в процессе всего его жизненного цикла. Таким примером может служить локальная цель  $LG$  агента  $a_l$ . В множество ментальных компонентов  $MC$  (mental components) агента  $a_l$  входят его цель  $LG$ , намерения  $IN$  (1), убеждения  $B$ , планы  $P$ , построенные на основании интеллектуальных рассуждений  $IR$  одной или нескольких логик  $LOG$  согласно допустимым условиям и параметрам внешней среды РСРЕ, а также информации об истинности полученных им извне знаний ТК:

$$MC = \{LG, IN, B, P, IR, LOG, РСРЕ, ТК\}. \quad (2)$$

Распределенный алгоритм, лежащий в основе работы СМАС в одной или нескольких внешних средах, назовем мультиагентным. Считаем, что в заданной внешней среде СМАС выполнила поставленную перед ней цель, если в соответствии с реализованным мультиагентным алгоритмом совместное функционирование ее агентов по большому счету позволило получить реальный распределенный результат решения прикладной задачи  $T$  в допустимом диапазоне значений. Для достижения общей цели совместное функционирование агентов  $a_l$  означает, что их согласованные действия основаны на взаимопомощи, т. е. на свойстве благожелательности  $BEN$  (benevolence). Вместе с тем предполагается, что локальные цели

агентов СМАС не конфликтуют друг с другом. Поскольку знания СМАС распределенные, то на системном уровне для достижения собственных локальных целей агенты  $a_j$  начинают мигрировать в поисках той информации, которая у них отсутствует. Это свойство агентов называется свойством мобильности  $M$  (mobility). Именно мобильность позволяет агентам расширить свои знания о внешней среде, тем самым сняв ограничения на разворачиваемые ими действия.

В случае необходимости размеры СМАС могут быть увеличены, поскольку любой агент  $a_j$  обладает способностью привлечения новых агентов АНА (attraction of new agents) к решению прикладной задачи  $T$ . Так как СМАС имеет децентрализованное управление, то увеличение размеров системы за счет привлечения ограниченного числа новых агентов к решению  $T$  не повлечет за собой существенных изменений в логике управления на системном уровне. При этом в силу согласованных и параллельных действий агентов  $a_j$  в асинхронном режиме работы производительность СМАС растет. Отметим, что сроки и стоимость проектирования такой системы по сравнению с традиционной значительно сокращаются.

В множество социальных компонентов  $SC$  (social components) агента  $a_j$  входят его способность обмена сообщениями с другими агентами системы на одном или нескольких языках коммуникации высокого уровня  $LC$ , способность привлечения по мере необходимости ограниченного числа новых агентов АНА к решению прикладной задачи  $T$ , а также свойства благожелательности  $BEN$  и мобильности  $M$ :

$$SC = \{LC, ANA, BEN, M\}. \quad (3)$$

Языки коммуникации  $LC$ , а также множество протоколов взаимодействия  $IP$  (interaction protocols), устанавливающих типы взаимодействия между агентами, являются элементами множества средств общения  $MCOM$  (means of communications):

$$MCOM = \{IP, LC\}. \quad (4)$$

Из множеств (3) и (4) следует:

$$LC = SC \cap MCOM \neq \emptyset.$$

Порождаемые согласно множеству (4) коммуникационные свойства агента  $a_j$  АСР (agent communication properties), описываемые выражением

$$ACP = IP \cup LC, \quad (5)$$

позволяют ему обмениваться сообщениями с другими агентами, а также принимать информацию из внешней среды и передавать ее во внешнюю среду.

В зависимости от вида прикладной задачи  $T$ , особенностей аппаратного и программно-алгоритмического обеспечения СМАС, реализующей эту задачу  $T$ , множества ментальных  $MC$  (2) и социальных  $SC$  (3) компонентов ее агентов могут быть расширены, модифицированы и оказаться более разнообразными. Множество информационных атрибутов  $IA$  (information attribute) агента  $a_j$ , включающее его имя  $N$  (name), местоположение  $LOC$  (location) также может быть расширено аналогично  $MC$  (2) и  $SC$  (3):

$$IA = \{N, LOC\}. \quad (6)$$

Исходя из вышеизложенного, агент  $a_j$  характеризуется следующим 5-значным набором:

$$a_j = \{O, MC, SC, MCOM, IA\}, \quad (7)$$

где  $O$  – множество, как уже было сказано, онтологий (предметных областей), с которыми поддерживаются отношения;  $MC$  – ментальные компоненты (2);  $SC$  – социальные компоненты (3);  $MCOM$  – средства общения (4), на основании которых формируются коммуникационные свойства АСР (5);  $IA$  – информационные атрибуты (6).

Выполним разбиение прикладной задачи  $T$  большого размера на множество подзадач  $S = \{s_i\} (i = \overline{1, I})$  (subtasks), между которыми задан отношение порядка  $R = \{r_j\} (j = \overline{1, J})$  (order relation):

$$T = \{S, R\} = \{\{s_i\}, \{r_j\}\}. \quad (8)$$

Иными словами, прикладная задача  $T$ , согласно (8), есть упорядоченное множество ее подзадач  $S = \{s_i\}$ . Отношение порядка означает, что результаты решения любой подзадачи  $s_{i-1} \in S$  – выходные данные для нее, и вместе с тем могут быть входными для решения подзадачи  $s_i \in S$  при условии, что  $s_{i-1}$  и  $s_i$  находятся в отношении  $r_j : s_{i-1} r_j s_i$ .

Если подзадачи множества  $S$  разнородны по выполняемым функциям, но при этом критерий разнородности  $CH$  (criterion of heterogeneity) не превышает заданного  $CH'(CH \leq CH')$ , то при большом  $I$ , не превышающем заданного числа подзадач  $I'$  ( $I \leq I'$ ), целесообразно выполнить объединение однородных подзадач в классы

$CL = \{cl_{kl}\} (kl = \overline{1, KL})$  (classes) и найти отношения  $RC$  между ними. Число классов  $KL$  может быть ограничено  $KL'$  ( $KL \leq KL'$ ). Если для прикладной задачи  $T$  большого размера (8) находятся классы подзадач  $CL$  и отношения между ними  $RC$ , тогда она описывается следующим образом:

$$T = \{CL, RC\}. \quad (9)$$

Классы агентов  $AC = \{ac_g\} (g = \overline{1, G})$  (agent classes) и отношения между ними  $RCA$  при решении прикладной задачи  $T$  (9) определяются посредством отображения  $F1$  по правилам  $RL1$  (rules) вида

$$F1: T = \{CL, RC\} \xrightarrow{RL1} SMAS = \{AC, RCA\}. \quad (10)$$

В отображении  $F1$  (10) через  $SMAS = \{AC, RCA\}$  обозначается математическая модель  $SMAS$  большого размера, в которой коллективное поведение любого класса агентов  $ac_g \in AC$  формируется на основании правил, обусловленных коллективными знаниями и возможностями этого класса. Важно отметить, что при распределенном решении прикладной задачи  $T$  (9) в реальном масштабе времени поведения классов агентов должны быть согласованы между собой. Внутри класса  $ac_g$  агенты также координируют свои действия для достижения собственных локальных целей. Представление математической модели  $SMAS$  упорядоченными отношениями между классами агентов особенно актуально для инженерии открытых  $SMAS$  большого размера. Согласно отображению  $F1$  (10), структура  $SMAS$  большого размера – двухуровневая. На первом уровне осуществляется структурный анализ одного или нескольких видов классов агентов  $ac_g$  ( $ac_g \in AC$ ), а на втором уровне анализируются отношения между классами агентов рассматриваемой системы. Отображение  $F1$  (10) предполагает также создание двухуровневого распределенного управления при достижении  $SMAS$  своей цели. На первом уровне требуется осуществление управления поведением агентов внутри одного или нескольких видов классов агентов системы, а на втором уровне реализуется распределенное управление классами агентов, т. е. непосредственно самой системой.

Любой класс агентов  $ac_g$  ( $ac_g \in AC$ ) математической модели  $SMAS = \{AC, RCA\}$  может быть описан 12-значным набором

$$ac_g = \{A_g, AR_g, O_g, MC_g, SC_g, CE_g, CM_g, MM_g, KB_g, IM_g, ACM_g, IA_g\}, \quad (11)$$

где  $A_g = \{a_1, a_2, \dots, a_w, \dots, a_W\} (w = \overline{1, W})$  – множество агентов класса  $g$  ( $g = \overline{1, G}$ ) каждый из которых представляется 5-значным набором (7), причем  $A_g = \{a_w\} \subseteq A = \{a_l\} (l = \overline{1, L}, W \leq L$ ;  $AR_g = \{ar_1, ar_2, \dots, ar_m, \dots, ar_M\} (m = \overline{1, M})$  – множество отношений между агентами  $A_g$ ;  $O_g$  – множество онтологий (предметных областей) агентов класса  $g$ , с которыми поддерживаются отношения;  $MC_g$  – множество ментальных компонентов агентов класса  $g$ ;  $SC_g$  – множество социальных компонентов агентов класса  $g$ ;  $CE_g$  (communication environment) – коллективная коммуникационная среда агентов класса  $g$ , функционирование которых осуществляется в пределах допустимых условий и параметров внешней среды  $PCPE$ ;  $CM_g$  (communication methods) – множество коммуникационных методов (функций) агентов класса  $g$ ;  $MM_g$  (migration methods) – множество миграционных методов агентов класса  $g$ ;  $KB_g$  (knowledge base) – коллективная база знаний агентов класса  $g$ , которая всегда доступна для принятия решений не только  $A_g$ , но и всем классам  $AC$  ( $ac_g \in AC$ ) математической модели  $SMAS$  данной предметной области вне зависимости от наличия механизмов одновременного доступа к ней;  $IM_g$  (intelligent methods) – множество интеллектуальных методов рассуждений и приобретений знаний агентами класса  $g$ ;  $ACM_g$  (accessory methods) – множество вспомогательных методов, предназначенных для исполнения конкретных специальных требований, функций, задач;  $IA_g$  – множество информационных атрибутов агентов класса  $g$ .

Возможности  $POS_g$  (possibilities) агентов класса  $g$  определяются выражением:

$$POS_g = PCPE \cup CM_g \cup MM_g \cup IM_g \cup ACM_g. \quad (12)$$

В действительности  $POS_g$  (12) описывает способность  $ac_g$  (11) достигать локальные цели. Адаптивное поведение агентов  $A_g$  класса  $g$  к условиям и параметрам внешней среды  $PCPE$  позволяет им достичь своих локальных целей в реальном масштабе времени без поиска оптимальных решений.

Математические модели агента, класса агентов и СМАС большого размера взаимосвязаны. Благодаря этому представляется уместным комплекс работ по имитационному моделированию поведения системы с распределенным решением прикладной задачи Т (9) провести на трех уровнях: на первом уровне промоделировать поведение одного или нескольких видов агентов исследуемой системы, на втором – поведение одного или нескольких видов ее классов агентов, а на третьем – осуществить имитационное моделирование поведения непосредственно самой системы. Такой подход является иерархическим и для всестороннего анализа открытой СМАС большого размера требует разработки различных типов моделей на всех трех уровнях. Назовем данный подход трехуровневым имитационным моделированием СМАС, основной характеристикой которого служит мультимодельность. Проведение полного цикла работ по трехуровневому имитационному моделированию позволит, в частности, проанализировать СМАС на предмет ее отказоустойчивости и определить те предельные параметры и условия внешней среды РСРЕ, при которых система не утратит своей способности к распределенному решению прикладной задачи Т. Основанное на мультимодельности трехуровневое имитационное моделирование дает возможность уточнения и корректировки открытой СМАС большого размера на аппаратно-программном уровне. Обозначим аппаратно-программную реализацию системы через  $SMAS' = \{AC', RAC'\}$ , где  $AC' = \{ac'_p\} (p = \overline{1, P})$  – технически исполненные классы агентов;  $RAC' = \{rac'_q\} (q = \overline{1, Q})$  – протоколы обмена информацией между классами агентов. Непосредственно техническая реализация  $SMAS' = \{AC', RAC'\}$  может быть представлена выполнением отображения  $F2$  по правилам RL2:

$$F2 : SMAS = \{AC, RAC\} \xrightarrow{RL2} SMAS' = \{AC', RAC'\}. \quad (13)$$

Аппаратно-программная реализация системы  $SMAS'$ , полученная по отображению  $F2$  (13), определяет виды и классы технически исполненных агентов, их функциональные возможности, протоколы обмена информацией как внутри классов, так и между ними. Классы агентов, распола-

гая собственными базами знаний и имея доступ к базам знаний других классов агентов, а также получая информацию из внешней среды, способны запоминать эту информацию, анализировать ее, рассуждать и делать выводы, в соответствии с которыми имеют возможность осуществлять целесообразные действия, по большому счету направленные на получение системой  $SMAS'$  реального результата. Класс агентов способен спрогнозировать реакцию на свои действия других классов агентов, принадлежащих системе  $SMAS'$ . При распределенном решении прикладной задачи Т (9) классы агентов системы  $SMAS'$  производят согласование своих действий, планов и знаний. Одним словом, комплекс целенаправленных поведений классов агентов  $AC'$  определяет поведение системы  $SMAS'$  в целом. Укажем, что система  $SMAS'$  может работать самостоятельно без вмешательства извне, включая человека.

**Построение и анализ графовой модели СМАС.** Изучение структуры системы, связей между классами агентов предпочтительно проводить посредством графовой модели СМАС. Ее построение рассмотрим на простом примере.

Пусть прикладная задача Т (9) разбита на множество классов подзадач  $CL$  мощностью  $|CL| = 3$  с известными отношениями между ними  $RC$ :

$$CL = \{cl_1, cl_2, cl_3\}. \quad (14)$$

Покажем взаимосвязь между классами подзадач  $CL$  (14) с помощью неориентированного ациклического графа  $GR = (X, E)$ , представленного на рис. 1. В неориентированном ациклическом графе  $GR$  каждой вершине  $x_{kl}$  соответствует класс подзадач  $cl_{kl}$  ( $kl = \overline{1, 3}$ ), а ребрам – отношения между классами.

Матрица Кирхгофа графа  $GR = (X, E)$  имеет размеры  $KL \times KL = 3 \times 3$ . Элементы матрицы Кирхгофа кроме элементов, находящихся на главной ее диагонали, отражают взаимосвязь между классами подзадач (14) прикладной задачи Т (9):

$$M1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Любой элемент главной диагонали матрицы Кирхгофа равен степени соответствующей вершины рассматриваемого графа. Так, согласно матрице Кирхгофа (15), степени концевых вершин  $x_1$  и  $x_3$  графа  $GR = (X, E)$  равны единице:  $\deg(x_1) = \deg(x_3) = 1$ . Степень внутренней вер-

шины  $x_2$  этого графа равна двум:  $\deg(x_2) = 2$ .

В соответствии с теоремой Эйлера (леммой «о рукопожатиях») сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу его ребер [10]–[12]. Таким образом, сумма элементов главной диагонали матрицы Кирхгофа  $M_1$  (15) есть удвоенное число ребер графа  $GR$ :  $4 = 2|E|$ . Отсюда следует, что  $|E| = 2$ .

Кроме элементов, находящихся на главной диагонали матрицы Кирхгофа, остальные ее элементы равны единице, если вершины графа, соответствующие этим элементам матрицы, смежные, в противном случае – равны нулю [10]–[12]. Элементы матрицы Кирхгофа (15), значения которых равны нулю, указывают, что соответствующие им вершины  $x_1$  и  $x_2$  не связаны, т. е. непосредственная связь между классами подзадач  $cl_1$  и  $cl_2$  отсутствует.

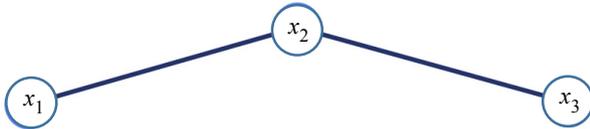


Рис. 1. Неориентированный ациклический граф  $GR = (X, E)$ , соответствующий множеству классов подзадач  $CL$  (14) прикладной задачи  $T$  и множеству отношений  $RL$  между ними  
Fig. 1. An undirected acyclic graph  $GR = (X, E)$ , corresponding to the set of classes of subtasks  $CL$  (14) of the applied problem  $T$  and the set of relations  $RL$  between them

Граф  $GR$  – связный и имеет один компонент связности. Тогда цикломатическое число  $\gamma(GR)$  рассматриваемого графа имеет следующее значение:  $\gamma(GR) = |E| - |X| + 1 = 0$ . Именно равенство  $\gamma(GR) = 0$  указывает на тот факт, что неориентированный связный граф  $GR$  ациклический, т. е. представляет собой дерево [12]. Отсюда следует планарность  $GR = (X, E)$ , а также отсутствие в нем петель и кратных ребер.

Введем определение неориентированного простого дерева. Если связный неориентированный граф  $GR' = (X', E')$  ациклический, причем степени двух концевых его вершин равны единице, а степень любой внутренней его вершины равна двум, то такой граф назовем неориентированным простым деревом. Из этого определения следует, что цикломатическое число любого простого дерева равно нулю [10], [12]. Поэтому число ребер простого дерева  $GR'$  определяется по формуле

$$|E'| = |X'| - 1. \quad (16)$$

Формула (16) не противоречит теореме Эйлера (лемме «о рукопожатиях») [10]–[12]. Из опре-

деления простого неориентированного дерева и равенства  $\gamma(GR') = 0$  также можно заключить, что  $GR'$  представляет собой планарный граф, в котором отсутствуют циклы, петли и кратные ребра [10]–[12]. Если в цепи такого простого дерева  $GR'$  каждое ребро встречается не более одного раза, то такая цепь является простой [12].

Таким образом, в соответствии с приведенным определением граф  $GR = (X, E)$ , представленный на рис. 1, есть неориентированное простое дерево. Поэтому число его ребер  $|E|$  может рассчитываться не только по матрице Кирхгофа (15), но и по (16). Эксцентриситет вершины  $x_1$  графа  $GR$ , соответствующий максимальному расстоянию от данной вершины до самой удаленной  $x_3$ , равен двум:  $\text{ecc}(x_1) = 2$ . Точно так же:  $\text{ecc}(x_3) = 2$ . В свою очередь, эксцентриситет вершины  $x_2$  равен единице:  $\text{ecc}(x_2) = 1$ . Поскольку максимальный эксцентриситет графа  $GR$  равен двум, то этому же значению соответствует его диаметр:

$$\text{diam}(GR) = \max \text{ecc}(x_i) = \text{ecc}(x_1) = 2.$$

Так как минимальное значение эксцентриситета равно единице, то такому же значению соответствует радиус  $GR$  [10], [12]:

$$\text{rad}(GR) = \min \text{ecc}(x_i) = \text{ecc}(x_2) = 1.$$

Для графа  $GR$ , как и для любого другого связного графа, согласно теореме о радиусе и диаметре, выполняется неравенство [10], [12]

$$\text{rad}(GR) \leq \text{diam}(GR) \leq 2 \text{rad}(GR).$$

По определению вершина графа является центральной, если ее эксцентриситет равен радиусу этого графа [10], [12]. Центр графа состоит из множества центральных вершин [10], [12]. Центральной вершиной для рассматриваемого графа  $GR$  служить  $x_2$ , т. е. центр графа  $GR$  состоит только из одной вершины  $x_2$ .

Положим, что любой класс подзадач  $cl_{kl}$  (14) может быть решен классом агентов  $ac_g$  ( $g = \overline{1,3}$ ) (11), каждый из которых состоит из четырех агентов:  $A_g = \{a_w\}$  ( $w = \overline{1,4}$ ). Отношения между ними  $AR_g$  проиллюстрируем с помощью неориентированного полного планарного графа  $H = (Y, Z) = K_4$ , представленного на рис. 2. В неориентированном полном графе  $H$  каждой вершине  $y_w$  соответствует агент  $a_w$ , а ребрам – отношения между этими агентами.

Матрица Кирхгофа планарного графа  $H = (Y, Z) = K_4$  имеет размеры  $W \times W = 4 \times 4$ . Поскольку  $H$  – это полный граф, то любые элементы соответствующей ему матрицы Кирхгофа равны единице, за исключением элементов главной диагонали [10]–[12]:

$$M2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Элементы главной диагонали матрицы Кирхгофа  $M2$  (17) равны трем, поскольку рассматривается полный граф  $K_4$ . Сумма элементов главной диагонали матрицы Кирхгофа  $M2$  (17) определяет удвоенное число ребер графа  $H$ :  $12 = 2|Z|$ . Отсюда следует, что  $|Z| = 6$ .

Неориентированный полный планарный граф  $H = (Y, Z) = K_4$  – связный и имеет одну компоненту связности. Тогда цикломатическое число  $\gamma(H)$  этого графа имеет следующее значение:  $\gamma(H) = |Z| - |Y| + 1 = 3$ . Это значит, что  $K_4$  станет ациклическим, если исключить три ребра этого графа [10], [12].

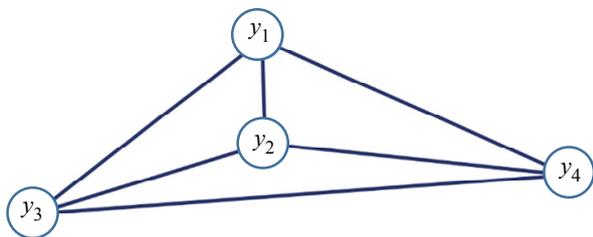


Рис. 2. Неориентированный полный граф  $H = (Y, Z) = K_4$ , соответствующий множеству агентов  $A_g = \{a_w\} (w = \overline{1,4})$

и множеству отношений между ними  $AR_g$

Fig. 2. Undirected complete graph  $H = (Y, Z) = K_4$ ,

corresponding to the set of agents  $A_g = \{a_w\} (w = \overline{1,4})$

and the set of relations between them  $AR_g$

Эксцентриситеты всех вершин графа  $H = (Y, Z) = K_4$  равны единице. Значит, радиус графа  $H$  равен единице:  $rad(H) = 1$ . Для полного графа  $H$  его радиус совпадает с диаметром:  $diam(H) = rad(H) = 1$ . Любая вершина  $K_4$  является центральной. Таким образом, центром графа  $H = (Y, Z) = K_4$  являются все его вершины [10]–[12].

Для определения графа  $CP = (V, U)$ , отвечающего распределенному решению прикладной задачи Т (14) на мультиагентной системе SMAS =

$= \{AC, RAC\}$ , найдем декартово произведение графов  $GR$  и  $H$  [10], [13], [14]:

$$CP = GR \times H. \quad (18)$$

Декартово произведение  $CP$  (18) рассматривается как графовая модель мультиагентной системы SMAS. В таком случае вершинам  $V$  графа  $CP$  ставятся в соответствие агенты  $AC$  системы SMAS, а отношениям  $U$  между вершинами этого графа – отношения  $RAC$  между агентами:

$$V \leftrightarrow AC, \quad (19)$$

$$U \leftrightarrow RAC. \quad (20)$$

Структура мультиагентной системы SMAS определяется на основе представленных соответствий (19) и (20).

Найдем граф  $CP$  (18). Исходя из определения декартова произведения графов [13], [14], любой вершине  $v_q \in V (q = \overline{1, Q} = \overline{1, 12})$  графа  $CP$  ставится в соответствие пара  $(x_{kl}, y_w)$ , где  $x_{kl} \in X (kl = \overline{1, KL} = \overline{1, 3})$ ,  $y_w \in Y (w = \overline{1, W} = \overline{1, 4})$ :

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\} = \\ = \{(x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_1, y_3), (x_1, y_4), (x_2, y_1), (x_2, y_2), \\ (x_2, y_3), (x_2, y_4), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (x_3, y_3), (x_3, y_4)\}. \quad (21)$$

Число вершин  $Q$  графа  $CP = (V, U)$ , полученного в результате нахождения декартова произведения (18), определяется по формуле  $Q = |V| = KL \times W = 3 \times 4 = 12$ . Две вершины графа  $CP$  – смежные, если в рассматриваемых парах  $(x_{kl}, y_w)$  и  $(x_{kl}, y_{w+1})$  вершины  $x_{kl} \in X$  графа  $GR$  совпадают, а вершины  $y_w \in Y$  и  $y_{w+1} \in Y$  графа  $H$  – смежные. Две вершины графа  $CP$  также смежные, если в рассматриваемых парах  $(x_{kl}, y_w)$  и  $(x_{kl+1}, y_w)$  вершины  $x_{kl} \in X$  и  $x_{kl+1} \in X$  графа  $GR$  – смежные, а вершины  $y_w \in Y$  графа  $H$  – одинаковые. В [13] доказано, что декартово произведение двух связных графов есть также связный граф. Поскольку  $GR = (X, E)$  и  $H = (Y, Z)$  – связные графы, то  $CP$  – также связный граф [13]. Граф  $CP$ , представляющий собой декартово произведение  $GR$  и  $H$  (18), показан на рис. 3.

Матрица Кирхгофа графа  $CP = (V, U)$  имеет следующий вид:

$$M3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Согласно матрице Кирхгофа  $M3$  (22) максимальная степень вершин графа  $CP = (V, U)$  равна пяти:  $\deg(v_5) = \deg(v_6) = \deg(v_7) = \deg(v_8) = 5$ . Определим сумму элементов главной диагонали данной матрицы Кирхгофа:  $4 \times 4 + 4 \times 5 + 4 \times 4 = 52 = 2|U|$ . Тогда число ребер графа  $CP$  (18)  $|U| = 26$ . Анализ матрицы Кирхгофа  $M3$  (22) позволяет обнаружить в связном графе  $CP$  две связки по четыре ребра:  $\mu(CP) = \mu_1(CP) = \mu_2(CP) = 4$ . Иначе говоря, число ребер в связке определяется числом вершин полного планарного графа  $H = (Y, Z) = K_4$ :  $\mu(CP) = |Y| = W$ . Число связок  $CON$  графа  $CP$  соответствует числу ребер простого дерева  $GR$ :  $CON = |E| = 2$ . Обозначим подмножество ребер связки через  $A_{\text{con}}$ , где  $\text{con} = \overline{1, CON}$ . Первой связке  $\mu_1(CP)$  принадлежит подмножество ребер

$$A_1 = \{(v_1, v_5), (v_2, v_6), (v_3, v_7), (v_4, v_8)\}, \quad (23)$$

а второй связке  $\mu_2(CP)$  – подмножество ребер

$$A_2 = \{(v_5, v_9), (v_6, v_{10}), (v_7, v_{11}), (v_8, v_{12})\}. \quad (24)$$

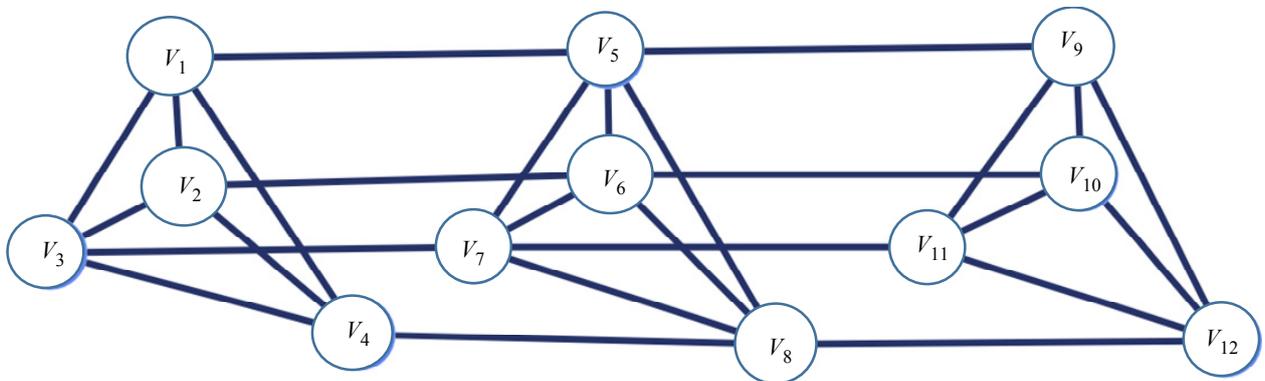


Рис. 3. Неориентированный граф  $CP = GR \times H$   
Fig. 3. Undirected graph  $CP = GR \times H$

Обратим внимание, что  $A_1$  (23) и  $A_2$  (24) получены при нахождении декартова произведения графов  $GR$  и  $H$  в результате рассмотрения пар  $(x_{kl}, y_w)$  и  $(x_{kl+1}, y_w)$  ( $x_{kl} \in X, x_{kl+1} \in X, y_w \in Y$ ). Элементы матрицы Кирхгофа  $M3$  (22), соответствующие ребрам подмножеств  $A_1$  (23) и  $A_2$  (24), равны единице. Поскольку  $M3$  описывает неориентированный граф, то единичные элементы, соответствующие связкам графа  $CP$ , располагаются симметрично относительно главной диагонали этой матрицы Кирхгофа. Если удалить связки  $A_1$  (23) и  $A_2$  (24), то граф  $CP$  разделится на три несвязных компонента, каждый из которых есть полный граф  $K_4$ . Согласно (23) и (24) число компонентов графа  $CP$  определяется числом вершин простого дерева  $GR = (X, E)$ :  $COM = |X| = 3$ . Для каждого компонента введем верхний индекс  $\text{com} = \overline{1, COM} = \overline{1, 3}$ . Компоненты с индексами  $\text{com} = 1$  и  $\text{com} = 3 = COM$  назовем концевыми, компоненты с иными индексами ( $\text{com} \neq 1 \neq COM$ ) – внутренними. Граф  $CP$  имеет концевые компоненты  $K_4^1$  и  $K_4^3$ , а также внутренний компонент  $K_4^2$ . Концевой компонент  $K_4^1 = (V_1, U_1)$  состоит из подмножества вершин  $V_1 \in V$  графа  $CP = (V, U)$

$$V_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \quad (25)$$

и подмножества его ребер  $U_1 \in U$

$$U_1 = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_4)\}. \quad (26)$$

Внутренний компонент  $K_4^2 = (V_2, U_2)$  состоит из подмножества вершин  $V_2 \in V$  графа  $CP = (V, U)$

$$V_2 = \{v_5, v_6, v_7, v_8\} \quad (27)$$

и подмножества его ребер  $U_2 \in U$

$$U_2 = \{(v_5, v_6), (v_5, v_7), (v_5, v_8), (v_6, v_7), (v_6, v_8), (v_7, v_8)\}. \quad (28)$$

Концевой компонент  $K_4^3 = (V_3, U_3)$  состоит из подмножества вершин  $V_3 \in V$  графа  $CP = (V, U)$

$$V_3 = \{v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}\} \quad (29)$$

и подмножества его ребер  $U_3 \in U$

$$U_3 = \{(v_9, v_{10}), (v_9, v_{11}), (v_9, v_{12}), (v_{10}, v_{11}), (v_{10}, v_{12}), (v_{11}, v_{12})\}. \quad (30)$$

Таким образом, множество вершин  $V$  графа  $CP = (V, U)$  есть объединение вершин  $V_1$  (25) компонента  $K_4^1$ ,  $V_2$  (27) компонента  $K_4^2$  и  $V_3$  (29) компонента  $K_4^3$ :

$$V = V_1 \cup V_2 \cup V_3.$$

Множество ребер  $U$  графа  $CP = (V, U)$  объединяет ребра  $U_1$  (26),  $U_2$  (28),  $U_3$  (30) соответствующих компонентов  $K_4^1$ ,  $K_4^2$ ,  $K_4^3$  этого графа, а также его связки  $A_1$  (23) и  $A_2$  (24):

$$U = U_1 \cup U_2 \cup U_3 \cup A_1 \cup A_2.$$

Следовательно, граф  $CP = GR \times H$  может рассматриваться как мультиграф  $MYL = (MV, ME)$ , в котором множеству вершин  $MV$  поставлено в соответствие множество компонентов графа  $K_4 = \{K_4^1, K_4^2, K_4^3\}$ , а ребрам  $ME$  поставлены в соответствие связки  $A_1$  (23) и  $A_2$  (24) между компонентами  $K_4$  этого графа. Под мультиграфом будем понимать граф, который имеет кратные ребра, но не имеет петель [13]–[15]. Иначе говоря, мультиграф  $MYL = (MV, ME)$ , представленный на рис. 4, может рассматриваться как мультиграфовая модель мультиагентной системы SMAS, отражающая взаимосвязь между классами агентов системы при распределенном решении прикладной задачи Т (14).

Матрица Кирхгофа мультиграфа  $MYL = (MV, ME)$  имеет следующий вид:

$$M4 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

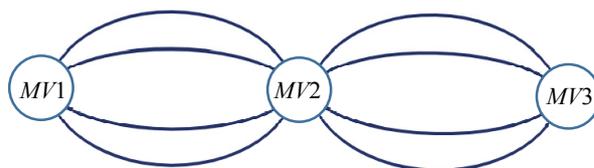


Рис. 4. Мультиграф  $MYL = (MV, ME)$

Fig. 4. Multigraph  $MYL = (MV, ME)$

Согласно (31), в этом мультиграфе максимальную степень имеет вершина  $mv_2$ :  $\deg(mv_2) = \Delta(MUL) = 8$ . По теореме Шеннона хроматический индекс любого мультиграфа не должен превышать  $\frac{3}{2} \Delta$  [16]. В нашем случае хроматический индекс  $\chi'(MYL) = 8$ , что соответствует публикации Визинга [14] и оценке Шеннона [16]. Найдем число ребер мультиграфа  $MYL$ , выполнив суммирование диагональных элементов матрицы Кирхгофа (24):  $4 + 8 + 4 = 16 = 2|ME|$ . Отсюда следует, что  $|ME| = 8$ . Мультиграф  $MYL$  связный, его цикломатическое число имеет значение

$$\gamma(MYL) = |ME| - |MV| + 1 = 6.$$

Отсюда следует, что максимальное число независимых циклов мультиграфа  $MYL$  равно шести [13]–[16].

Эксцентриситеты вершин  $mv_1$  и  $mv_3$  этого мультиграфа одинаковы и равны двум:  $\text{ecc}(mv_1) = \text{ecc}(mv_3) = 2$ . Вершина  $mv_2$  равноудалена от вершин  $mv_1$  и  $mv_3$ . Ее эксцентриситет равен единице:  $\text{ecc}(mv_2) = 1$ . В результате можно заключить, что диаметр мультиграфа  $MYL$  равен двум, а его радиус – единице:

$$\begin{aligned} \text{diam}(MYL) &= \max \text{ecc}(mv_i) = \\ &= \text{ecc}(mv_1) = \text{ecc}(mv_3) = 2; \end{aligned}$$

$$\text{rad}(MYL) = \min \text{ecc}(mv_i) = \text{ecc}(mv_2) = 1.$$

Поскольку эксцентриситет вершины  $mv_2$  равен радиусу этого мультиграфа, то она – центральная для него. Отсюда следует, что центральными вершинами для графа  $CP = (V, U) = GR \times H$  служат вершины (27), соответствующие компоненту  $K_4^2 = (V_2, U_2)$ .

Заметим, что мультиграф  $MYL$  как мультиграфовая модель СМАС, каждой вершине которой соответствует класс агентов, а связям – методы и правила взаимодействия между классами агентов,

позволяет значительно упростить анализ структуры системы для решения прикладной задачи  $T$ , представленной разбиением на классы однородных подзадач и отношениями между ними (9).

Обобщим в виде теоремы нахождение декартова произведения любого простого дерева  $GR' = (X', E')$  с числом вершин  $|X'| = \text{COM}$  и числом ребер  $|E'| = |X'| - 1$  на полный граф  $K_n = H' = (Y', Z') : CP' = GR' \times H' = GR' \times K_n$ .

**Теорема.** Пусть заданы простое дерево  $GR' = (X', E')$  с числом вершин  $|X'| = \text{COM}$  и числом ребер  $|E'| = |X'| - 1 = \text{COM} - 1$ , а также полный граф  $K_n = H' = (Y', Z')$ . Декартово произведение  $CP' = GR' \times H' = GR' \times K_n$  есть связный граф, состоящий из компонентов  $K_n$  и связей между ними. Число его компонентов  $|K_n|$  определяется числом вершин простого дерева  $GR'$ :  $|K_n| = |X'| = \text{COM}$ , а число связей  $\mu(CP')$  между компонентами  $K_n$  определяется числом ребер простого дерева:  $\mu(CP') = |E'| = |X'| - 1 = \text{COM} - 1$ . При этом число ребер в связке  $\text{CON}$  равно числу вершин компонента  $K_n$ :  $\text{CON} = n = |Y'|$ .

*Доказательство.* Обозначим через  $V'$  множество вершин графа декартова произведения  $CP'$ , а через  $U'$  – множество его ребер:  $CP' = (V', U')$ . Согласно определению декартова произведения графов любой вершине  $v'_{\text{COQ}} \in V'$  ( $\text{COQ} = \overline{1, \text{COQ}}$ ) графа  $CP'$  ставится в соответствие пара  $(x'_{\text{COM}}, y'_{\text{CON}})$ , где  $x'_{\text{COM}} \in X'$  ( $\text{COM} = \overline{1, \text{COM}}$ ) простого дерева  $G'$ , а  $y'_{\text{CON}} \in Y'$  ( $\text{CON} = \overline{1, \text{CON}} = \overline{1, n}$ ) полного графа  $K_n$ :

$$\begin{aligned} V' = \{ & (v'_1, v'_2, v'_3, \dots, v'_n), \\ & (v'_{n+1}, v'_{n+2}, v'_{n+3}, \dots, v'_{n+n}), \dots, \\ & (v'_{\text{COQ}+1}, v'_{\text{COQ}+2}, v'_{\text{COQ}+3}, \dots, v'_{\text{COQ}+n}), \dots, \\ & (v'_{(\text{COQ}-n)+1}, v'_{(\text{COQ}-n)+2}, v'_{(\text{COQ}-n)+3}, \dots, v'_{\text{COQ}}) \} = \\ = \{ & [(x'_1, y'_1), (x'_1, y'_2), (x'_1, y'_3), \dots, (x'_1, y'_n)], \\ & [(x'_2, y'_1), (x'_2, y'_2), (x'_2, y'_3), \dots, (x'_2, y'_n)], \dots, \\ & [(x'_{\text{COM}}, y'_1), (x'_{\text{COM}}, y'_2), (x'_{\text{COM}}, y'_3), \dots, \\ & (x'_{\text{COM}}, y'_n)], \dots, [(x'_{\text{COM}}, y'_1), (x'_{\text{COM}}, y'_2), \\ & (x'_{\text{COM}}, y'_3), \dots, (x'_{\text{COM}}, y'_n)] \}. \end{aligned} \quad (32)$$

В (32) указанные в скобках пары – это вершины компонентов  $K_n$ . Число таких компонентов,

как видно из данного выражения, равно числу вершин простого дерева  $GR' = (X', E')$ , т. е.  $\text{COM} = |X'|$ . Тогда число вершин графа  $CP'$  определяется по формуле:  $\text{COQ} = |V'| = n \times |X'| = n \times \text{COM}$ .

Ребра любого компонента  $K_n$  графа декартова произведения  $CP'$  определяются при рассмотрении пар  $(x'_{\text{COM}}, y'_{\text{CON}})$  и  $(x'_{\text{COM}}, y'_{\text{CON}+1})$ , а число ребер компонента  $K_n$ , находится по формуле:  $\frac{n \times (n-1)}{2}$  [13]–[15]. Связки между вершинами двух соседних компонентов  $K_n$  определяются при рассмотрении пар  $(x'_{\text{COM}}, y'_{\text{CON}})$  и  $(x'_{\text{COM}+1}, y'_{\text{CON}})$ . Число таких пар для двух соседних компонентов равно  $n$ . Значит, в связке число ребер  $\text{CON}$  соответствует числу вершин  $K_n$ :  $\text{CON} = n = |Y'|$ . Тогда число связей  $\mu(CP')$  между соседними компонентами  $K_n$  графа декартова произведения  $CP'$  определяется выражением:  $\mu(CP') = |E'| = |X'| - 1 = \text{COM} - 1$ , т. е. любое ребро множества  $E'$  простого дерева  $G'$  при нахождении декартова произведения  $CP'$  преобразуется в связку.

**Следствие.** Граф декартова произведения  $CP' = GR' \times H' = GR' \times K_n = (V', U')$  может быть представлен связным мультиграфом  $MYL' = (MV', ME')$ , если любому компоненту  $K_n$  графа  $CP'$  поставить в соответствие вершину  $mv'_{\text{COM}} \in MV'$  ( $\text{COM} = \overline{1, \text{COM}}$ ) мультиграфа  $MYL'$ , а связкам между компонентами графа  $CP'$  – ребра  $me'_{\text{CON}1} \in ME'$  ( $\text{CON}1 = \overline{1, \text{CON}1}$ ) этого мультиграфа. При этом число вершин мультиграфа  $MYL'$  определяется числом компонентов графа  $CP'$ :  $|MV'| = \text{COM}$ , а число его ребер – по формуле

$$|ME'| = \text{CON}1 = n \times (|MV'| - 1) = n \times (\text{COM} - 1).$$

**Заключение.** В статье представлены разработанные математические модели агента, класса агентов и открытой СМАС большого размера. Данные математические модели взаимосвязаны, что позволяет предложить иерархическое трехуровневое имитационное моделирование СМАС, основная черта которого – это мультимодельность.

На первом уровне моделирования предлагается провести анализ поведения одного или нескольких видов агентов проектируемой СМАС. Любой агент характеризуется 5-значным набором

ром, в который входят такие компоненты, как множество онтологий (предметных областей), с которыми агент поддерживает отношения, ментальные и социальные составляющие, информационные атрибуты, а также средства общения, формирующие его коммуникационные свойства.

На втором уровне моделирования предлагается провести анализ поведения одного или нескольких видов классов агентов проектируемой СМАС. Любой класс агентов характеризуется 12-значным набором, в который входят такие компоненты, как коллективная база знаний агентов, коллективная коммуникационная среда, множество интеллектуальных методов приобретения знаний и рассуждений, а также другие составляющие, представленные в математической модели класса агентов.

На третьем уровне моделирования предписывается провести анализ поведения непосредственно самой СМАС, в математической модели которой отражаются отношения между классами агентов. Отметим, что один или несколько видов классов агентов и отношения между ними определяются исходя из математической модели прикладной задачи  $T$  с большим числом однородных операций, которая может быть получена разбиением ее на подзадачи, и нахождения отношений между этими подзадачами. Анализ отношений между подзадачами предпочтительнее проводить с помощью графа задачи  $T$ . Введено понятие простого дерева. Связный ациклический граф, конечные вершины которого имеют степень, равную единице, а внутренние вершины имеют степень, равную двум, есть простое дерево. В случае, когда графовая модель прикладной задачи  $T$  – простое дерево  $G'$ , а графовая модель любого класса агентов, решающего одну из однородных подзадач прикладной задачи  $T$ , – полный граф  $K_n$ , тогда по доказанной теореме графовая модель СМАС представляет собой связный граф декартова произведения  $CP' = GR' \times K_n$ , состоящий из компонентов  $K_n$  и связей между ними. Согласно следствию этой теоремы можно перейти от графовой модели СМАС  $CP'$  к мультиграфовой мо-

дели  $MYL' = (MV', ME')$ , если любому компоненту  $K_n$  графа  $CP'$  поставить в соответствие вершину мультиграфа  $mv'_{com} \in MV'$ , а связкам между компонентами  $K_n$  графа  $CP'$  – ребра мультиграфа  $me'_{con1} \in ME'$ . Таким образом, количество вершин  $|MV'|$  связного мультиграфа  $MYL'$  определяется числом компонентов  $K_n$  графа  $CP'$ , а количество ребер между любыми двумя его вершинами равно  $n$ . Тогда общее количество ребер  $|ME'|$  связного мультиграфа  $MYL'$  находится по формуле:  $|ME'| = n \times (|MV'| - 1)$ . Мультиграфовая модель  $MYL'$  позволяет значительно упростить анализ отношений между классами агентов. Вместе с тем исследование отношений между агентами внутри классов СМАС следует проводить с помощью графовых моделей ее классов. В статье характеристики графовых моделей СМАС даются в терминах теории графов. По матрице Кирхгофа находится количество ребер изучаемого графа, рассматриваются диаметры, радиусы, центры и другие характеристики графов.

Предложенное построение математических и графовых моделей СМАС большого размера позволяет рассматривать ее структуру как двухуровневую. Первому уровню соответствуют отношения агентов внутри классов СМАС, а второму уровню – отношения между классами агентов. В такой системе распределенное управление также воспринимается на двух уровнях. Согласованное поведение агентов внутри классов позволяет им достигать своих локальных целей на уровне классов, а целенаправленные взаимодействия классов агентов определяют поведение системы в целом. Выполнение полного комплекса работ моделирования проектируемой СМАС по определению свойств ее агентов, анализу отношений внутри классов, а также между классами агентов позволит, в частности, найти те предельные параметры и условия внешней среды, при которых рассматриваемая система сохранит свою способность распределенного решения прикладной задачи  $T$ .

### Список литературы

1. Сеньков А. В., Андреева О. Н. Подход к построению интеллектуальной системы для управления пожарами, авариями и инцидентами на промышленных предприятиях на основе теории мультиа-

гентных систем // Фундаментальные исследования. 2016. № 10. С. 560–565.

2. Ознамец В. В. Геоинформационное моделирование при комплексной воздушной съемке железно-

дорожного пути // Наука и технологии железных дорог. 2020. № 2. С. 45–56.

3. Прикладные многоагентные системы группового управления / В. И. Городецкий, О. В. Карсаев, В. В. Самойлов, С. В. Серебряков // Искусственный интеллект и принятие решений. 2009. № 2. С. 3–24.

4. Промышленные применения многоагентных систем: прогнозы и реалии / В. И. Городецкий, П. О. Скобелев, О. Л. Бухвалов, И. В. Майоров // Тр. XVIII Междунар. конф. «Проблемы управления и моделирования в сложных системах». Самара, 2016. С. 138–162.

5. Концепция создания автоматизированной системы управления пилотируемыми космическими полетами на принципах сетцентрического управления, баз знаний и мультиагентных технологий / В. А. Соловьев, В. Е. Любинский, П. О. Скобелев, О. И. Лахин // Тр. XVIII Междунар. конф. «Проблемы управления и моделирования в сложных системах». Самара, 2016. С. 123–131.

6. Пospelov Д. А. Многоагентные системы – настоящее и будущее // Информационные технологии и вычислительные системы. 1998. № 1. С. 14–21.

7. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный подход. СПб.: Диалектика, 2021. Т. 1. 704 с.

8. Рассел С., Норвиг П. Искусственный интеллект: современный подход. СПб.: Диалектика, 2021. Т. 2. 480 с.

9. Wooldridge M., Jennings N. R. Intelligent agents: Theory and practice // Knowledge Engin. Rev. 1995. Vol. 10, no 2. P. 115–152. doi: 10.1017/S0269888900008122.

10. Зыков А. А. Основы теории графов. М.: Вузovская книга, 2004. 664 с.

11. Берж К. Теория графов и ее применения. М.: Иностранная литература, 1962, 319 с.

12. Ore O. Теория графов. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 352 с.

13. Визинг В. Г. Декартово произведение графов // Вычислительные системы. 1963. № 9. С. 30–43.

14. Визинг В. Г. Об оценке хроматического класса р-графа // Дискретный анализ. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1964. Т. 3. С. 25–30.

15. Brooks R. L. On colouring the nodes of a network // Mathematical Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1941. Vol. 37. P.194–197.

16. Shannon C. A. Theorem on coloring the lines of a network // J. of Mathematics and Physics. 1949. Vol. 28. P. 148–151.

---

#### Информация об авторе

**Черноусова Татьяна Геннадьевна** – канд. техн. наук, доцент. Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (Национальный исследовательский университет), ул. 2-я Бауманская, 5-1, Москва, 105005, Россия.

E-mail: anakiz100@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-0064-7918>

#### References

1. Sen'kov A. V., Andreeva O. N. Podhod k postroeniju intellektual'noj sistemy dlja upravlenija pozhamami, avarijami i incidentami na promyshlennyyh predpriyatijah na osnove teorii mul'tiagentnyh sistem // Fundamental'nye issledovaniya. 2016. № 10. S. 560–565. (In Russ.).

2. Oznamec V. V. Geoinformacionnoe modelirovanie pri kompleksnoj vozduшной s#emke zheleznodorozhnogo puti // Nauka i tehnologii zheleznyh dorog. 2020. № 2. S. 45–56. (In Russ.).

3. Prikladnye mnogoagentnye sistemy grupпового upravlenija / V. I. Gorodeckij, O. V. Karsaev, V. V. Samojlov, S. V. Serebrjakov // Iskusstvennyj intellekt i prinjatje reshenij. 2009. № 2. S. 3–24. (In Russ.).

4. Promyshlennye primenenija mnogoagentnyh sistem: prognozy i realii. / V. I. Gorodeckij, P. O. Skobelev, O. L. Buhvalov, I. V. Majorov // Tr. XVIII Mezhdunar. konf. «Problemy upravlenija i modelirovanija v slozhnyh sistemah». Samara, 2016. S. 138–162. (In Russ.).

5. Koncepcija sozdaniya avtomatizirovannoj sistemy upravlenija pilotiruemyimi kosmicheskimi poletami na principah setecentricheskogo upravlenija, baz znanij i mul'tiagentnyh tehnologij / V. A. Solov'ev, V. E. Ljubinskij, P. O. Skobelev, O. I. Lahin // Tr. XVIII Mezhdunar. konf. «Problemy upravlenija i modelirovanija v slozhnyh sistemah». Samara, 2016. S. 123–131. (In Russ.).

6. Pospelov D. A. Mnogoagentnye sistemy – nastojashhee i budushhee // Informacionnye tehnologii i vychislitel'nye sistemy. 1998. № 1. S. 14–21. (In Russ.).

7. Rassel S., Norvig P. Iskusstvennyj intellekt: sovreennyj podhod. SPb.: Dialektika, 2021. T. 1. 704 s. (In Russ.).

8. Rassel S., Norvig P. Iskusstvennyj intellekt: sovreennyj podhod. SPb.: Dialektika, 2021. T. 2. 480 s. (In Russ.).

9. Wooldridge M., Jennings N. R. Intelligent agents: Theory and practice // Knowledge Engin. Rev. 1995. Vol. 10, no 2. P. 115–152. doi: 10.1017/S0269888900008122.

10. Zykov A. A. Osnovy teorii grafov. M.: Vuzovskaja kniga, 2004. 664 s. (In Russ.).

11. Berzh K. Teorija grafov i ee primenenija. M.: Inostrannaja literatura, 1962, 319 s. (In Russ.).

12. Ore O. Teorija grafov. M: Knizhnyj dom «LIBROKOM», 2009. 352c. (In Russ.).

13. Vizing V. G. Dekartovo proizvedenie grafov // Vychislitel'nye sistemy. 1963. № 9. S. 30–43. (In Russ.).

14. Vizing V. G. Ob ocenke hromaticheskogo klassa p-grafa // Diskretnyj analiz. Novosibirsk: In-t matematiki SO AN SSSR, 1964. T. 3. S. 25–30. (In Russ.).

15. Brooks R. L. On colouring the nodes of a network // Mathematical Proc. of the Cambridge Philosophical Society. 1941. Vol. 37. P.194–197.

16. Shannon C. A. Theorem on coloring the lines of a network // J. of Mathematics and Physics. 1949. Vol. 28. P. 148–151.

---

#### Information about the author

**Tatsiana G. Chernousova** – Cand. Sci. (Eng.), Assistant Professor of Bauman Moscow State Technical University (National Research University), 2-nd Baumanskaya st., 5-1, 105005, Moscow, Russia.

E-mail: [anakiz100@gmail.com](mailto:anakiz100@gmail.com)

<https://orcid.org/0000-0002-0064-7918>

Статья поступила в редакцию 19.01.2023; принята к публикации после рецензирования 04.05.2023; опубликована онлайн 23.06.2023.

Submitted 19.01.2023; accepted 04.05.2023; published online 23.06.2023.

---