

## Возможность применения оконного преобразования Фурье и вейвлет-преобразования для цифровой обработки сигналов

С. Г. Подклетнов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет  
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

podklet@yandex.ru

### Аннотация.

*Цель:* рассмотрен вопрос о том, что лучше для анализа сигналов – оконное преобразование Фурье или вейвлет-преобразование. Проанализированы методы цифровой обработки сигналов преобразования Фурье, быстрое преобразование Фурье и вейвлет-преобразование, их достоинства и недостатки.

*Методы:* применяются методы цифровой обработки сигналов: Фурье-преобразование, быстрое преобразование Фурье, оконное преобразование Фурье и вейвлет-преобразование.

*Результаты:* представлено применение данных методов цифровой обработки сигналов (Фурье- и оконного Фурье-преобразования) для анализа стационарных сигналов и вейвлет-преобразования или всплесков – для анализа ярко выраженных нестационарных сигналов.

*Практическая значимость:* сделано сопоставление вейвлет- и Фурье-преобразований. Рассмотрены и проиллюстрированы сходства и различия методов оконного преобразования Фурье и дискретного вейвлет-преобразования. Проведен сравнительный анализ этих двух способов частотно-временного разложения сигналов.

**Ключевые слова:** преобразование Фурье, дискретное преобразование Фурье, быстрое преобразование Фурье (FFT), оконное преобразование Фурье, вейвлет-преобразование, цифровая обработка сигналов

**Для цитирования:** Подклетнов С. Г. Возможность применения оконного преобразования Фурье и вейвлет-преобразования для цифровой обработки сигналов // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2026. Т. 19, № 6. С. 72–84. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-6-72-84.

Original article

## The Possibility of Using the Windowed Fourier Transform and Wavelet Transform for Digital Signal Processing

S. G. Podkletnov

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

podklet@yandex.ru

### Abstract.

*Purpose:* considers the issue of which is better, the windowed Fourier transform or the wavelet transform, for signal analysis. The digital signal processing methods of the Fourier transform, Fast Fourier transform and wavelet transform, their advantages and disadvantages are analyzed.

*Methods:* digital signal processing methods are used: Fourier transforms, Fast Fourier transforms, windowed Fourier transforms and wavelet transforms.

*Results:* the application of these digital signal processing methods (Fourier and windowed Fourier transforms) for the analysis of stationary signals and the wavelet transform or bursts for the analysis of pronounced non-stationary signals is presented.

*Practical significance:* a comparison of the wavelet and Fourier transforms is made. The similarities and differences between the methods of the windowed Fourier transform and the discrete wavelet transform are con-

sidered and illustrated. A comparative analysis of these two methods of time-frequency decomposition of signals is carried out.

**Keywords:** Fourier transform, Discrete Fourier transform (DFT), Fast Fourier transform (FFT), windowed Fourier transform, wavelet transform, digital signal processing

**For citation:** Podkletnov S. G. The Possibility of Using the Windowed Fourier Transform and Wavelet Transform for Digital Signal Processing // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2026. Vol. 19, no. 6. P. 72–84. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-6-72-84.

**Введение.** В математике преобразование Фурье функции  $f$ , зависящей от одной вещественной переменной – интегральное и задается формулой

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx \quad (i - \text{мнимая}$$

единица), которая вычисляет амплитуды при распаде предлагаемой функции на составляющие гармонические колебания с различными частотами. Идея преобразования была высказана еще в начале XIX в. во Франции математиком Жаном-Батистом Жозефом Фурье. При изучении колебаний струны Фурье предложил математическую операцию, преобразующую функцию времени в функцию частоты. Она описывает «амплитуды» или коэффициенты получающиеся при разложении исходной функции на более простые составляющие – гармонические колебания, имеющие разные частоты [1]. Сигнал и его преобразование Фурье показаны на рис. 1.

**Принцип работы преобразования Фурье.**

Преобразование Фурье обрабатывает частоты и определяет вклад каждой из них в исходную функцию. При этом волны перемножаются друг с другом. Примеры:

1. Если синусоидальную волну с частотой 4 умножить на исходную функцию, получится много больших пиков, что означает, что частота 4 вносит вклад в исходную функцию. Средняя высота пиков показывает, насколько велик этот вклад.

2. Если взять синусоидальную волну с частотой 6 и перемножить с исходной функцией, будут большие пики и большие впадины; это значит,

что новый график в среднем равен 0 – частота 6 не влияет на исходную функцию. Умножаем исходную функцию на синусоидальные и косинусоидальные волны и получаем преобразование Фурье для всех частот [1].

Преобразование Фурье бывает нескольких типов:

1. *Дискретное преобразование Фурье (ДПФ).*

Делает из конечной последовательности равноотстоящих выборок функции последовательность с дискретным временем равной длины и равноотстоящих выборок преобразования Фурье (DTFT) [1].

ДПФ требует в качестве входа дискретную функцию, которые часто создаются дискретизацией (выборкой значений из непрерывных функций).

ДПФ с размерностью  $N$ :

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i kn/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1,$$

где  $x_n$  – периодическая последовательность с периодом  $N$ ;  $T$  – период сигнала,  $k$  – номера отсчетов,  $n$  – число гармоник.

2. *Обратное преобразование Фурье (ОПФ)* [2] определяется формулой

$$f(x) = \sqrt{\frac{|b|}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-ib\omega x} d\omega,$$

а обратное дискретное преобразование Фурье – формулой

$$x_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-2\pi i kn/N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

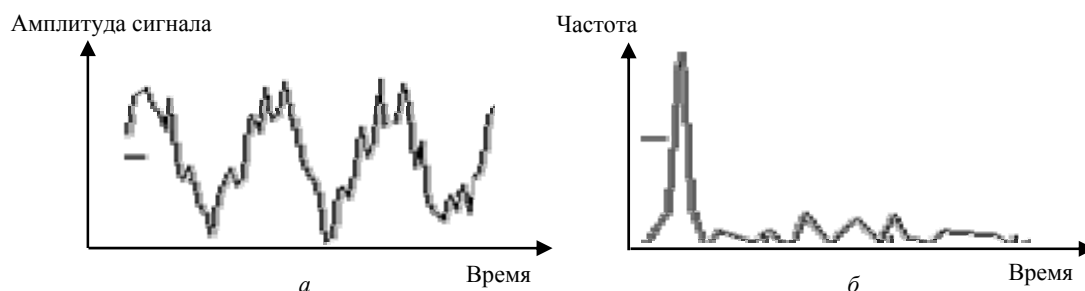


Рис. 1. Сигнал (а) и его преобразование Фурье (б)  
Fig. 1. Signal (a) and its Fourier transform (b)

Формула обратного (инверсного) дискретного преобразования Фурье (Inverse Discrete Fourier Transform) показывает, как восстановить по дискретному спектру сигнал во временной области. Формула позволяет по отсчетам спектра вычислить первоначальные отсчеты исходного дискретного сигнала.

Особенности ОПФ:

- требует в качестве входа дискретную функцию, часто создаваемую дискретизацией (выборкой значений из непрерывных функций);
- является линейным преобразованием, которое переводит вектор временных отсчетов в вектор спектральных отсчетов той же длины;
- помогает решать дифференциальные уравнения в частных производных и выполнять такие операции, как свертки;
- используется в статистике при анализе временных рядов [3].

3. *Быстрое преобразование Фурье (БПФ)*. За счет сокращения операций суммирования и умножения БПФ более быстро вычисляет ДПФ, при получении коэффициентов ДПФ. Идея алгоритма БПФ: последовательность из  $N$  точек разбивается на две более короткие, из ДПФ которых можно получить ДПФ исходной  $N$ -точечной последовательности [4].

Особенности БПФ:

- разлагает матрицу ДПФ на множители в произведении разреженных (в основном нулевых) множителей;
- снижает сложность вычисления ДПФ с  $O(n^2)$  которая возникает, если просто применить определение ДПФ, до  $O(n \log n)$ , где  $n$  – размер данных.  $O(n^2)$  – это обозначение асимптотической сложности алгоритма, которое означает, что время выполнения алгоритма растет квадратично с увеличением размера входных данных ( $n$ ). Такая сложность часто возникает в алгоритмах с вложенными циклами, когда каждый элемент первого списка обрабатывается с каждым элементом второго списка;
- отличается от стандартного ДПФ тем, что при сокращении операций снижаются суммарные ошибки округления.

Наиболее часто используемый алгоритм БПФ – алгоритм Кули–Тьюки, который рекурсивно разбивает ДПФ любого составного размера на меньшие ДПФ [5].

*Области применения БПФ*. При цифровой обработке сигналов (ЦОС) для анализа и обработки данных в частотной области. При цифровой обработке сигналов часто требуется преобразовывать сигналы из временной области в частотную, а также обратно с целью [6]:

- сжимать данные;
- рассчитывать алгоритмы модуляции (OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing) в Wi-Fi, 5G);
- обрабатывать медицинские и радиолокационные сигналы [7];
- анализировать спектр сигнала;
- фильтровать сигналы.

При БПФ получается частотный спектр входной дискретной последовательности данных. Полученные результаты оцениваются в зависимости от приложенной задачи, например [8]:

- сравнение с базовыми шаблонами – имея заданные шаблоны спектров и сравнив их с исходной спектрограммой, определим различия или сходства между сигналами;
- оценка частотных компонент – оценка частот исходного сигнала с помощью амплитудно-частотного графика;
- фильтрация и отбор – можно выделить интересные частоты, убрать шумы, проанализировать спектрограмму.

4. *Оконное преобразование Фурье (ОкПФ)*.

Применяется для анализа нестационарных сигналов, более сложный вариант преобразования Фурье. Удобно применять, если в целом нестационарный сигнал можно разбить на простейшие сегменты, или по-другому окна, внутри которых его можно считать стационарным. Результатом проведения оконного преобразования Фурье будет спектр произведения сигнала и оконной функции, а не спектр исходного сигнала [9].

Особенности ОкПФ:

- разрешение по осям будет постоянным, и задачи должны иметь равномерную информацию по частотам;
- окно более узкое, значит, разрешение более низкое по частоте и более высокое по времени;
- ввод весовых коэффициентов для выборки данных в окне для подавления краевых эффектов разрывности [10].

ОкПФ используется, например, для синтеза частотных фильтров [11].

5. *Частотно-временное оконное преобразование Фурье*. Функция ОПФ переводится в функ-

цию с независимыми переменными по частоте и времени по формуле

$$F(t, \omega) = \int_{\tau} f(t - \tau) \omega(\tau) e^{-ixw} d\tau,$$

где  $f(t)$  – исходный сигнал;  $\tau$  – параметр сдвига окна относительно времени  $t$ ;  $\omega$  – частота;  $w$  – оконная функция (вес), которая определяет интервал анализа и может быть вещественной и симметричной.

Можно сказать, что спектральный анализ в этом случае – это скалярное произведение базисной функции и сигнала, и этот спектральный анализ проводит обработку и по времени, и по частоте.

6. *Вейвлет-преобразование* (англ. Wavelet transform). Вейвлет-преобразование или, как говорят математики, «всплеск», «маловолновая функция» и др. – математическое преобразование, переводящее сигнал из временной области в частотно-временную, результат показан на рис. 2.

Вейвлет-преобразование осуществляется вейвлетами – функциями, определяющими вид анализируемого сигнала после завершения преобразования [12]. Вейвлет-преобразование подразделяется на два вида: дискретное (ДВП) и непрерывное (НВП). Они различаются тем, что непрерывное вейвлет-преобразование имеет бесконечное количество вейвлетов с разными масштабами и сдвигами, так как имеет непрерывный масштаб и сдвиг, а дискретное вейвлет-преобразование использует ограниченное множество вейвлетов, рассчитанных из небольшого количества значений масштаба и сдвига.

Вейвлет-преобразование сигнала  $f(t)$  определяется формулой [13]

$$f(t) = c_0 \psi(t) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{jk} \phi_{jk}(t).$$

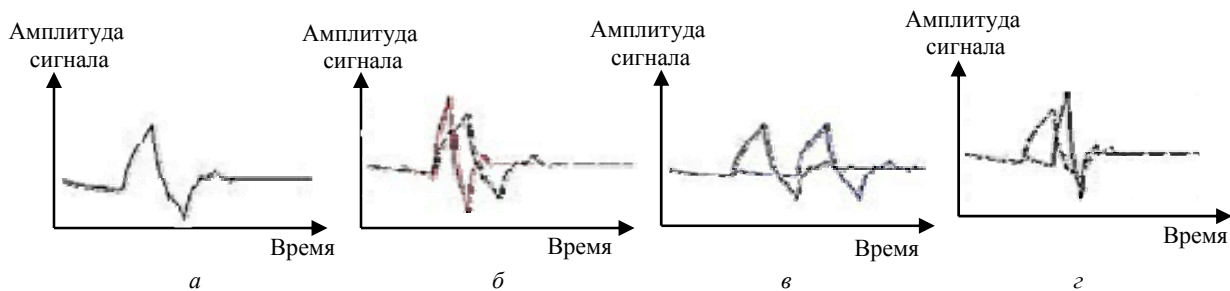


Рис. 2. Вейвлет-преобразование материнского вейвлета: а – материнский вейвлет; б – сжатый вейвлет; в – сдвинутый вейвлет; г – вейвлет, подвергнутый комбинированному преобразованию

Fig. 2. Wavelet transform of the mother wavelet: а – mother wavelet; б – compressed wavelet; в – shifted wavelet; г – wavelet subjected to the combined transformation

Эта формула показывает разложение сигнала  $f(t)$  по базисным функциям (вейвлетам), что позволяет получить частотно-временное представление сигнала, т. е. анализировать его локальные особенности и изменения спектрального состава во времени. Базисные функции получаются из материнского вейвлета  $f(t)$  посредством двух основных операций:

- сжатия в  $2^j$  раз  $\phi_{jk}(t) = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$ ;
- сдвиг на  $2^{-jk}$   $\phi_{10}(t) = \sqrt{2} \phi(2t)$ .

При ДВП вейвлеты представлены дискретными выборками или сигналами.

Особенности ДВП [14]:

- шаг сетки задан конкретным значением по частоте и времени. Тем самым ликвидируется избыточность сигнала и получается возможность восстановления коэффициентов исходного сигнала по полученным наборам значений [15];

- выборки неявно заданной функции материнского вейвлета вычисляются с помощью рекуррентных соотношений с удвоением разрешения при переходе к следующему масштабу или уровню [16];

- сигнал раскладывается на набор вейвлетов, ортогональных к их параллельному переносу и масштабированию. Вектор полученных данных имеет ту же длину, что и входной, многие данные равны или почти равны нулю [17];

- применяется в кодировании сигналов как первый этап компрессии данных для уменьшения избыточности в представлении дискретных сигналов [18];

- достоинство: быстрое преобразование с пирамидальным алгоритмом вычислений, однако не для всех типов вейвлетов [19].

При НВП вейвлеты представлены непрерывными выборками сигналов, что точнее. Особенности непрерывного вейвлет-преобразования показаны на рис. 3 [20]. Значения вейвлет-функции

отражены оттенками серого цвета: от 0 – черный цвет до максимального значения – белый цвет.

Особенности НВП:

– используя  $M$  масштабов, получаем поле  $N \times M$  – плоскость время–частота;

– вычисляет свертку сигнала с вейвлетом, заданного масштабам. Входной сигнал для каждого масштаба имеет ту же длину, что и исходный;

– хорошо применяется для обработки непрерывных и периодических сигналов, которые меняются во времени – сейсмические сигналы, аудио-, видеосигналы и др.;

– получает массив на одно измерение больший, чем введенные данные. Полученное изображение плоскости время–частота позволяет проследить, как меняются частоты в течение всей длительности сигнала, и сравнивать полученный спектр с другими спектрами [21];

– требует, чтобы вейвлет был задан явным образом.

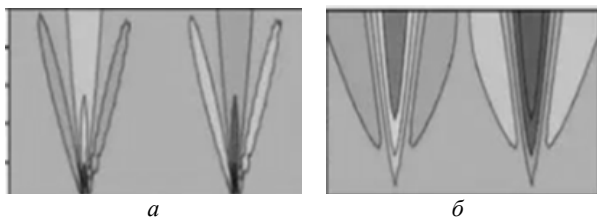


Рис. 3. Непрерывное вейвлет-преобразование простых сигналов: а – преобразование импульсов Кронекера; б – преобразование функций Лапласа

Fig. 3. Continuous wavelet transform of simple signals: а – Kronecker impulse transform; б – Laplace transform of functions

*Общие особенности Фурье- и вейвлет-преобразований:*

– БПФ и ДВП – это линейные операции, создающие структуру данных, которая содержит сегменты различной длины, как правило, заполняя их и превращая в различные векторы данной длины;

– математические операции для матриц, участвующих в преобразованиях, весьма схожи. Оба преобразования, по сути, – это поворот на другую плоскость в пространстве для функций. Матрица оригинальной функции транспонируется в обратную матрицу преобразования как для ДВП, так и для БПФ. При вейвлет-преобразовании получаются сложные базисные функции – материнские вейвлеты, или просто вейвлеты, а сама обработка называется вейвлет-анализом. Тогда как для БПФ будут простейшие тригонометрические функции – косинусы и синусы;

– БПФ и ДВП локализованы по частоте, что полезно при расчете частоты и спектров разложения [22].

*Основные различия Фурье- и вейвлет-преобразований.* «Вейвлет» переводится с английского как маленькая волна, что говорит о том, что вейвлет-функции очень локализованы в пространстве, а функции Фурье – синус и косинус – бесконечны. Преобразование Фурье не позволяет адаптировать частотное и временное разрешения. Вейвлеты же на это способны и могут использовать «разбросанные» вейвлеты при преобразовании в вейвлет плоскости. Разбросанность вейвлетов удобна для выполнения таких действий, как выявление локальных особенностей в представленных образцах, удаление шума и сжатие данных.

Различие между преобразованием Фурье и вейвлет-преобразованием – это различие их базисных функций, нанесенных на частотно-временную плоскость. На рис. 4 показано оконное преобразование Фурье, где окном служит квадратная волна соответствующей окну ширины. Окно для всех частот в ДВП не меняется и точность анализа в частотно-временной плоскости остается постоянной.

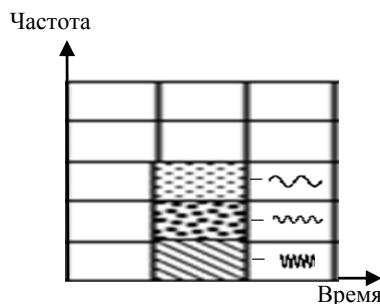


Рис. 4. Базисные функции Фурье и охват частотно-временной плоскости

Fig. 4. Fourier basis functions, frequency-time tiles, and coverage of the frequency-time plan

При вейвлет-преобразовании окно меняется. Короткие базисные функции выделяют разрывы сигнала, длинные базисные функции используются для подробного анализа частоты, поэтому используются как короткие высокочастотные базисные функции, так и длинные низкочастотные. Это именно то, что мы хотим получить при вейвлет-преобразовании. Рис. 5 показывает использование вейвлета Добеши для охвата частотно-временной плоскости с одной вейвлет-функцией.

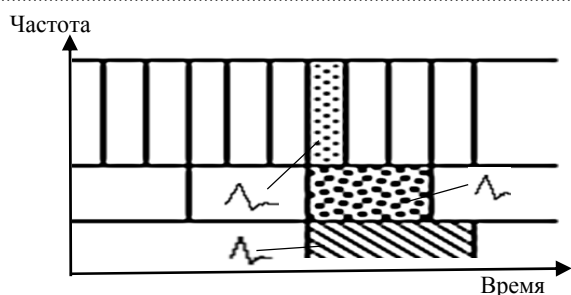


Рис. 5. Базисные функции вейвлета Добеши, частотно-временные плитки и охват частотно-временной плоскости.

Fig. 5. Dabes wavelet basis functions, frequency-time tiles, and frequency-time plane coverage

Нужно еще сказать, что преобразование Фурье всегда использует только функции синус и косинус, а вейвлет-преобразование имеет бесконечное множество возможных базисных функций, что позволяет получать доступ к информации, недоступной другим частотно-временным методам вроде анализа Фурье.

Фурье-преобразование в общем случае разлагает функции по базису ортонормированных функций, представляющих упорядоченный набор функций, в котором норма каждой функции равна 1, а скалярное произведение двух разных функций равно 0, и вектор в  $N$ -мерном пространстве разлагается по ортонормированному базису векторов.

Периодическая функция хорошо разлагается по базису тригонометрических функций с разными частотами. По значению коэффициентов такого разложения видно, что преобладание или отсутствие частот в функции дает амплитудно-частотный анализ данной функции. Это имеет значение для сигналов с колебаниями и с периодическими пространственными структурами: звуковые сигналы, радиосигналы.

Однако преобразование Фурье плохо работает с нестационарными функциями.

Вот простой пример. Рассмотрим 2 сигнала.

Фурье-преобразование может дать одинаковый спектр для разных сигналов. Если сначала по времени был монохромный гармонический сигнал частоты  $\omega$  амплитуды  $A$  от  $-1$  до  $0$ , второго сигнала не было от минус бесконечности до  $0$ , а после  $0$  до  $+1$  пошел монохромный гармонический сигнал точно такой же амплитуды  $A$  и частоты  $\omega$ . После  $+1$  снова сигнала не было до плюс бесконечности.

При восстановлении этих сигналов обратным преобразованием Фурье будут два одинаковых сигнала, которые не совпадают ни с первым сигналом, ни со вторым, поскольку это преобразование не локализует сигналы по времени.

Чтобы исправить данную ситуацию, применяют ОкПФ. Фурье-преобразование при этом делается с небольшими отрезками, или окнами, потом окно смещают от минус бесконечности до плюс бесконечности, получая 2-мерный график спектральной характеристики зависимости амплитуды от частоты и от координаты центра окна. По существу, это корреляция исследуемой функции и синуса (или косинуса) в окне, когда изменяются и координаты окна, и частота синуса [23].

Потом изобрели вейвлет-преобразование, связывающее между собой ширину окна и частоту колебаний синуса в окне. Высокочастотный синус имеет в окне миллиарды периодов и не требует очень широкого окна, но окно малой длины для низкочастотного синуса, если ширина окна много меньше периода этого синуса, тоже не нужно.

За основу взяли функции, которые равны 0 за пределами некоторого условного окна и при сжатии окна увеличивается частота этих функций.

Для разных функций существуют различные вейвлет-преобразования. Необходимо хорошо изучить свойства исследуемой функции и задачи исследования, чтобы сделать правильный выбор вейвлет-преобразования.

**Сопоставление вейвлетов оконному Фурье-анализу.** Оконный Фурье-анализ не позволяет получить высокой степени детализации одновременно во временной и частотной областях: чем уже окно, тем шире носитель спектра и наоборот. Вейвлет-преобразование позволяет получить высокое разрешение по времени и по частоте за счет сдвигов и масштабирования базисной функции [24].

Ключевая особенность вейвлетов – их способность автоматически адаптировать временное и частотное разрешение. Принцип неопределенности Гейзенберга (или лимит Габора–Гейзенберга) для вейвлетов работает так же, как и для преобразования Фурье. Следовательно, вейвлеты также не могут быть локализованы одновременно во временной и частотной областях. При высоком уровне частотной локализации временная локализация хромает. При высоком уровне временной локализации частотная локализация хромает. Теперь, можно применить ОкПФ так же, как вейвлет с таким же результатом, т. е. если вейвлет-преобразование определяется как

$$f(a, b) = \sqrt{\frac{|a|}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt,$$

где  $a$  – масштаб;  $b$  – сдвиг;  $\psi$  – материнский вейвлет.

Противопоставление вейвлетов оконному Фурье-анализу незначительно.

Пусть  $\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \omega\left(\frac{t-b}{a}\right)e^{-j\omega t}$ . Это, разуме-

ется, уже не вейвлет. Однако есть различие в размере носителя в частотной области за счет того, что спектры оконных функций стремятся к нулю гораздо медленнее, чем спектры вейвлетов. Существуют «переходные формы» между оконным Фурье-анализом и вейвлетом, например преобразование Габора или функция Габора:

$$f(x) = e^{-(x-x_0)^2/a^2} e^{-ik_0(x-x_0)},$$

где  $x$  – ширина окна;  $x_0$  – центр окна, вместо синусного/косинусного преобразования, которое можно рассматривать и как оконное преобразование Фурье с гауссовым окном, и как вейвлет.

Преимущество вейвлетов не в том, что они позволяют обойти соотношение неопределенности. Улучшая временное разрешение, ухудшаем частотное, и наоборот. Однако можно маневрировать. Оконное преобразование Фурье для всех частот не даст временного разрешения лучше, чем определяется длиной из-за определенной длины окна. Вейвлеты имеют разную длину для разных частот – «самоподобие частот», и чем выше частота, тем выше временное разрешение. А на практике низкочастотные составляющие более устойчивы, а высокочастотные составляющие более изменчивы по амплитуде во времени. Вейвлеты позволяют делать «самоподстройку под скорость изменений». Разумеется, это только часто встречающееся свойство, но оно позволяет попробовать вейвлеты, предполагая, что и в данном случае они будут полезны.

Что лучше, Фурье- или вейвлет-преобразование?

Если используются стационарные процессы, то следует заметить, что вейвлет-анализ даст ту же информацию, как и Фурье-анализ. Обработка информации займет больше времени и будет больше затрат других вычислительных ресурсов на компьютере чем анализ Фурье.

Поэтому вейвлет-анализ имеет смысл применять только тогда, когда обрабатывается исключительно нестационарный процесс и спектр процесса быстро меняется со временем [24].

Выбор между ОкПФ и вейвлет-преобразованием зависит от задач анализа сигналов. Оба метода имеют свои особенности, и каждый из них подходит для разных задач.

Особенности вейвлет-преобразования:

– сдвиг материнской вейвлет-функции осуществляет временную локализацию функции, а растягивая материнскую вейвлет-функцию, получаем частотную локализацию;

– на высокой частоте, что обеспечивается меньшей шириной вейвлета, получаем возможность изучать микроскопические детали в предложенных данных;

– понижая частоту преобразования и тем самым расширяя вейвлет-функцию, получаем возможность изучать больше масштабных особенностей данных;

– применение: вейвлет-преобразование используется для избавления от шума, сглаживания и сжатия данных [25].

Недостатки вейвлет-преобразования:

– данные могут измениться во время преобразования;

– большая трудоемкость при изучении вычисленных на разных масштабах данных вейвлет-анализа [26].

Таким образом, вейвлет-преобразование может иметь преимущество там, где информация размазана по частотам из-за лучшего временного разрешения вейвлет-преобразования, ОкПФ обеспечивает не частотное разрешение, а только временное.

Выбор метода анализа сигнала влияет на качество результатов, так как каждый из них имеет свои особенности и подходит для определенных условий [27].

ОкПФ не позволяет одновременно обеспечить хорошее разрешение по времени и по частоте. Чем уже окно, тем выше разрешение по времени и ниже по частоте. Это может быть нежелательно для задач, в которых информация по частотам распределена неравномерно.

Вейвлет-преобразование, в отличие от классического Фурье-анализа, обеспечивает локализацию как во временной, так и в частотной областях. Сигнал разлагается на компоненты на разных масштабах или частотах, что позволяет выявлять и устранять шум селективно. Вейвлет-преобразование все-таки лучше и более глубоко исследует сигнал, объединяя методы анализа во временной и частотной областях [27].

Таким образом, выбор метода зависит от характеристик сигнала – сложность сигнала, наличие локальных выбросов, отношение сигнал/шум, спектр по частоте, стационарность и др. Нужно правильно оценить сглаживание сигнала и сохра-

нением полезной информации. Недостаточное сглаживание не устранит шум в сигнале, но чрезмерное сглаживание приведет к утрате возможно важных деталей сигнала.

Что лучше – оконное преобразование Фурье или вейвлет-преобразование, покажет анализ данного сигнала. Особенности каждого метода имеют свои области применения, и лучший выбор зависит от того, нужно ли учитывать сложность и нестационарность сигнала или проводить анализ одновременно в частотной и во временной областях.

ОкПФ подходит для анализа нестационарных сигналов. Сигнал разбивается на сегменты (окна), в пределах которых его можно считать стационарным. После оконного преобразования получается трехмерная функция, зависящая от положения окна и частоты.

Недостатки ОкПФ:

- узкое окно обеспечивает временное разрешение, а широкое – частотное;

- приходится выбирать окно «раз и навсегда», тогда как разные участки сигнала могут потребовать применения разных окон;

- позволяет оценить лишь спектр исходного сигнала, так как использование оконных функций ведет к искажению сигнала. Вейвлет-преобразование применяется для анализа нестационарных процессов. Сигнал анализируется разложением по базисным функциям, полученным из некоторого прототипа посредством сжатий, растяжений и сдвигов;

- дает двумерную развертку одномерного процесса, при этом частота и время рассматриваются как независимые переменные;

- позволяет выявлять локальные особенности процесса и классифицировать их по интенсивности;

- дает возможность отслеживать динамику частотного состава процесса во времени.

*Важно:* вейвлет-преобразование не имеет единого набора базисных функций, в отличие от преобразования Фурье, которое использует только функции синус и косинус.

Оба преобразования содержат одинаковый объем информации из сигнала. Но выбор представления делает определенный тип информации более доступным, а другой – менее доступным.

Что это за типы информации? Это характеристики локализации интересующих объектов, которые должны соответствовать разрешению выбранного представления во временной области или во временной шкале.

**Многообразие вейвлетов и много разрешающий анализ.** Для вейвлет преобразования надо выбрать материнский вейвлет. Вейвлет функций существуют довольно много. Самая простая вейвлет-функция это вейвлет Хаара или простая прямоугольная ступенчатая функция – грубая по качеству, но быстрая в расчетах. Более сложные вейвлеты Добеши при заданном числе исчезающих моментов достигают хорошей гладкости, что важно для сигналов имеющими структуру с полиномиальными трендами.

Нужно отметить место, которое занимают вейвлеты комплексной структуры, например комплексный Морлет-вейвлет – вейвлет, состоящий из комплексной экспоненты или несущей, умноженной на гауссово окно или огибающую. Морлет-вейвлет – строгий, но обеспечивает локализацию в частотно-временной плоскости. Гауссова огибающая вейвлета Морлета создает плавные переходы, минимизируя дефекты анализа.

В сравнении с вейвлетом дискретное вейвлет-преобразование, основанное на теории много разрешающего анализа Малла, использует банк фильтров для эффективной декомпозиции сигнала. Пространство функций разлагается на вложенную последовательность подпространств разного масштаба, каждое из которых содержит информацию определенного уровня детализации.

Быстрый алгоритм дискретного вейвлет-преобразования с вычислительной сложностью  $O(N)$  оказывается даже более эффективным, чем БПФ для многих практических задач.

В медицинской диагностике вейвлет-анализ особенно удобен, так как обычная фильтрация искажает клинически значимые компоненты, а электрокардиограммы содержат информацию на разных временных масштабах: медленные изменения базовой линии, высокочастотные мышечные артефакты, QRS-комплексы длительностью 70...130 мс.

Вейвлет-декомпозиция позволяет сохранять диагностическую информацию, избирательно подавлять шумы на каждом масштабе. Особенно ценна способность локализовать патологические события во времени – критически важное преимущество для выявления преходящих нарушений ритма.

В медицине кроме ЭКГ используются еще и энцефалограммы, которые характеризуются большой нестационарностью мозговой активности. Вейвлет-анализ выявляет когнитивные процессы

эпилептические разряды, определяет стадии сна. Открывает новые возможности в понимании работы мозга, показывает возможность одновременного анализа медленных волн сна и быстрых веретен.

Вейвлеты применяются еще и при финансовых расчетах при анализе изменения цен во времени. Здесь существуют тренды совершенно разной длительности – от коротких флуктуаций в течение дня до длительных многолетних циклов. Вейвлет-декомпозиция может хорошо отделить эти компоненты и найти характерные изменения рынка и незаметные закономерности [27].

Вейвлет- и Фурье-преобразования нестационарного сигнала на языке MatLab [28].

На языке MatLab обработан нестационарный сигнал, состоящий из двух гармоник с частотой 50 и 120 Гц. Сигнал обработан Фурье преобразованием и непрерывным вейвлет-преобразованием `mexh`.

Сигнал показан на рис. 6 и 7, результат обработки Фурье преобразованием – на рис. 8 результат обработки непрерывным вейвлет-преобразованием `mexh` показан на рис. 8, б.

Листинг исходного сигнала (рис. 6):

```
>> t=0:0.001:0.6;  
>> x=(t<0.256).*sin(2*pi*50*t)-  
    (t>=0.256).*sin(2*pi*120*t);  
>> plot(x(1:400));  
>> grid on;  
>> xlabel('Время');  
>> ylabel('Амплитуда');  
>> title('Нестационарный сигнал');
```

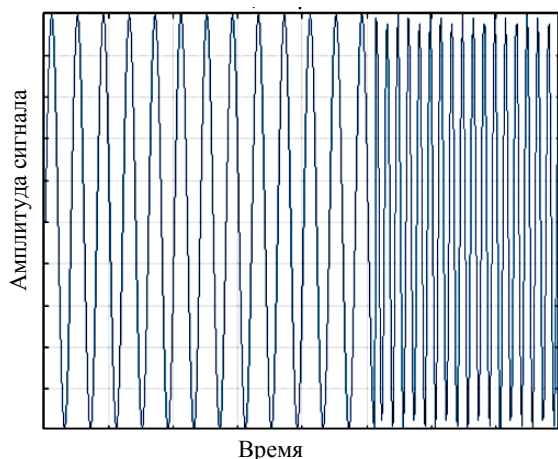


Рис. 6. Нестационарный сигнал, состоящий из двух гармоник с частотой 50 и 120 Гц

Fig. 6. A non-stationary signal consisting of two harmonics with frequencies of 50 and 120 Hz

Спектральная характеристика нестационарного сигнала, будет практически неотличима от ситуации со стационарным сигналом (см. рис. 4).

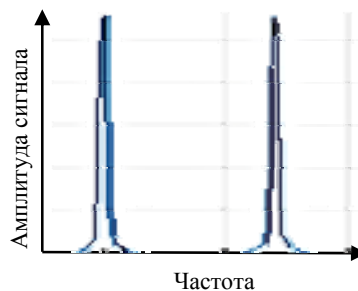


Рис. 7. Спектральная характеристика сигнала, изображенного на рис. 6  
Fig. 7. Spectral characteristics of the signal shown in Fig. 6

В ней выделяются два пиковых значения, соответствующие доминирующим частотам 50 и 120 Гц. Действительно, эти частоты присутствуют в сигнале, однако не одновременно.

Рассмотрены два различных сигнала, однако преобразование Фурье дало одинаковый результат. Не выявлено, присутствуют ли частоты в сигнале в течение всего времени или на конкретных промежутках времени.

Не представляет проблемы, если время каждой из этих частотных составляющих в сигнале неважно. Однако если это не так, стоит отказаться от классического преобразования Фурье. Данные недостатки повлияли на развитие вейвлет-преобразования, которое было создано для того, чтобы выявлять с большей точностью локальные особенности сигналов. На последнем изображении видно, что сначала в сигнале присутствует одна частота, а потом, в середине временного интервала, она меняется на другую. Таким образом, преобразование Фурье дает глобальную информацию о спектральных характеристиках сигнала в исследуемой частотной области, а вейвлет-преобразование – локальную информацию в тесное изменение характеристик сигнала во времени.

Обработка сигнала непрерывным вейвлет преобразованием с помощью MatLab (функция `mexh`) представлена на рис. 8. Цвет – значение вейвлет функции: 0 – черный цвет, максимальное значение – белый.

Листинг нестационарного сигнала (рис. 8):

```
>> t=0:0.001:0.6;  
>> x=sin(2*pi*50*t)+sin(2*pi*120*t);  
>> wname='mexh';  
>> Fc=centfrq(wname);  
>> F_min=8;  
>> F_max=256;  
>> a_max=Fc/F_min/0.001;
```

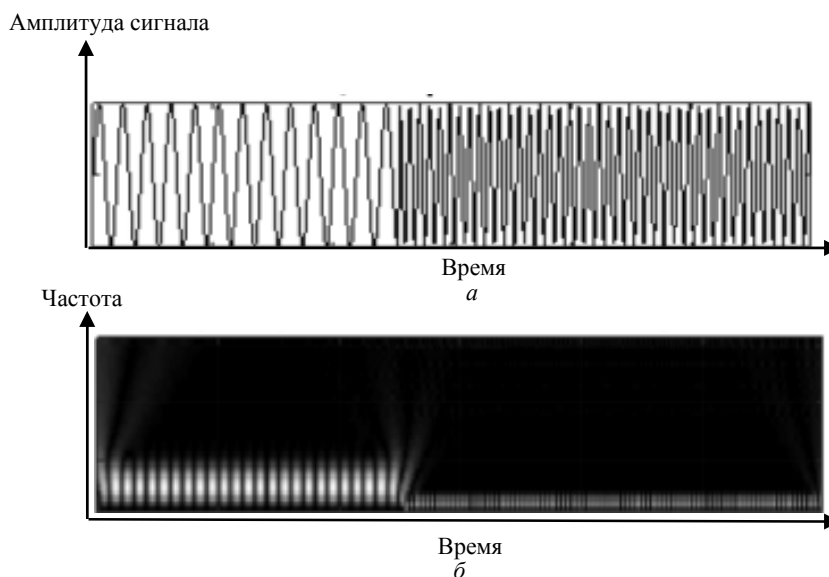


Рис. 8. Нестационарный сигнал (а) и его вейвлет-преобразование (б)

Fig. 8. An unsteady signal (a) and its Wavelet transform (b)

```
>> a_min=Fc/F_max/0.001;
>> a=a_min:1:a_max;
>> C=cwt(x,a,wname);
>> figure;
>> subplot(2,1,1);
>> plot(t,x,'k');
>> xlabel('Время');
>> ylabel('Амплитуда');
>> title('Нестационарный сигнал');
>> subplot(2,1,2);
>> imagesc(t,a,abs(C));
>> axis xy;
>> grid on;
>> xlabel('Время');
>> ylabel('Масштаб');
>> title('Вейвлет-преобразование нестационарного сигнала').
```

**Заключение.** Выбор анализа сигнала должен следовать из условия поставленной задачи. Например, при наблюдении сигнала во времени с применением преобразования Фурье будут получены результаты, усредненные по всей длительности сигнала. В этом случае целесообразнее применять вейвлет-преобразование. Также необходимо обращать внимание на необходимую точность при анализе сигнала. С увеличением точности увеличивается время анализа сигнала. Таким образом, основная задача заключается в выборе подходящего метода для анализа сигнала, чтобы наиболее точно определить необходимые характеристики исследуемого сигнала [29].

Недостатки быстрого и оконного преобразования Фурье по сравнению с вейвлет-преобразованием:

- постоянный масштаб. Для БПФ при всех частотах масштаб остается неизменным. Вейвлет-преобразование меняет масштаб, обеспечивая лучшее представление частоты и времени в разных областях сигнала;

- ограничения разрешающей способности. Разрешающая способность БПФ модифицируется изменением ширины окна. Хорошее разрешение по времени, но плохое по частоте – это не широкое окно, а обратный случай – высокое разрешение по частоте, но плохое по времени;

- выбор окна «раз и навсегда». У БПФ всегда одно окно, для всех участков, что не всегда приемлемо;

- принцип неопределенности Гейзенберга. Невозможно точно определить, какая частота присутствует в сигнале в конкретный момент времени. Вейвлет-преобразование осуществляет частотно-временное представление сигнала и ликвидирует влияние этого принципа;

- вейвлет-преобразование может быть предпочтительнее БПФ и оконного преобразования Фурье в случаях, когда информация по частотам распределена неравномерно [30].

Быстрое преобразование Фурье имеет постоянный масштаб в любой момент времени для всех частот. Это нежелательно для задач, в которых более высокочастотные составляющие изменчивы по амплитуде во времени, а низкочастотные более устойчивы. В таких случаях свойство вейвлетов «самоподстраиваться под скорость изменений» может быть полезным.

Кроме того, вейвлет-преобразование работает быстрее, чем преобразование Фурье, и для него проще написать программу.

Таким образом, выбор между быстрым преобразованием Фурье и вейвлет-преобразованием зависит от конкретных задач анализа сигналов.

Дополнительные преимущества вейвлет-преобразования:

- анализ данных на различных масштабах. Вейвлет-преобразование позволяет точно определять наличие и место незаметных особенностей во времени;

- возможность анализировать кратковременные локальные особенности сигналов. С помощью вейвлетов находятся разрывы в сигнале, короткие провалы, незаметные ступеньки;

- сжатие данных. Вейвлет-преобразование не вносит дополнительной избыточности в исходные данные, и сигнал может быть полностью восстановлен с использованием тех же самых фильтров [30];

- очистка данных от шумов и случайных искажений. Отбросив несущественные детали и выполнив обратное преобразование, можно получить сигнал, очищенный от шумов и случайных выбросов;

- многомасштабный анализ речи. Вейвлеты позволяют выделять в речевом сигнале одновременно как его основные параметры, так и короткоживущие высокочастотные явления.

Некоторые недостатки вейвлет-преобразования:

- амплитудные искажения. Вейвлет-преобразование – это фильтр, «вырезающий» из спектра сигнала гармонические составляющие в диапазоне частот, который определяется масштабом и частотой вейвлета [31];

- погрешности. Вейвлет-преобразование приводит к результирующим погрешностям, иногда достигающим до 64 % от результатов корректного классического спектрального преобразования [32];

- сложность сопоставления результатов. Результаты использования вейвлетов различного масштаба и частоты плохо сопоставимы между

собой из-за неконтролируемого и нелинейного изменения частотной полосы и эффекта перекрытия полос;

- относительная сложность. Вейвлетные преобразования могут быть сложными для практического использования [33];

- невозможность полного восстановления сигнала. В некоторых случаях интерполированные фильтры не позволяют полностью восстановить сигнал [34];

- увеличение временной неопределенности фильтра. С ростом уровня разложения увеличивается временная неопределенность фильтра (искажения в полосе пропускания).

Методы улучшения вейвлет-преобразования:

- Прогрессивное вейвлет-сжатие. Информация о коэффициентах вейвлет-преобразования формируется в порядке убывания их визуальной значимости [34].

- Конвейерная структура. При выделении памяти и вычислениях происходят меньшие аппаратные затраты.

- Лифтинг-схема. В схеме лифтинга сигнал разделяется. После этого по сигналу проводится серия операций свертки с накоплением. Лифтинг-схема для своих целей использует факт взаимной корреляции между близлежащими отсчетами любого физического сигнала, что уменьшает избыточность сигнала. Лифтинг-схема также позволяет вносить адаптивность в свою структуру, улучшать характеристики и конструировать новые вейвлеты. Позволяет разделить обработку независимых данных на несколько блоков вычисления.

- Унификация модуля умножителя-сумматора. Сокращает объем потребляемых ресурсов и улучшает эффективность вычисления.

- Введение адаптивности. Позволяет повышать качество вейвлет-коэффициентов, при этом не нарушаются свойства вейвлет-преобразования.

### Список литературы

1. Винер Н., Пейли Р. Преобразование Фурье в комплексной области / пер. с англ. Ф. В. Широкова. М.: Наука, 1964.

2. Resnikoff H. L., Wells R. O. Wavelet analysis: The scalable structure of information. Springer, 1991.

3. Meyer Yu. Wavelets: Algorithms and Applications, Philadelphia; SIAM, 1993.

4. Истомина Т. В., Чувькин Б. В., Щеголев В. Е. Применение теории Wavelets в задачах. Обработка информации. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2000.

5. Кравченко В. Ш., Рвачев В. А. Вейвлет-системы и их применение в обработке сигналов // Зарубежная радиоэлектроника. 1996. № 4. С. 3–20.

6. Новиков И. Я., Стечкин С. Б. Основы теории всплесков // Успехи математических наук. 1998. № 6. С. 53–128.

7. Новиков Л. В. Основы вейвлет-анализа сигналов. СПб: Санкт-Петербург, 1999. 152 с.

8. Новиков Л. В. Спектральный анализ сигналов в базисе вейвлетов // Науч. приборостроение. 2000. № 3. С. 57–64.

9. Потемкин В. Г. Введение в MatLab. М.: Диалог, 2000. 247 с.
10. Применение цифровой обработки сигналов / под ред. Оппенгейма Э. М.: Мир, 1980. 552 с.
11. Sveldens W. Wavelets: what's next? // Proc. IEEE. 1996. Vol. 84. P. 680–685.
12. Дьяконов В., Абраменкова И. MatLab. Обработка сигналов и изображений. СПб.: Питер, 2002. 608 с.
13. Дремин И. Л., Иванов О. В., Нечитайло В. А. Вейвлеты и их использование // Успехи физических наук, 2001. Т. 171, № 5. С. 465–501.
14. Mallat S. Multiresolution approximation with multiple resolutions and wavelets // Trans. of the Am. Math. Soc. Vol. 315. 1989. P. 69–88.
15. Гэльдэнберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. Цифровая обработка сигналов. М.: Радио и связь, 1985.
16. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989.
17. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. М.: Радио и связь, 1985.
18. Гришенцев А. Ю., Коробейников А. Г., Арустамов С. А. Цифровые широкополосные системы связи. Ч. 2. Оконные и вейвлет-функции и преобразования. СПб.: ИТМО, 2019.
19. Воробьев В. И., Грибунин В. Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. СПб.: ВУС, 1999.
20. Mallat S. Theory of signal decomposition with multiple resolutions: a wavelet representation // IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence. 1989. Vol. 11. P. 674–693.
21. Shapiro J. Embedded image encoding using null trees of wavelet coefficients // IEEE Trans. on Signal Proc. 1993. Vol. 41, no. 12. P. 3445–3462.
22. Said A., Perlman U. A new fast and efficient image codec based on splitting the set into hierarchical trees // IEEE Trans. on Circuits and Syst. for Video Technol. 1996. Vol. 6. P. 243–250.
23. Encoding images using a wavelet transform / M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, I. Dobechi // IEEE Trans. on Image Proc. 1992. Vol. 1, no. 2. P. 205–220.
24. Яковлев А. Н. Введение в вейвлет-преобразования. Новосибирск: Новосибирский гос. техн. ун-т, 2003.
25. Torrence Ch., Compo G. A practical guide to wavelet analysis // Bull. of the Am. Meteorol. Soc. 1997. Vol. 79 (1). P. 61–78. doi:10.1175/1520-0477(1998)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2.
26. Чуй С. Введение в вейвлеты / пер. с англ. Я. М. Жилейкин. М.: Мир, 2001.
27. Sejdich E., Djurovich I., Stankovich L. Quantitative performance analysis of scalogram as instantaneous frequency estimator // IEEE Trans. on Signal Proc. 2008. Vol. 56 (8). P. 3837–3845. doi: 10.1109/TSP.2008.924856. ISSN 1053-587X. S2CID 16396084.
28. Федорчук В. С. Сравнение Фурье- и вейвлет-преобразований // Синергия наук. 2018. № 22. С. 1634–1641.
29. Grossmann A., Morlet J. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // J. on Math. An. (SIAM). 1984. Vol. 15. P. 723–736.
30. Левкович-Маслюк Л. Дайджект вейвлет-анализа в двух формулах и 22 рисунках // Компьютерра. 1998. Т. 236. № 8. С. 31–37.
31. Фарков Ю. А. Ортогональные всплески на локально компактных абелевых группах // Функциональный анализ и его приложения. 1997. Т. 31, № 4. С. 86–88.
32. Dobeshi I. Orthonormal wavelet bases with compact support. // Communications in Pure and Appl. Math. 1988. Vol. 41. P. 909–996.
33. Gagnon L., Lina J. M. Symmetric Dobechi wavelets and numerical solutions of NLS equations // Phys. of the Earth. Answer. Math. 1994. № 27. P. 8207–8230.
34. Wavelets and their application / an ed. Mary Beth Ruskai. Boston: Jones and Barlett, 1992.

#### Информация об авторе

**Подклетнов Сергей Георгиевич** – канд. техн. наук, доцент кафедры вычислительной техники СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: podklet@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0001-6617-5901>

#### References

1. Viner N., Pejli R. Preobrazovanie Fur'e v kompleksnoj oblasti / per. s angl. F. V. Shirokova. М.: Nauka, 1964 (In Russ.).
2. Resnikoff H. L., Wells R. O. Wavelet analysis: The scalable structure of information. Springer, 1991.
3. Meyer Yu. Wavelets: Algorithms and Applications, Philadelphia; SIAM, 1993.
4. Istomina T. V., Chuvykin B. V., Shhegolev V. E. Primenenie teorii Wavelets v zadachah. Obrabotka informacii. Penza : Izd-vo Penz. gos. un-ta, 2000. (In Russ.).
5. Kravchenko V. Sh., Rvachev V. A. Veyvlet-sistemy i ih primeneniye v obrabotke signalov // Zarubezhnaya radioelektronika. 1996. № 4. S. 3–20. (In Russ.).
6. Novikov I. Ja., Stechkin S. B. Osnovy teorii vspleskov // Uspehi matematicheskikh nauk. 1998. № 6. S. 53–128. (In Russ.).
7. Novikov L. V. Osnovy veyvlet-analiza signalov. SPb.: Sankt-Peterburg, 1999. 152 s. (In Russ.).
8. Novikov L. V. Spektral'nyj analiz signalov v bazise veyvletov // Nauch. priborostroenie. 2000. № 3. S. 57–64 (In Russ.).

9. Potemkin V. G. *Vvedenie v MatLab*. M.: Dialog, 2000. 247 s. (In Russ.).
10. *Primenenie cifrovoj obrabotki signalov / pod red. Oppengejma Je. M.*: Mir, 1980. 552 s. (In Russ.).
11. Sveldens W. Wavelets: what's next? // *Proc. IEEE*. 1996. Vol. 84. P. 680–685.
12. D'jakonov V., Abramenkova I. *MatLab. Obrabotka signalov i izobrazhenij*. SPb.: Piter, 2002. 608 s. (In Russ.).
13. Dremmin I. L., Ivanov O. V., Nechitajlo V. A. *Vejvlety i ih ispol'zovanie // Uspehi fizicheskikh nauk*, 2001. T. 171, № 5. S. 465–501. (In Russ.).
14. Mallat S. Multiresolution approximation with multiple resolutions and wavelets // *Trans. of the Am. Math. Soc.* Vol. 315. 1989. P. 69–88.
15. Gjel'denberg L. M., Matjushkin B. D., Poljak M. N. *Cifrovaja obrabotka signalov*. M.: Radio i svjaz', 1985. (In Russ.).
16. Blejhut R. *Bystrye algoritmy cifrovoj obrabotki signalov*. M.: Mir, 1989. (In Russ.).
17. Nussbaumer G. *Bystroje preobrazovanie Fur'e i algoritmy vychislenija svertok*. M.: Radio i svjaz', 1985. (In Russ.).
18. Grishencev A. Ju., Korobejnikov A. G., Arustamov S. A. *Cifrovyje shirokopolosnye sistemy svyazi. Ch. 2. Okonnye i vejvlet-funkcii i preobrazovanija*. SPb.: ITMO, 2019. (In Russ.).
19. Vorob'ev V. I., Gribunin V. G. *Teorija i praktika vejvlet-preobrazovanija*. SPb.: VUS, 1999. (In Russ.).
20. Mallat S. Theory of signal decomposition with multiple resolutions: a wavelet representation // *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1989. Vol. 11. P. 674–693.
21. Shapiro J. Embedded image encoding using null trees of wavelet coefficients // *IEEE Trans. on Signal Proc.* 1993. Vol. 41, no. 12. P. 3445–3462.
22. Said A., Perlman U. A new fast and efficient image codec based on splitting the set into hierarchical trees // *IEEE Trans. on Circuits and Syst. for Video Technol.* 1996. Vol. 6. P. 243–250.
23. Encoding images using a wavelet transform / M. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, I. Dobechi // *IEEE Trans. on Image Proc.* 1992. Vol. 1, no. 2. P. 205–220.
24. Jakovlev A. N. *Vvedenie v vejvlet-preobrazovanija*. Novosibirsk: Novosibirskij gos. tehn. un-t, 2003. (In Russ.).
25. Torrence Ch., Compo G. A practical guide to wavelet analysis // *Bull. of the Am. Meteorol. Soc.* 1997. Vol. 79 (1). P. 61–78. doi: 10.1175/1520-0477(1998)079<0061:APGTWA>2.0.CO;2.
26. Chuj S. *Vvedenie v vejvlety / per. s angl. Ja. M. Zhilejkin. M.*: Mir, 2001. (In Russ.).
27. Sejdich E., Djurovich I., Stankovich L. Quantitative performance analysis of scalogram as instantaneous frequency estimator // *IEEE Trans. on Signal Proc.* 2008. Vol. 56 (8). P. 3837–3845. doi: 10.1109/TSP.2008.924856. ISSN 1053-587X. S2CID 16396084.
28. Fedorchuk V. S. *Sravnenie Fur'e- i vejvlet-preobrazovanij // Sinergija nauk*. 2018. № 22. S. 1634–1641. (In Russ.).
29. Grossmann A., Morlet J. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // *J. on Math. An. (SIAM)*. 1984. Vol. 15. P. 723–736.
30. Levkovich-Masljuk L. *Dajdzhest vejvlet-analiza v dvuh formulah i 22 risunkah // Komp'juterra*. 1998. T. 236. № 8. S. 31–37. (In Russ.).
31. Farkov Ju. A. *Ortogonal'nye vspleski na lokal'no kompaktnyh abelevyh gruppah // Funkcional'nyj analiz i ego prilozhenija*. 1997. T. 31, № 4. S. 86–88. (In Russ.).
32. Dobeshi I. Orthonormal wavelet bases with compact support. // *Communications in Pure and Appl. Math.* 1988. Vol. 41. P. 909–996.
33. Gagnon L., Lina J. M. Symmetric Dobechi wavelets and numerical solutions of NLS equations // *Phys. of the Earth. Answer. Math.* 1994. № 27. P. 8207–8230.
34. *Wavelets and their application / an ed. Mary Beth Ruskai*. Boston: Jones and Barlett, 1992.

---

#### Information about the author

**Sergei G. Podkletnov** – Cand. Sci. (Eng.), Assistant of the Department of Computer Engineering of the Saint Petersburg Electrotechnical University

E-mail: [podklet@yandex.ru](mailto:podklet@yandex.ru)

<https://orcid.org/0000-0001-6617-5901>

Статья поступила в редакцию 27.04.2026; принята к публикации после рецензирования 05.05.2026; опубликована онлайн 29.06.2026.

Submitted 27.04.2026; accepted 05.05.2026; published online 29.06.2026.

---