

Синтез адаптивной робастной системы управления трикоптером с поворотными винтами в условиях неопределенных аэродинамических коэффициентов, частично неопределенной матрицы входа, влияния внешних возмущений и ограничения входных воздействий

З. Х. Нгуен[✉], В. В. Путов, В. Н. Шелудько

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия
[✉] khanhnguyen.mta@gmail.com

Аннотация. Разработана и исследована адаптивная робастная система управления трикоптером, оснащенная тремя поворотными винтами, в условиях: а) неопределенных аэродинамических коэффициентов; б) частично неопределенной матрицы входа; в) влияния неизвестных внешних возмущений и г) ограничения входных воздействий. При построении полной нелинейной математической модели динамики трикоптера с поворотными винтами в виде уравнений Лагранжа–Эйлера учитывается ограничение входных воздействий. Синтез адаптивной робастной системы управления трикоптером с поворотными винтами осуществляется на базе модифицированного метода вычисления момента (метода Ли–Слотина) и метода аппроксимации функций для устранения влияния неопределенности. Неизвестные внешние возмущения компенсируются гладким скользящим режимом управления с использованием адаптивной оценки верхней границы суммы внешних возмущений и ошибок аппроксимации неопределенных функций в математической модели. Для компенсации негативного влияния входных ограничений создается вспомогательная динамическая система, переменные состояния которой используются для синтеза закона управления. Методом функций Ляпунова доказывается, что разработанный закон управления обеспечивает робастность адаптивной системы и желаемую точность отслеживания командных сигналов. Результаты моделирования с помощью программы MatLab/Simulink иллюстрируют эффективность предложенного закона управления.

Ключевые слова: трикоптер с поворотными винтами, адаптивная робастная система управления, модификация метода вычисления момента, метод аппроксимации функций, гладкий скользящий режим управления, вспомогательная динамическая система, ограничение входных воздействий, частичная неопределенность матрицы входа, неопределенные аэродинамические коэффициенты, неизвестные внешние возмущения, моделирование

Для цитирования: Нгуен З. Х., Путов В. В., Шелудько В. Н. Синтез адаптивной робастной системы управления трикоптером с поворотными винтами в условиях неопределенных аэродинамических коэффициентов, частично неопределенной матрицы входа, влияния внешних возмущений и ограничения входных воздействий // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2024. Т. 17, № 6. С. 84–98. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-6-84-98.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

Synthesis of an Adaptive Robust Control System for a Tricopter with Rotary Propellers under Conditions of Uncertain Aerodynamic Coefficients, Partially Uncertain Input Matrix, Influence of External Disturbances and Input Constraints

Duy Khanh Nguyen[✉], V. V. Putov, V. N. Sheludko

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia
[✉] khanhnguyen.mta@gmail.com

Abstract. In this article, an adaptive robust control system for a tricopter equipped with three rotary propellers is developed and studied under the following conditions: a) uncertain aerodynamic coefficients; b) partially uncertain input matrix; c) influence of unknown external disturbances; and d) input constraints. When constructing a

complete nonlinear mathematical model of the dynamics of a tricopter with rotary propellers in the form of Lagrange-Euler equations, the input constraints are taken into account. The synthesis of an adaptive robust control system for a tricopter with rotary propellers is carried out on the basis of the modified computed torque control (Li-Slotine method) and the function approximation technique to eliminate the influence of uncertainty. Unknown external disturbances are compensated by a smooth sliding mode control using an adaptive estimate of the upper bound of the sum of external disturbances and approximation errors of uncertain functions in the mathematical model. To compensate for the negative effects of input constraints, an auxiliary dynamic system is constructed, the state variables of which are used to synthesize the control law. The robustness of the adaptive system and the desired tracking accuracy of the reference signals are proven using the Lyapunov function method. Simulation results using MatLab/Simulink are presented to illustrate the effectiveness of the proposed control law.

Keywords: tricopter with rotary propellers, adaptive robust control system, modification of the computed torque control, function approximation method, smooth sliding mode control, auxiliary dynamic system, input constraints, partial uncertainty of the input matrix, uncertain aerodynamic coefficients, unknown external disturbances, modeling

For citation: Nguyen Duy Khanh, Putov V. V., Sheludko V. N. Synthesis of an Adaptive Robust Control System for a Tricopter with Rotary Propellers under Conditions of Uncertain Aerodynamic Coefficients, Partially Uncertain Input Matrix, Influence of External Disturbances and Input Constraints // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2024. Vol. 17, no. 6. P. 84–98. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-6-84-98.

Conflict of interest. The authors declare no conflicts of interest.

Введение. В настоящее время особое внимание и инвестиции вкладываются в исследования с передовыми и быстроразвивающимися технологиями, относящиеся к беспилотным летательным аппаратам (БПЛА). Широкий спектр применения систем БПЛА повысил исследовательский интерес к ним и сделал область их проектирования и эксплуатации наиболее динамичным направлением развития в аэрокосмической отрасли. Разработка систем управления мультикоптеров класса БПЛА с существенной нелинейностью характеристик их математических моделей, работоспособных при повышенных летных характеристиках в условиях функционально-параметрической неопределенности, влияния внешних возмущений и ограничения входных воздействий, представляет собой одну из актуальных научных и практических задач в этой области [1]–[3].

За последние несколько лет опубликованы результаты многочисленных исследований, касающихся проектирования систем управления БПЛА в условиях наличия внешних возмущений и параметрической неопределенности. Наиболее распространенные подходы к синтезу адаптивных и нелинейных робастных систем управления – это методы скоростного градиента и псевдоградиента, методы непосредственной компенсации и итеративных процедур синтеза (адаптивного обхода интегратора, Backstepping), методы управления в скользящих режимах и системы с переменной

структурой, методы управления по выходу на базе пассивности и пассивизации, методы построения наблюдателей с сильной обратной связью (методы динамической компенсации), адаптивное нейросетевое управление и др.

Так, статья [3] посвящена использованию адаптивного управления с эталонной моделью и модифицированным законом настройки параметров регулятора, обеспечивающего асимптотическое отслеживание заданного сигнала в условиях неопределенностей, возникающих в результате отказа привода или структурных повреждений, а также вследствие внешних возмущений. В [4] адаптивный регулятор со скользящим режимом ASSTNFT-SMC (Adaptive Smooth Second-order Time-varying Nonsingular Fast Terminal Sliding Mode Control) с радиально-базисной нейронной сетью (RBFNN), разработанный для системы управления БПЛА с неподвижным крылом, решает проблемы, связанные с неопределенностями модели и внешними возмущениями. В [5] разработана адаптивная робастная система управления БПЛА на основе ПИД- (пропорционально-интегрально-дифференцирующего) регулятора и адаптивного управления в скользящем режиме для обеспечения ограниченности всех сигналов системы при неизвестных изменяющихся во времени задержках, неопределенности динамики и неизвестных внешних возмущениях. В [6]–[8] предложены адаптивный метод со скользящим ре-

жимом управления второго порядка на основе расширенного наблюдателя, некаскадное адаптивное управление в скользящем режиме и робастный адаптивный глобальный нелинейный регулятор скользящего режима для улучшения характеристик БПЛА в условиях параметрической неопределенности и больших внешних возмущений.

Для достижения наилучших характеристик сходимости ошибки слежения в [9] разработана новая схема управления БПЛА, эффективная в условиях неопределенности модели и внешних возмущений, использующая метод обхода интегратора и функции производительности с фиксированным временем, сходящейся к любой ожидаемой точности отслеживания в произвольно заданный фиксированный момент времени. В [10] новый закон управления разработан на основе метода адаптивного обхода интегратора для БПЛА с неизвестными массой, моментом инерции и возмущениями. Публикация [11] посвящена разработке системы управления БПЛА, построенной на основе комбинации нечеткого регулятора и регулятора обхода интегратора. Синтезированный закон управления гарантирует, что ошибка слежения произвольно приближается к малой окрестности и не нарушает заданных ограничений по состоянию.

В [12], [13] представлены L_1 -геометрическое адаптивное управление и L_1 -управление на основе нелинейной прогнозирующей модели (L_1 -NMPC) в системе управления БПЛА для оценки неопределенности в модели и ее компенсации. В [14] представлена L_1 -адаптивная система управления БПЛА с неподвижным крылом, обеспечивающая асимптотическую устойчивость в условиях изменяющейся во времени неопределенности и внешних возмущений.

Другой проблемой стали характеристики насыщения привода или входных воздействий, которые часто встречаются при негладких нелинейных ограничениях приводов в БПЛА. Насыщение входных воздействий влияет на способность системы обрабатывать воздействия, которые приближаются к пределам ее возможностей. Это может приводить к различным нелинейным эффектам, например к искажению выходных сигналов, увеличению перерегулирования и ухудшению стабильности системы. Насыщение входных воздействий также может вызывать появление колебаний и неустойчивость из-за наличия ограниче-

ний на входные сигналы [15]. В условиях ограничения входных воздействий важно разработать стратегии управления, позволяющие компенсировать или минимизировать их негативное влияние на общую производительность системы и обеспечить ее стабильность и надежность. Существует немало исследований, предлагающих устранение эффекта ограничения входных воздействий – как положительной μ -модификации Лаврецкого [16], анти-виндап- (anti-windup) схемы [17], управления на основе прогнозирующей модели с учетом ограничения входных воздействий [18], управления с барьерными функциями [19], управления с вспомогательной динамической системой [20]. Для систем управления БПЛА с ограниченными входными воздействиями во всем мире опубликовано немало научных исследований, например [21]–[26], однако в подавляющем большинстве этих публикаций вносятся предложения для квадрокоптеров.

В качестве нелинейного объекта исследования в статье рассматривается трикоптер с поворотными винтами, представляющий собой новую малоисследованную разработку в классе мультикоптеров. Внешний вид трикоптера с поворотными винтами показан на рис. 1, где $X_E Y_E Z_E$ – земная система координат, $X_B Y_B Z_B$ – система координат, связанная с трикоптером; ω_i – скорость вращения i -го винта; α_i – угол наклона i -го винта относительно вертикальной плоскости ($i = 1, 2, 3$).

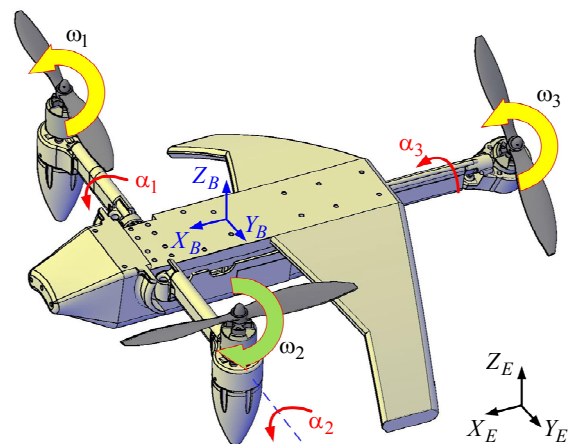


Рис. 1. Трикоптер с поворотными винтами
Fig. 1. Tricopter with rotatory propellers

По сравнению с квадрокоптерами математическая модель трикоптеров с поворотными винтами более сложна. В основном это связано с наличием в модели существенных нелинейностей

и перекрестных связей. Кроме сложности математической модели трикоптеров с поворотными винтами и упомянутых ранее проблем на качество и устойчивость системы управления полетом БПЛА сильно влияют такие неидеальности, как частичная неопределенность матрицы входа или неопределенность аэродинамических коэффициентов. Стоит отметить, что ни в одном из исследований при проектировании систем управления БПЛА не рассматриваются одновременно неопределенность матрицы входа, ограничение входных воздействий, неопределенность параметров математической модели и неизвестные изменяющиеся во времени внешние возмущения. Поэтому управление полетом трикоптеров с поворотными винтами в указанных условиях сталкивается с более сложными, чем описанные, проблемами.

Основная цель данной статьи заключается в разработке адаптивной робастной системы управления трикоптером с поворотными винтами, учитывающей функционально-параметрическую неопределенность параметров системы, частичную неопределенность матрицы входа, а также влияние ограничения входных воздействий и неизвестных внешних аэродинамических возмущений. С этой целью в виде уравнения Лагранжа–Эйлера построена нелинейная математическая модель динамики трикоптера с поворотными винтами, учитывающая ограничение входных воздействий, и разработана адаптивная робастная система управления трикоптером с поворотными винтами на основе модифицированного метода вычисления момента (метода Ли–Слотина) и метода аппроксимации функций для устранения влияния неопределенности. Адаптивный закон управления в скользящем режиме внесен в систему управления с целью компенсации влияния неизвестных внешних возмущений. Вспомогательная динамическая система использована для противодействия негативному влиянию ограничения входных воздействий.

Математическая модель трикоптера с поворотными винтами, построенная с учетом ограничения входных воздействий. Математическая модель трикоптера с поворотными винтами содержит уравнения вращательного и поступательного движений трикоптера в пространстве. Полная динамика трикоптера с поворотными винтами описывается матричным уравнением Лагранжа–Эйлера (подробнее см. [27]–[29]):

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{H}\mathbf{u} + \mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_p(t). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{q} = [\xi^T \ \eta^T]^T \in \mathfrak{R}^6$; $\xi = [x \ y \ z]^T$ – вектор координат центра масс трикоптера; $\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ – вектор углов ориентации трикоптера: $\phi, \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ – угол крена и угол тангажа θ и $\psi \in (-\pi, \pi)$ – угол рыскания; \mathfrak{R}^n – вещественное пространство размерности n ; $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_a \end{bmatrix}$, где $\mathbf{M}_a = m\mathbf{E}_3$, m – масса трикоптера; $\mathbf{O}_{m \times n}$ – нулевая матрица размера $m \times n$; \mathbf{E}_n – n -мерная единичная матрица; $\mathbf{J}_a = \mathbf{P}_{eb}^T \mathbf{J} \mathbf{P}_{eb}$ – симметричная матрица; \mathbf{P}_{eb} – матрица преобразования угловых скоростей углов Эйлера в угловые скорости относительно корпуса трикоптера; $\mathbf{G} = [0 \ 0 \ mg \ 0 \ 0 \ 0]^T$; g – ускорение свободного падения; $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_a - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\eta}^T \mathbf{J}_a) \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{be} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_3 \end{bmatrix}$, где \mathbf{R}_{be} – матрица перехода из связанной с трикоптером системы координат $X_B Y_B Z_B$ в земную систему координат $X_E Y_E Z_E$; $\mathbf{H} \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ – матрица входа, элементы которой зависят от аэродинамических коэффициентов сил и моментов тяги k_f и k_τ ;

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \sin(\alpha_1) & \omega_2^2 \sin(\alpha_2) & \omega_3^2 \sin(\alpha_3) \\ \omega_1^2 \cos(\alpha_1) & \omega_2^2 \cos(\alpha_2) & \omega_3^2 \cos(\alpha_3) \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^6$$

– вектор входных воздействий, зависящий от скоростей и углов наклона винтов, где ω_i – скорость вращения i -го винта; α_i – угол наклона i -го винта ($i = 1, 2, 3$);

$$\mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} -(\mathbf{R}_{be} \mathbf{d}_\xi \mathbf{D}_\xi(\dot{\mathbf{q}}))^T & -(\mathbf{d}_\eta \mathbf{D}_\eta(\dot{\mathbf{q}}))^T \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^6$$

– вектор обобщенных сил и моментов сопротивления воздуха, где $\mathbf{D}_\xi = [u|u| \ v|v| \ w|w|]^T$; $\mathbf{D}_\eta = [\dot{\phi}|\dot{\phi}| \ \dot{\theta}|\dot{\theta}| \ \dot{\psi}|\dot{\psi}|]^T$; $\mathbf{d}_\xi = \text{diag}[d_x \ d_y \ d_z]$; $\mathbf{d}_\eta = \text{diag}[d_\phi \ d_\theta \ d_\psi]$; $d_x, d_y, d_z, d_\phi, d_\theta, d_\psi$ – коэффициенты аэродинамического сопротивления воздуха; u, v, w – элементы вектора скорости центра масс трикоптера в системе координат

$X_B Y_B Z_B$; $\mathbf{F}_p(t) = [\mathbf{F}_c^T \quad \boldsymbol{\tau}_c^T]^T \in \mathfrak{R}^6$ – вектор обобщенных неизвестных внешних возмущений, где \mathbf{F}_c – вектор сил возмущения, $\boldsymbol{\tau}_c$ – вектор моментов возмущения. Фактически $\mathbf{F}_p(t)$ ограничен, т. е. $\|\mathbf{F}_p(t)\| \leq d_M$ – верхняя граница внешних возмущений, значение которой есть неизвестная постоянная величина.

При условиях ограничения входных воздействий матричное уравнение (1) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} = \\ = \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{H}\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_p(t). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{\tau} \in \mathfrak{R}^{6 \times 1}$ – вектор синтезированных управляющих воздействий; $\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathfrak{R}^{6 \times 1}$ – вектор ограниченных (фактических) управляющих воздействий, описываемых нелинейностью типа насыщения;

$$u_i(\tau_i) = \text{sat}(\tau_i) = \begin{cases} \text{sign}(\tau_i)u_M, & \text{если } |\tau_i| \geq u_M; \\ \tau_i, & \text{если } |\tau_i| < u_M, \end{cases} \\ (i = \overline{1, 6}),$$

где $u_M > 0$ – известный предел фактических управляющих воздействий u_i .

Полное описание динамики трикоптера с поворотными винтами (2) используется при проектировании системы управления далее.

Синтез адаптивного робастного закона управления. С целью синтеза закона управления трикоптером с поворотными винтами в условиях функционально-параметрической неопределенности параметров системы, частичной неопределенности матрицы входа, ограничения входных воздействий и неизвестных внешних аэродинамических возмущений сначала перепишем уравнение (2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_k(\mathbf{q}) + \Delta\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{C}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \Delta\mathbf{C}]\dot{\mathbf{q}} + \\ + [\mathbf{G}_k + \Delta\mathbf{G}] = \mathbf{B}(\mathbf{q})[\mathbf{H}_k - \mathbf{H}_0]\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}) - \\ - \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{D}\mathbf{F}_{dB}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_p(t), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\mathbf{M}_k(\mathbf{q})$, $\mathbf{C}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, \mathbf{G}_k , – матрицы с известными элементами-функциями; $(\dot{\mathbf{M}}_k - 2\mathbf{C}_k)$ – кососимметричная матрица; \mathbf{H}_k – невырожденная матрица) – часть матрицы входа с известными постоянными элементами; $(\mathbf{H}_0 = (\mathbf{H}_k - \mathbf{H}))$ – часть матрицы входа с неизвестными постоянными элементами; $\Delta\mathbf{M}$, $\Delta\mathbf{C}$, $\Delta\mathbf{G}$ – неопределенные части матриц $\mathbf{M}(\mathbf{q})$,

$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, \mathbf{G} ; $\mathbf{F}_{dB} = [\mathbf{D}_\xi^T(\dot{\mathbf{q}}) \quad \mathbf{D}_\eta^T(\dot{\mathbf{q}})]^T \in \mathfrak{R}^{6 \times 1}$, $\mathbf{D} = \text{diag}[d_x \quad d_y \quad d_z \quad d_\phi \quad d_\theta \quad d_\psi]$ – матрицы с неизвестными постоянными элементами.

Пусть $\Delta\mathbf{F}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \mathbf{u}) = \Delta\mathbf{M} + \Delta\mathbf{C} + \Delta\mathbf{G} + \mathbf{B}(\mathbf{q}) \times \mathbf{H}_0\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau})$ – неопределенная или немоделируемая часть математической модели трикоптера. Этот вектор неопределенности может быть аппроксимирован с помощью метода аппроксимации функций конечным числом членов ряда Фурье [30]–[33]:

$$\Delta\mathbf{F}(\ddot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, \mathbf{u}) = \mathbf{W}^T \mathbf{z} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad (4)$$

где $\mathbf{W} \in \mathfrak{R}^{\beta \times 6}$ – весовая матрица, содержащая коэффициенты членов ряда Фурье; $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}^{\beta \times 1}$ – вектор базисных функций, содержащий первые β членов ряда Фурье; $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathfrak{R}^{6 \times 1}$ – вектор ошибки аппроксимации ($\|\boldsymbol{\varepsilon}\| < \varepsilon_M$); β – количество используемых базисных функций (β – нечетное).

В общем случае \mathbf{z} и \mathbf{W} можно записать в виде

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\omega t) & \cos(\omega t) & \dots & \sin\left(\frac{\beta-1}{2}\omega t\right) \\ \cos\left(\frac{\beta-1}{2}\omega t\right) \end{bmatrix}^T \in \mathfrak{R}^{\beta \times 1}, \quad \omega > 0;$$

$$\mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} a_{01} & a_{11} & b_{11} & \dots & \frac{a_{\beta-1}}{2} & \frac{b_{\beta-1}}{2} \\ a_{02} & a_{12} & b_{12} & \dots & \frac{a_{\beta-1}}{2} & \frac{b_{\beta-1}}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{0n} & a_{1n} & b_{1n} & \dots & \frac{a_{\beta-1}}{2} & \frac{b_{\beta-1}}{2} \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{n \times \beta},$$

тогда уравнение (3) с учетом (4) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{H}_k\mathbf{u}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{M}_k(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G}_k + \\ + \mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{D}\mathbf{F}_{dB}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{W}^T \mathbf{z} + \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{F}_p(t). \end{aligned}$$

Обозначим разность между фактическими управляющими воздействиями $\mathbf{u}(t)$ и управляющими воздействиями $\boldsymbol{\tau}(t)$, формируемыми регуляторами, как

$$\boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{u}(t) - \boldsymbol{\tau}(t).$$

Введем функцию поверхности скольжения

$$\mathbf{s}(t) = \dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\Lambda}\mathbf{e},$$

где $\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t)$ – вектор ошибок слежения, \mathbf{q}_d – вектор желаемых траекторий трикоптера, $\Lambda \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ – положительно определенная матрица.

Следуя [34], [35], введем «виртуальную эталонную траекторию» $\mathbf{q}_r(t)$ такую, что

$$\dot{\mathbf{q}}_r(t) = \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{s}(t) = \dot{\mathbf{q}}_d(t) + \Lambda \mathbf{e}.$$

Введем вектор

$$\boldsymbol{\tau}_0 = [\mathbf{M}_k(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{C}_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}_r + \mathbf{G}_k].$$

Пусть $\hat{\mathbf{D}}, \hat{\mathbf{W}}, \hat{\rho}$ – оценки матриц \mathbf{D}, \mathbf{W} и неизвестной постоянной величины ρ , где ρ – верхняя граница суммы внешних возмущений и ошибок аппроксимации неопределенных функций в математической модели, т. е. $\rho = d_M + \varepsilon_M$; $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} - \hat{\mathbf{D}}$; $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{W} - \hat{\mathbf{W}}$; $\tilde{\rho} = \rho - \hat{\rho}$ – ошибки оценивания.

Для противодействия негативным влияниям ограничения входных воздействий строится вспомогательная динамическая система [20]:

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}} = \begin{cases} -\mathbf{K}_\zeta \boldsymbol{\zeta} - \frac{\mathbf{s}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{H}_k \boldsymbol{\delta} + 0.5 \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\delta}}{\|\boldsymbol{\zeta}\|^2} \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\delta}, & \|\boldsymbol{\zeta}\| \geq \mu; \\ \mathbf{0}_{6 \times 1}, & \|\boldsymbol{\zeta}\| < \mu, \end{cases} \quad (5)$$

где $\boldsymbol{\zeta} = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3 \ \zeta_4 \ \zeta_5 \ \zeta_6]^T \in \mathfrak{R}^{6 \times 1}$ – вектор состояния вспомогательной системы; $\mathbf{K}_\zeta \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ – положительно определенная матрица; $\mu > 0$ – малое положительное число.

Тогда предлагаемый в статье адаптивный робастный закон управления трикоптером с поворотными винтами будет иметь следующий вид:

$$\boldsymbol{\tau} = [\mathbf{B}\mathbf{H}_k]^{-1} [\boldsymbol{\tau}_0 + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}}\mathbf{F}_{dB} + \hat{\mathbf{W}}^T \mathbf{z} + \mathbf{K}\mathbf{s} - \mathbf{K}_\zeta \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{h}]. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{K}, \mathbf{K}_\zeta \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$ – положительно определенные матрицы; \mathbf{h} – робастный компонент закона управления вида

$$\mathbf{h} = \hat{\rho} \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\|\mathbf{s}\|^2 + \varepsilon_0^2}}, \quad (7)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – любое малое положительное число.

Адаптивные робастные алгоритмы настройки имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{D}}} = \Gamma_1 (\mathbf{B}^T \mathbf{s} \mathbf{F}_{dB}^T - \sigma_1 \hat{\mathbf{D}}); & \dot{\hat{\mathbf{W}}} = \Gamma_2 (\mathbf{z} \mathbf{s}^T - \sigma_2 \hat{\mathbf{W}}); \\ \dot{\hat{\rho}} = \gamma \left(\frac{\|\mathbf{s}\|^2}{\sqrt{\|\mathbf{s}\|^2 + \varepsilon_0^2}} - \sigma_3 \hat{\rho} \right), \end{cases} \quad (8)$$

где $\Gamma_1 \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$, $\Gamma_2 \in \mathfrak{R}^{\beta \times \beta}$ – симметричные, в частности диагональные, числовые матрицы с положительными собственными значениями $\gamma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

В законы настройки параметров (8) также вносятся отрицательные параметрические обратные связи с целью обеспечения робастности замкнутой системы, получившие название σ -модификации [30], [36].

Анализ устойчивости построенной системы управления. Для анализа устойчивости системы управления трикоптером с адаптивными робастными законами управления (6), (7) и алгоритмами настройки (8) рассмотрим следующую функцию Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{M}_k \mathbf{s} + \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\mathbf{D}}^T \Gamma_1^{-1} \tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{W}}^T \Gamma_2^{-1} \tilde{\mathbf{W}}) + \frac{1}{2} \gamma^{-1} \tilde{\rho}^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\zeta}. \quad (9)$$

Производная по времени функции V в силу уравнений замкнутой системы равна

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \mathbf{s}^T \mathbf{M}_k \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}}_k \mathbf{s} + \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{e}} + \\ &+ \text{Tr}(\tilde{\mathbf{D}}^T \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{D}}} + \tilde{\mathbf{W}}^T \Gamma_2^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}) + \gamma^{-1} \tilde{\rho} \dot{\tilde{\rho}} + \boldsymbol{\zeta}^T \dot{\boldsymbol{\zeta}} = \\ &= \mathbf{s}^T [\boldsymbol{\tau}_0 - \mathbf{B}\mathbf{H}_k(\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\delta}) + \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{F}_{dB} + \mathbf{W}^T \mathbf{z} + \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{F}_p] + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{s}^T (\dot{\mathbf{M}}_k - 2\mathbf{C}_k) \mathbf{s} + \mathbf{e}^T \mathbf{s} - \mathbf{e}^T \Lambda \mathbf{e} - \\ &- \text{Tr}(\tilde{\mathbf{D}}^T \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{D}}} + \tilde{\mathbf{W}}^T \Gamma_2^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}) - \gamma^{-1} \tilde{\rho} \dot{\tilde{\rho}} + \boldsymbol{\zeta}^T \dot{\boldsymbol{\zeta}}. \end{aligned}$$

Учитывая свойства кососимметричной матрицы $\mathbf{s}^T (\dot{\mathbf{M}}_k - 2\mathbf{C}_k) \mathbf{s} = 0$ и уравнение (6), можно получить следующий результат:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{s}^T \mathbf{B}\mathbf{H}_k \boldsymbol{\delta} + \text{Tr}[\tilde{\mathbf{D}}^T (\mathbf{B}^T \mathbf{s} \mathbf{F}_{dB}^T - \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{D}}})] + \\ &+ \text{Tr}[\tilde{\mathbf{W}}^T (\mathbf{z} \mathbf{s}^T + \Gamma_2^{-1} \dot{\tilde{\mathbf{W}}})] - \\ &- \mathbf{s}^T \mathbf{K}\mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{K}_\zeta \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{s}^T (-\mathbf{h} + \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{F}_p) + \\ &+ \mathbf{e}^T \mathbf{s} - \mathbf{e}^T \Lambda \mathbf{e} - \gamma^{-1} \tilde{\rho} \dot{\tilde{\rho}} + \boldsymbol{\zeta}^T \dot{\boldsymbol{\zeta}}. \end{aligned}$$

Учитывая (7), (8), последнее выражение преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{s}^T \mathbf{B}\mathbf{H}_k \boldsymbol{\delta} - \mathbf{s}^T \mathbf{K}\mathbf{s} + \mathbf{s}^T \mathbf{K}_\zeta \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{e}^T \mathbf{s} - \mathbf{e}^T \Lambda \mathbf{e} + \\ &+ \boldsymbol{\zeta}^T \dot{\boldsymbol{\zeta}} + \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{F}_p) - \rho \frac{\|\mathbf{s}\|^2}{\sqrt{\|\mathbf{s}\|^2 + \varepsilon_0^2}} + \\ &+ \sigma_1 \text{Tr}(\tilde{\mathbf{D}}^T \dot{\tilde{\mathbf{D}}}) + \sigma_2 \text{Tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \dot{\tilde{\mathbf{W}}}) + \sigma_3 \tilde{\rho} \dot{\tilde{\rho}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Нетрудно также получить следующие неравенства:

$$\begin{cases} \mathbf{e}^T \mathbf{s} \leq \frac{1}{2} (\mathbf{e}^T \mathbf{e} + \mathbf{s}^T \mathbf{s}); \\ \mathbf{s}^T \mathbf{K}_c \boldsymbol{\zeta} \leq \frac{1}{2} (\mathbf{s}^T \mathbf{s} + \boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c \boldsymbol{\zeta}); \\ \tilde{\rho} \hat{\rho} = \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{2} (\tilde{\rho}^2 + \hat{\rho}^2) \leq \frac{1}{2} (\rho^2 - \tilde{\rho}^2); \\ \text{Tr}(\tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{D}}) \leq \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{D}^T \mathbf{D}) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{D}}); \\ \text{Tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}}) \leq \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{W}^T \mathbf{W}) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}}). \end{cases} \quad (11)$$

Имеем также неравенства

$$\begin{cases} -\frac{\|\mathbf{s}\|^2}{\sqrt{\|\mathbf{s}\|^2 + \varepsilon_0}} \leq -\frac{\|\mathbf{s}\|^2}{\|\mathbf{s}\| + \varepsilon_0} \leq -\|\mathbf{s}\| + \varepsilon_0; \\ \mathbf{s}^T (\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{F}_p) \leq \|\mathbf{s}\| \|\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{F}_p\| \leq \|\mathbf{s}\| (\|\boldsymbol{\varepsilon}\| + \|\mathbf{F}_p\|) \leq \rho \|\mathbf{s}\|. \end{cases} \quad (12)$$

Из (10)–(12) получим выражение для \dot{V} :

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\mathbf{s}^T (\mathbf{K} - \mathbf{E}_{6 \times 6}) \mathbf{s} - \mathbf{e}^T \left(\boldsymbol{\Lambda} - \frac{1}{2} \mathbf{E}_{6 \times 6} \right) \mathbf{e} + \\ & + \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c \boldsymbol{\zeta} - \mathbf{s}^T \mathbf{B} \mathbf{H}_k \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\zeta} - \\ & - \frac{1}{2} \left[\sigma_1 \text{Tr}(\tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{D}}) + \sigma_2 \text{Tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}}) + \sigma_3 \tilde{\rho}^2 \right] + \\ & + \left\{ \frac{1}{2} \left[\sigma_1 \text{Tr}(\mathbf{D}^T \mathbf{D}) + \sigma_2 \text{Tr}(\mathbf{W}^T \mathbf{W}) + \sigma_3 \rho^2 \right] + \rho \varepsilon_0 \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Рассмотрим следующие случаи:

1. Если $\|\boldsymbol{\zeta}\| \geq \mu$, то из (5) получим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}^T \dot{\boldsymbol{\zeta}} &= \boldsymbol{\zeta}^T \left(-\mathbf{K}_\zeta \boldsymbol{\zeta} - \frac{|\mathbf{s}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{H}_k \boldsymbol{\delta}| + 0.5 \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\delta}}{\|\boldsymbol{\zeta}\|^2} \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\delta} \right) = \\ &= -\boldsymbol{\zeta}^T \mathbf{K}_\zeta \boldsymbol{\zeta} - |\mathbf{s}^T \mathbf{B} \mathbf{H}_k \boldsymbol{\delta}| - 0.5 \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\delta}. \end{aligned}$$

Из неравенства $\boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\delta} \leq \frac{1}{2} (\boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\delta}^T \boldsymbol{\delta})$ следует

$$\boldsymbol{\zeta}^T \dot{\boldsymbol{\zeta}} \leq -\boldsymbol{\zeta}^T \left(\mathbf{K}_\zeta - \frac{1}{2} \mathbf{E}_6 \right) \boldsymbol{\zeta} - |\mathbf{s}^T \mathbf{B} \mathbf{H}_k \boldsymbol{\delta}|. \quad (14)$$

Далее имеем неравенства

$$-\mathbf{s}^T \mathbf{B} \mathbf{H}_k \boldsymbol{\delta} \leq |\mathbf{s}^T \mathbf{B} \mathbf{H}_k \boldsymbol{\delta}|. \quad (15)$$

Из (13)–(15) получим:

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\mathbf{s}^T (\mathbf{K} - \mathbf{E}_6) \mathbf{s} - \mathbf{e}^T \left(\boldsymbol{\Lambda} - \frac{1}{2} \mathbf{E}_6 \right) \mathbf{e} - \\ & - \boldsymbol{\zeta}^T \left(\mathbf{K}_\zeta - \frac{1}{2} \mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c - \frac{1}{2} \mathbf{E}_6 \right) \boldsymbol{\zeta} - \\ & - \frac{1}{2} \left[\sigma_1 \text{Tr}(\tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{D}}) + \sigma_2 \text{Tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}}) + \sigma_3 \tilde{\rho}^2 \right] + \Delta_1, \end{aligned}$$

где

$$\Delta_1 = \left\{ \frac{1}{2} \left[\sigma_1 \text{Tr}(\mathbf{D}^T \mathbf{D}) + \sigma_2 \text{Tr}(\mathbf{W}^T \mathbf{W}) + \sigma_3 \rho^2 \right] + \rho \varepsilon_0 \right\}.$$

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\left[\lambda_{\min}(\mathbf{K}) - 1 \right] \mathbf{s}^T \mathbf{s} - \left[\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}) - \frac{1}{2} \right] \mathbf{e}^T \mathbf{e} - \\ & - \left[\lambda_{\min} \left(\mathbf{K}_\zeta - \frac{1}{2} \mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c \right) - \frac{1}{2} \right] \boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\zeta} - \\ & - \frac{1}{2} \left[\sigma_1 \text{Tr}(\tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{D}}) + \sigma_2 \text{Tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}}) + \sigma_3 \tilde{\rho}^2 \right] + \Delta_1. \end{aligned}$$

Из (9) не трудно увидеть, что

$$\begin{aligned} V \leq & \frac{1}{2} \left[\lambda_{\max}(\mathbf{M}_k) \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Gamma}_1^{-1}) \times \right. \\ & \times \text{Tr}(\tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{D}}) + \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Gamma}_2^{-1}) \text{Tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}}) + \\ & \left. + \gamma^{-1} \tilde{\rho}^2 + \boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\zeta} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\alpha_1 V + \left[\frac{\alpha_1 \lambda_{\max}(\mathbf{M}_k)}{2} - (\lambda_{\min}(\mathbf{K}) - 1) \right] \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \\ & + \left[\frac{\alpha_1}{2} - \left(\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}) - \frac{1}{2} \right) \right] \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \\ & + \frac{1}{2} \left[\alpha_1 \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Gamma}_1^{-1}) - \sigma_1 \right] \text{Tr}(\tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{D}}) + \\ & + \frac{1}{2} \left[\alpha_1 \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Gamma}_2^{-1}) - \sigma_2 \right] \text{Tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}}) + \\ & + \frac{1}{2} \left[\alpha_1 \gamma^{-1} - \sigma_3 \right] \tilde{\rho}^2 + \\ & + \left\{ \frac{\alpha_1}{2} - \left[\lambda_{\min} \left(\mathbf{K}_\zeta - \frac{1}{2} \mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c \right) - \frac{1}{2} \right] \right\} \boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\zeta} + \Delta_1. \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_{\max}(\mathbf{X})$ и $\lambda_{\min}(\mathbf{X})$ – максимальное и минимальное собственные числа произвольной квадратной матрицы \mathbf{X} .

Выбираем $\alpha_1 > 0$ так, чтобы

$$\alpha_1 \leq \min \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\lambda_{\min}(\mathbf{K}) - 2}{\lambda_{\max}(\mathbf{M}_k)}; 2\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}) - 1; \\ \frac{\sigma_1}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Gamma}_1^{-1})}; \\ \frac{\sigma_2}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Gamma}_2^{-1})}; \gamma\sigma_3; \\ 2\lambda_{\min} \left(\mathbf{K}_\zeta - \frac{1}{2} \mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c \right) - 1 \end{array} \right\}, \quad (17)$$

причем

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(\mathbf{K}) &> 1; \lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}) > \frac{1}{2}; \\ \lambda_{\min} \left(\mathbf{K}_\zeta - \frac{1}{2} \mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c \right) &> \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (18)$$

тогда получим дифференциальное неравенство

$$\dot{V} \leq -\alpha_1 V + \Delta_1. \quad (19)$$

2. Если $\|\zeta\| < \mu$, то из (5) получим $\zeta^T \dot{\zeta} = 0$.

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \zeta^T \mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c \zeta &= -\frac{1}{2} \zeta^T \mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c \zeta + \zeta^T \mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c \zeta \leq \\ &\leq -\frac{1}{2} \zeta^T \mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c \zeta + \mu^2 \|\mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c\|, \\ -\mathbf{s}^T \mathbf{B} \mathbf{H}_k \delta &\leq \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \|\mathbf{B} \mathbf{H}_k \delta\|^2. \end{aligned}$$

Тогда (13) эквивалентно неравенству

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\mathbf{s}^T \left(\mathbf{K} - \frac{3}{2} \mathbf{E}_6 \right) \mathbf{s} - \mathbf{e}^T \left(\mathbf{\Lambda} - \frac{1}{2} \mathbf{E}_6 \right) \mathbf{e} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \zeta^T \mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c \zeta - \frac{1}{2} \left[\sigma_1 \text{Tr}(\tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{D}}) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_2 \text{Tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}}) + \sigma_3 \tilde{\rho}^2 \right] + \Delta_2; \\ \dot{V} &\leq - \left[\lambda_{\min}(\mathbf{K}) - \frac{3}{2} \right] \mathbf{s}^T \mathbf{s} - \left[\lambda_{\min}(\mathbf{\Lambda}) - \frac{1}{2} \right] \mathbf{e}^T \mathbf{e} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\lambda_{\min}(\mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c) \right] \zeta^T \zeta - \frac{1}{2} \left[\sigma_1 \text{Tr}(\tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{D}}) + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_2 \text{Tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}}) + \sigma_3 \tilde{\rho}^2 \right] + \Delta_2, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\Delta_2 = \left[\Delta_1 + \mu^2 \|\mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c\| + \frac{1}{2} \|\mathbf{B} \mathbf{H}_k \delta\|^2 \right]$.

Из (16) и (20) получим

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\alpha_2 V + \left[\frac{\alpha_2 \lambda_{\max}(\mathbf{M}_k)}{2} - \left(\lambda_{\min}(\mathbf{K}) - \frac{3}{2} \right) \right] \times \\ &\quad \times \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \left[\frac{\alpha_2}{2} - \left(\lambda_{\min}(\mathbf{\Lambda}) - \frac{1}{2} \right) \right] \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\alpha_2 \lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}_1^{-1}) - \sigma_1 \right] \text{Tr}(\tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{D}}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\alpha_2 \lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}_2^{-1}) - \sigma_2 \right] \text{Tr}(\tilde{\mathbf{W}}^T \tilde{\mathbf{W}}) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\alpha_2 \gamma^{-1} - \sigma_3 \right] \tilde{\rho}^2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\alpha_2 - \lambda_{\min}(\mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c) \right] \zeta^T \zeta + \Delta_2. \end{aligned}$$

Выбираем $\alpha_2 > 0$ так, чтобы

$$\alpha_2 \leq \min \left\{ \frac{2\lambda_{\min}(\mathbf{K}) - 3}{\lambda_{\max}(\mathbf{M}_k)}; 2\lambda_{\min}(\mathbf{\Lambda}) - 1; \frac{\sigma_1}{\lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}_1^{-1})}; \frac{\sigma_2}{\lambda_{\max}(\mathbf{\Gamma}_2^{-1})}; \gamma\sigma_3; \lambda_{\min}(\mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c) \right\}, \quad (21)$$

причем

$$\lambda_{\min}(\mathbf{K}) > \frac{3}{2}; \lambda_{\min}(\mathbf{\Lambda}) > \frac{1}{2}, \quad (22)$$

тогда получим дифференциальное неравенство

$$\dot{V} \leq -\alpha_2 V + \Delta_2. \quad (23)$$

В силу выражений (17), (18) и (21), (22) выбираем

$$\begin{cases} \alpha = \min\{\alpha_1; \alpha_2\}; \Delta = \max\{\Delta_1; \Delta_2\}; \\ \lambda_{\min}(\mathbf{K}) > \frac{3}{2}; \\ \lambda_{\min}(\mathbf{\Lambda}) > \frac{1}{2}; \lambda_{\min}\left(\mathbf{K}_c - \frac{1}{2} \mathbf{K}_c^T \mathbf{K}_c\right) > \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (24)$$

тогда из (19), (23) и (24) получим общее дифференциальное неравенство для рассмотренных случаев

$$\dot{V} \leq -\alpha V + \Delta. \quad (25)$$

Решая дифференциальное неравенство (25), получаем

$$0 \leq V(t) \leq \left[V(0) - \frac{\Delta}{\alpha} \right] e^{-\alpha t} + \frac{\Delta}{\alpha}. \quad (26)$$

Легко заметить, что функция $\dot{V} < 0$, если $V > \Delta/\alpha$, т. е. $\dot{V} < 0$ вне компактного множества E , которое содержит тривиальное решение системы $(\mathbf{s}, \mathbf{e}, \tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\rho}, \zeta) = 0$, где

$$E = \left\{ (\mathbf{s}, \mathbf{e}, \tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\rho}, \zeta) : V(\mathbf{s}, \mathbf{e}, \tilde{\mathbf{D}}, \tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\rho}, \zeta) \leq \frac{\Delta}{\alpha} \right\}.$$

Таким образом, все сигналы системы ограничены и экспоненциально сходятся к наибольшему инвариантному множеству, т. е. система (2) или (3) с адаптивными робастными законами управления (6), (7) и адаптивными робастными алгоритмами настройки (8) устойчива.

Кроме того, согласно (9) и (26) следует, что

$$\|\mathbf{e}\| \leq \sqrt{2 \left[V(0) - \frac{\Delta}{\alpha} \right] e^{-\alpha t} + \frac{2\Delta}{\alpha}}.$$

Граница для $\|\mathbf{e}\|$ – это явная функция проектных параметров и, таким образом, вычисляема. Этот предел теоретически можно уменьшить до сколь угодно малого подбором параметров закона управления. Следует отметить, что на практике ошибки слежения не могут быть сколь угодно малы. Приведенный анализ показывает, что построенный адаптивный робастный закон управления обеспечивает слежение выходов объекта

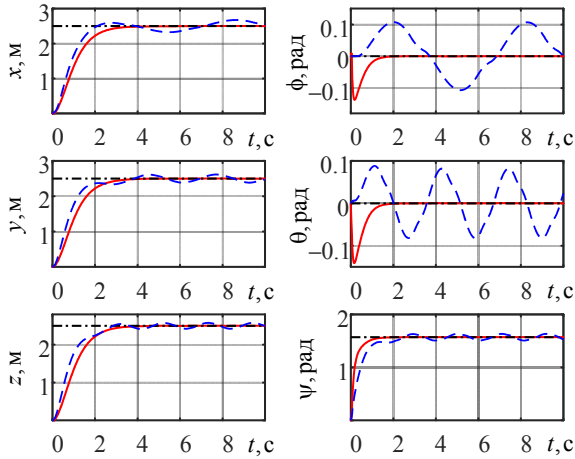


Рис. 2. ПП переменных системы при номинальных значениях аэродинамических коэффициентов и наличии внешних возмущений

Fig. 2. Transient processes of system variables at nominal values of aerodynamic coefficients and the presence of external disturbances

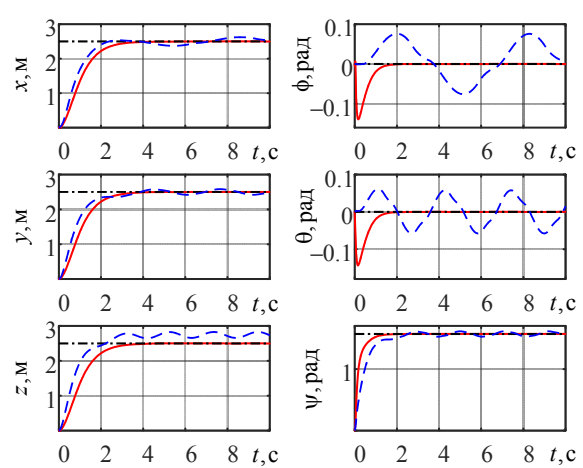


Рис. 3. ПП переменных системы при увеличении до 25 % номинальных значений аэродинамических коэффициентов и наличии внешних возмущений

Fig. 3. Transient processes of system variables when increasing up to 25 % of the nominal values of aerodynamic coefficients and the presence of external disturbances

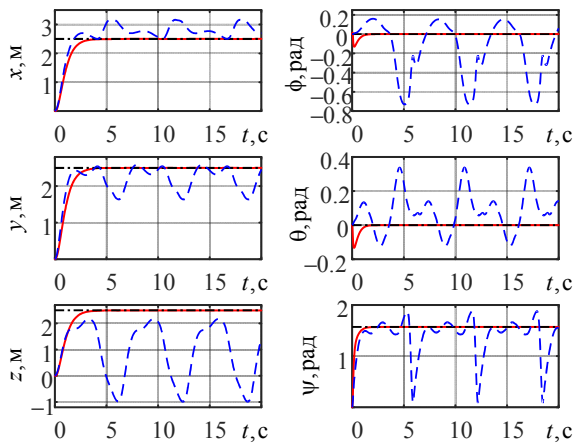


Рис. 4. ПП переменных системы при уменьшении до 25 % номинальных значений аэродинамических коэффициентов и наличии внешних возмущений

Fig. 4. Transient processes of system variables when reducing up to 25 % of the nominal values of aerodynamic coefficients and the presence of external disturbances

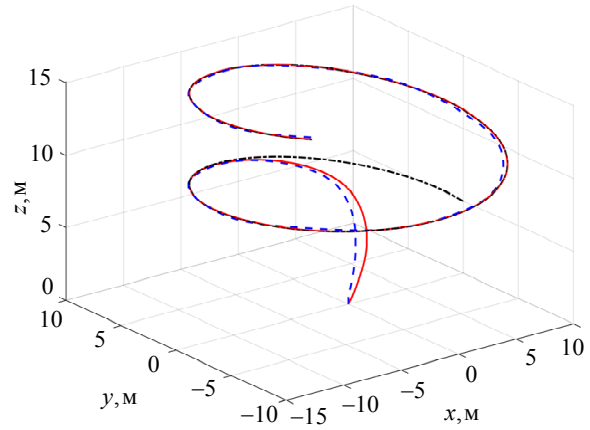


Рис. 5. Траектория трикоптера при номинальных значениях аэродинамических коэффициентов и наличии внешних возмущений

Fig. 5. Tricopter trajectory at nominal values aerodynamic coefficients and the presence of external disturbances

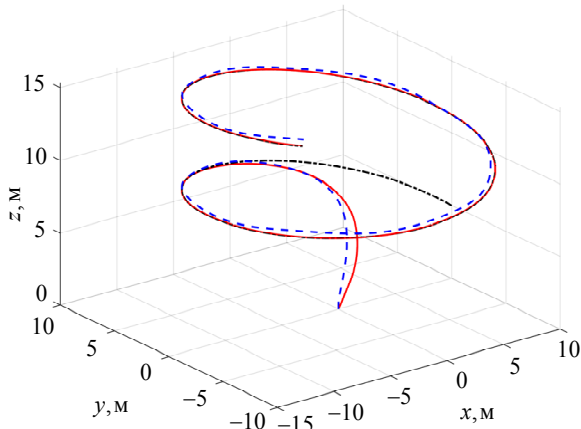


Рис. 6. Траектория трикоптера при увеличении до 25 % номинальных значений аэродинамических коэффициентов и наличии внешних возмущений

Fig. 6. Tricopter trajectory when increasing up to 25 % of the nominal values of aerodynamic coefficients and the presence of external disturbances

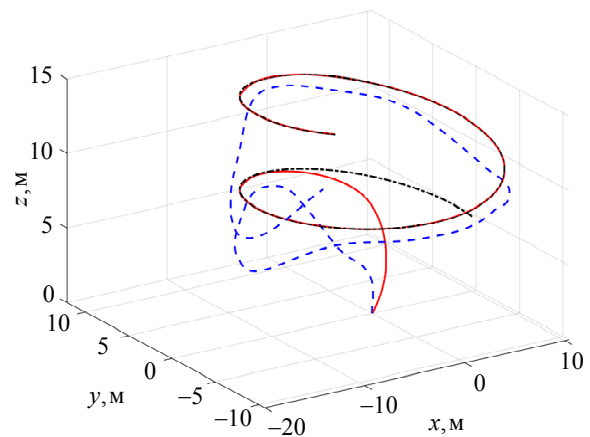


Рис. 7. Траектория трикоптера при уменьшении до 25 % номинальных значений аэродинамических коэффициентов и наличии внешних возмущений

Fig. 7. Tricopter trajectory when reducing up to 25 % of the nominal values of aerodynamic coefficients and the presence of external disturbances

управления за заданными (задающими) сигналами с достаточно малыми ошибками, особенно в условиях неопределенности, насыщения входных воздействий и внешних возмущений.

Результаты компьютерного моделирования и обсуждение. Компьютерное моделирование синтезированной адаптивной робастной системы управления трикоптером в условиях неопределенности, насыщения входных воздействий и неизвестных внешних возмущений было проведено в среде MatLab/Simulink при следующих номинальных значениях аэродинамических коэффициентов:

$$k_\tau = 0.2 \cdot 10^{-4}, k_f = 0.25 \cdot 10^{-3},$$

$$d_x = 0.0242, d_y = 0.0316,$$

$$d_z = 0.0546, d_\phi = 0.01, d_\theta = 0.0105, d_\psi = 0.0121.$$

Вектор внешнего возмущения выбран как

$$\mathbf{F}_p(t) = [6 \sin t \quad 6 \sin 2t \quad 6 \sin 3t \quad 6 \sin t \quad 6 \sin 2t \quad 6 \sin 3t]^T.$$

Пределом насыщения управляющих воздействий принято значение $u_M = 14 \cdot 10^4$. Параметры адаптивного робастного закона управления выбраны как

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{H}_{\text{nom}}; \hat{\mathbf{D}}(0) = \mathbf{O}_{6 \times 6}; \hat{\mathbf{W}}(0) = \mathbf{O}_{51 \times 6};$$

$$\boldsymbol{\zeta}(0) = 10 \cdot [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T; \mathbf{K} = 500 \mathbf{E}_6;$$

$$\mathbf{K}_c = 10^{-6} \mathbf{E}_6; \mathbf{K}_\zeta = 1.5 \mathbf{E}_6; \boldsymbol{\Gamma}_1 = 10^{-3} \mathbf{E}_6;$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_2 = 10^3 \mathbf{E}_6; \boldsymbol{\Lambda} = \text{diag}([1.5, 1.5, 1.5, 20, 20, 15]);$$

$$\gamma = 5 \cdot 10^3; \sigma_1 = 10^{-1}; \sigma_2 = 10^{-1}; \sigma_3 = 10^{-2};$$

$$\omega = 10^2; \varepsilon_0 = 10^{-2}; \mu = 10^{-2}.$$

Для проверки эффективности построенной адаптивной робастной системы управления трикоптером с поворотными винтами проведем сравнение работы этой системы с нелинейной системой управления в скользящем режиме, представленной в [27], в условиях неопределенности, насыщения входных воздействий и неизвестных внешних возмущений. Результаты моделирования представлены на рис. 2–10, где *штрихпунктирные линии* – заданное (программное) движение трикоптера, *штриховые линии* – движение трикоптера с нелинейным управлением в скользящем режиме из [27] и *сплошные линии* – движение трикоптера с адаптивным робастным управлением, предложенным в данной статье.

Переходные процессы при заданных постоянных сигналах с учетом ограничения входных воздействий. Рассмотрим переходные процессы

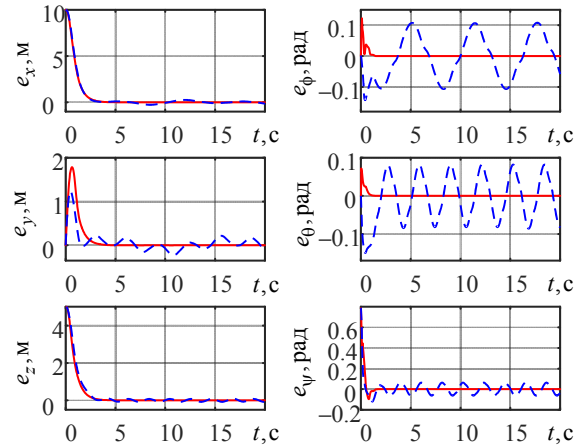


Рис. 8. Ошибки слежения трикоптера при номинальных значениях аэродинамических коэффициентов и наличии внешних возмущений

Fig. 8. Tricopter tracking errors at nominal values aerodynamic coefficients and the presence of external disturbances

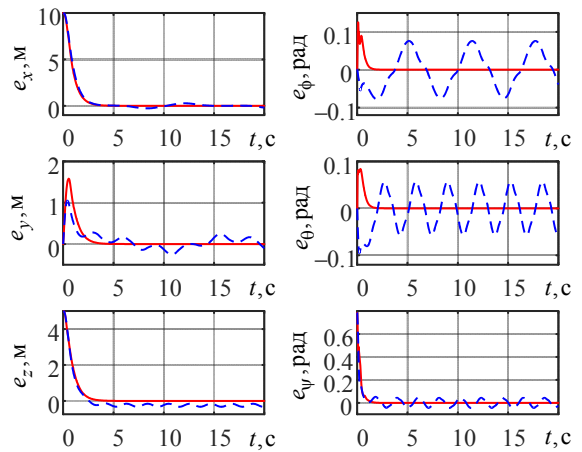


Рис. 9. Ошибки слежения трикоптера при увеличении до 25 % номинальных значений аэродинамических коэффициентов и наличии внешних возмущений

Fig. 9. Tricopter tracking errors when increasing up to 25 % of the nominal values of aerodynamic coefficients and the presence of external disturbances

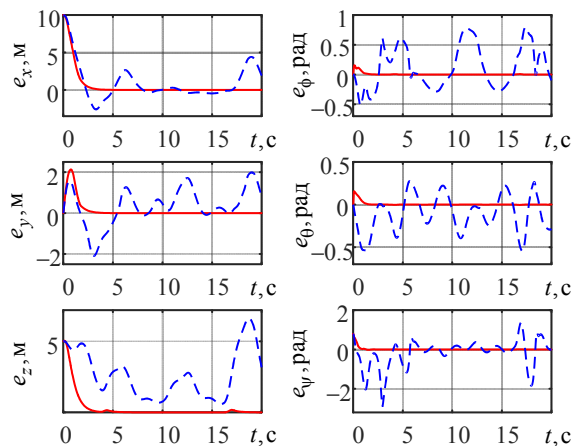


Рис. 10. Ошибки слежения трикоптера при уменьшении до 25 % номинальных значений аэродинамических коэффициентов и наличии внешних возмущений

Fig. 10. Tricopter tracking errors when reducing up to 25 % of the nominal values of aerodynamic coefficients and the presence of external disturbances

(ПП) систем управления при заданных постоянных сигналах с учетом ограничения входных воздействий в условиях неопределенности и внешних возмущений. Заданные сигналы задаются следующим образом: $\mathbf{q}_d = [2.5 \ 2.5 \ 2.5 \ 0 \ 0 \ \pi/2]^T$.

На рис. 2 представлены переходные процессы переменных системы при номинальных значениях аэродинамических коэффициентов и наличии внешних возмущений, а на рис. 3 и 4 – в условиях влияния внешних возмущений при увеличении и при уменьшении до 25 % номинальных значений аэродинамических коэффициентов соответственно.

Отслеживание траектории с учетом ограничения входных воздействий. Рассмотрим задачу отслеживания заданной траектории с учетом ограничения входных воздействий в условиях неопределенности и внешних возмущений. Траектория задается следующим образом:

$$\mathbf{q}_d = \begin{bmatrix} 10 \sin(0.5t + \pi/2) & 10 \sin(0.5t) & 5 + 0.5t \\ 0 & 0 & \pi/4 \end{bmatrix}^T.$$

На рис. 5 представлены траектории трикоптера при номинальных значениях аэродинамических коэффициентов и наличии внешних возмущений, а на рис. 6 и 7 – в условиях влияния внешних возмущений при увеличении и при уменьшении до 25 % номинальных значений аэродинамических коэффициентов соответственно.

На рис. 8 представлены ошибки слежения трикоптера при номинальных значениях аэродинамических коэффициентов и наличии внешних возмущений, а на рис. 9 и 10 – в условиях влияния внешних возмущений при увеличении и при уменьшении до 25 % номинальных значений аэродинамических коэффициентов соответственно.

Из результатов компьютерного моделирования, представленных на рис. 2–10, можно сделать вывод, что неадаптивная система управления (при использовании управления в скользящем режиме) показывает низкую эффективность в условиях неопределенности, ограничений входных воздействия и неизвестных изменяющихся во времени внешних возмущений, и может даже стать неустойчивой. В таких условиях разработанная адаптивная робастная система демонстрирует хорошую работоспособность. Даже в худших случаях качество работы этой системы остается хорошим. Таким образом, система полно-

стью удовлетворяет требованиям стабильности полета и обеспечивает высокие характеристики полета в условиях неопределенности аэродинамических коэффициентов, частичной неопределенности матрицы входа, неизвестных внешних возмущений и ограничения входных воздействий.

Заключение. Из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Построена полная нелинейная математическая модель трикоптера с поворотными винтами с учетом неопределенности аэродинамических коэффициентов, частично неопределенной матрицы входа, неизвестных внешних возмущений и ограничения входных воздействий.

2. Разработана адаптивная робастная система управления трикоптером с поворотными винтами, основанная на модифицированном методе вычисления момента и методе аппроксимации функций, для устранения влияния частичной неопределенности матрицы входа и неопределенности параметров системы. Построена вспомогательная динамическая система, вектор состояния которой включается в закон управления для ослабления негативного влияния насыщения входных (управляющих) воздействий. Робастный компонент закона управления гарантирует, что реализованный закон управления компенсирует как неизвестные внешние возмущения, так и ошибки аппроксимации неопределенных функций в математической модели.

3. С использованием метода функций Ляпунова обстоятельно поясняется и показывается, что разработанная адаптивная робастная система управления обеспечивает ограниченность всех сигналов в системе и экспоненциальную сходимость переменных состояния и ошибки адаптации к инвариантному множеству, размеры которого (ошибки слежения) могут быть уменьшены посредством настройки параметров регулятора.

4. Приведено сравнение переходных процессов разработанной адаптивной робастной системы управления и неадаптивной нелинейной системы управления в скользящем режиме. Результаты сравнительного анализа подтверждают эффективность построенной адаптивной робастной системы управления в условиях частичной неопределенности матрицы входа, неопределенности параметров системы, ограничения входных воздействий и влияния неизвестных внешних возмущений.

Список литературы

1. Finite-time attitude tracking control for hypersonic flight vehicles with actuator saturation / T. Cao, H. Gong, H. Xiao, Y. Xue // *Intern. J. of Aerospace Engin.* 2022. Vol. 2022(5419377). P. 1–14. doi: 10.1155/2022/5419377.
2. Disturbance rejection attitude control for a quadrotor: Theory and experiment / Li Ding, Q. He, C. Wang, R. Qi // *Intern. J. of Aerospace Engin.* 2021. Vol. 2021(2). P. 1–15. doi: 10.1155/2021/8850071.
3. Stepanyan V., Kurdila A. Adaptive control of unmanned aerial vehicles subject to structural changes and external disturbances // *Proc. of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conf. and Exhibit. AIAA: Hilton Head, South Carolina.* 2007. P. 6599. doi: 10.2514/6.2007-6599.
4. An augmented sliding mode control for fixed-wing UAVs with external disturbances and model uncertainties / Y. Pan, N. Li, W. Zou, B. Wang, K. Wang, X. Tang, S. Bu, L. Qin // *Drones.* 2023. Vol. 7(7). P. 440–460. doi: 10.3390/drones7070440.
5. Sankaranarayanan V. N., Satpute S., Nikolakopoulos G. Adaptive robust control for quadrotors with unknown time-varying delays and uncertainties in dynamics // *Drones.* 2022. Vol. 6(9). P. 220–240. doi: 10.3390/drones6090220.
6. Castañeda H., Salas-Peña O. S., León-Morales J. D. Extended observer based on adaptive second order sliding mode control for a fixed wing UAV // *ISA Transactions.* 2017. Vol. 66. P. 226–232. doi: 10.1016/j.isatra.2016.09.013.
7. Non-cascade adaptive sliding mode control for quadrotor UAVs under parametric uncertainties and external disturbance with indoor experiments / T. Wang, H. Parwana, K. Umemoto, T. Endo, F. Matsuno // *J. of Intelligent & Robotic Systems.* 2021. Vol. 102(1). Article: 8. 21 p. doi: 10.1007/s10846-021-01351-z.
8. Robust adaptive global nonlinear sliding mode controller for a quadrotor under external disturbances and uncertainties / M. Labbadi, Y. El. Houm, A. Abbou, M. Cherkaoui // *Advances in Mechanical Engin.* 2020. Vol. 12(11). 10 p. doi: 10.1177/1687814020975237.
9. Tan J., Guo Sh. Backstepping control with fixed-time prescribed performance for fixed wing UAV under model uncertainties and external disturbances // *Intern. J. of Control.* 2020. Vol. 95, iss. 4. P. 934–951. doi: 10.1080/00207179.2020.1831700.
10. Adaptive backstepping control of a quadcopter with uncertain vehicle mass, moment of inertia, and disturbances / W. Xie, D. Cabecinhas, R. Cunha, C. Silvestre // *IEEE Transactions on Ind. Electronics.* 2022. Vol. 69, no. 1. P. 549–559. doi: 10.1109/TIE.2021.3055181.
11. Full-state-constrained adaptive control for a class of UAVs suffering from coupled uncertainties using the HOBLF / X. Chang, K. Wang, K. Chen, W. Fu // *Math. Probl. in Engin.* 2021. Vol. 2021(S1). P. 1–17. doi: 10.1155/2021/9963426.
12. Performance precision and payloads: Adaptive nonlinear MPC for quadrotors / D. Hanover, P. Foehn, S. Sun, E. Kaufmann, D. Scaramuzza // *IEEE Robotics and Automation Lett.* 2022. Vol. 7, no. 2. P. 690–697. doi: 10.1109/LRA.2021.3131690.
13. Kotaru P., Edmonson R., Sreenath K. Geometric L1 adaptive attitude control for a quadrotor unmanned aerial vehicle // *J. of Dynamic Systems Measurement and Control.* 2020. Vol. 142, iss. 3. 15 p. doi: 10.1115/1.4045558.
14. Unmanned aerial vehicle attitude control using L1 adaptive controller / M. Hussien, M. Elnaggar, A. M. Kamel, H. A. A. Fattah // *IEEE Access.* 2021. Vol. 9. P. 131916–131925. doi: 10.1109/ACCESS.2021.3114508.
15. Gao Z., Wang J., Tian Y. Finite-Time attitude control for quadrotor with input constraints and disturbances // *Math. Probl. in Engin.* 2020. Vol. 2020 (5493686). P. 1–11. doi: 10.1155/2020/5493686.
16. Lavretsky E., Hovakimyan N. Positive μ -modification for stable adaptation in the presence of input constraints // *Proc. of the 2004 Am. Control Conf. (AAC).* IEEE: Boston, MA, USA, 2004. Vol. 3. P. 2545–2550. doi: 10.23919/ACC.2004.1383848.
17. Fertik H. A., Ross C. W. Direct digital control algorithm with anti-windup feature // *ISA Transactions.* 1967. Vol. 6, iss. 4. P. 317–328.
18. Tang S., Annaswamy A. M. Indirect adaptive optimal control in the presence of input saturation // *2023 Am. Control Conf. (ACC).* IEEE: San Diego, CA, USA, 2023. P. 3620–3625. doi: 10.23919/ACC55779.2023.10156146.
19. Liu S., Liu Ch., Dolan J. Safe control under input limits with neural control barrier functions // *Proc. of the 6th Conf. on Robot Learning (CoRL 2022).* Auckland, New Zealand, 2023. P. 1970–1980. doi: 10.48550/arXiv.2211.11056.
20. Chen M., Ge S. S., Ren B. Adaptive tracking control of uncertain MIMO nonlinear systems with input constraints // *Automatica.* 2011. Vol. 47, iss. 3. P. 452–465. doi: 10.1016/j.automatica.2011.01.025.
21. Adaptive sliding mode control for quadrotor UAVs with input saturation / X. Shao, G. Sun, W. Yao, J. Liu, L. Wu // *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics.* 2022. Vol. 27, no. 3. P. 1498–1509. doi: 10.1109/TMECH.2021.3094575.
22. Distributed adaptive control for UAV formation with input saturation and actuator fault / Z. Zheng, M. Qian, P. Li, H. Yi // *IEEE Access.* 2019. Vol. 7. P. 144638–144647. doi: 10.1109/ACCESS.2019.2918384.
23. Zhou Y., Tian Z., Lin H. UAV based adaptive trajectory tracking control with input saturation and unknown time-varying disturbances // *IET Intelligent Transport Systems.* 2023. Vol. 17, iss. 4. P. 780–793. doi: doi.org/10.1049/itr2.12303
24. NN-based parallel model predictive control for a quadrotor UAV / J. Qi, J. Chu, Z. Xu, C. Huang, M. Zhu // *Proc.* 2023. Vol. 11, iss. 6. P. 1706–1718. doi: 10.3390/pr11061706.
25. Fixed-time integral-type sliding mode control for the quadrotor UAV attitude stabilization under actuator failures / W. Q. Gong, B. Li, Y. S. Yang, H. Y. Ban, B. Xiao //

Aerospace Sci. and Technol. 2019. Vol. 95. P. 105444. doi: 10.1016/j.ast.2019.105444.

26. Output robust control with anti-windup compensation for quadcopters / O. I. Borisov, V. S. Gromov, A. A. Pyrkin, A. A. Bobtsov, N. A. Nikolaev // IFAC-Papers OnLine. 2016. Vol. 49, no. 13. P. 287–292. doi: 10.1016/j.ifacol.2016.07.976.

27. Нгуен З. Х., Путов В. В. Моделирование и исследование движения беспилотных летательных аппаратов типа трикоптера с поворотными винтами // Сб. юбил. XXV конф. молодых ученых «Навигация и управление движением». СПб.: Концерн «ЦНИИ „Электроприбор“», 2023. С. 38–41.

28. Adaptive-robust control of a tricopter-type unmanned aerial vehicle with rotary propellers under uncertain conditions / D. K. Nguyen, V. V. Putov, A. A. Kuznetsov, M. A. Chernyshev // 2023 XXVI Intern. Conf. on Soft Computing and Measurements (SCM). IEEE: SPb., RF, 2023. P. 53–56. doi: 10.1109/SCM58628.2023.10159063.

29. Robust adaptive tricopter control under parametric uncertainty and external disturbances conditions / V. V. Putov, V. N. Sheludko, D. K. Nguyen, B. Andrievsky, I. Zaitseva // J. Math. in Sci., Engin., and Aerospace (MESA). 2023. Vol. 14, no. 4. P. 1043–1064.

30. Chien M. C., Huang A. C. Adaptive impedance control of robot manipulators based on function approximation technique // Robotica. 2004. Vol. 22, iss. 4. P. 395–403. doi: 10.1017/S0263574704000190.

31. Kai Ch., Huang An-Ch. A regressor-free adaptive controller for robot manipulators without Slotine and Li's modification // Robotica. 2013. Vol. 31, iss. 7. P. 1051–1058. doi: 10.1017/S0263574713000301.

32. Villalobos-Chin J., Santibáñez V. An adaptive regressor-free Fourier series-based tracking controller for robot manipulators: Theory and experimental evaluation // Robotica. 2021. Vol. 39, iss. 11. P. 1981–1996. doi: 10.1017/S0263574721000084.

33. Wilcox H. J., Myers D. L. An introduction to Lebesgue integration and Fourier series. NY: Dover Publications, 2009. 192 p.

34. Slotine J.-J. E., Li W. On the adaptive control of robot manipulators // The Intern. J. of Robotics Research. 1987. Vol. 6, iss. 3. P. 49–59. doi: 10.1177/02783649870600303.

35. Slotine J.-J. E., Li W. Applied nonlinear control. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. A Division of Simon & Schuster Englewood Cliffs, 1991. 459 p.

36. Ioannou P., Sun J. Robust adaptive control. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 834 p.

Информация об авторах

Нгуен Зуи Хань – аспирант, ассистент кафедры систем автоматического управления СПбГЭТУ «ЛЭТИ». E-mail: kxanhnguyen.mta@gmail.com

Путов Виктор Владимирович – д-р техн. наук, профессор, зам. зав. кафедрой систем автоматического управления по развитию СПбГЭТУ «ЛЭТИ». E-mail: vvputov@mail.ru

Шелудько Виктор Николаевич – д-р техн. наук, профессор кафедры систем автоматического управления, ректор СПбГЭТУ «ЛЭТИ». E-mail: vnsheludko@etu.ru

References

1. Finite-time attitude tracking control for hypersonic flight vehicles with actuator saturation / T. Cao, H. Gong, H. Xiao, Y. Xue // Intern. J. of Aerospace Engin. 2022. Vol. 2022(5419377). P. 1–14. doi: 10.1155/2022/5419377.

2. Disturbance rejection attitude control for a quadrotor: Theory and experiment / Li Ding, Q. He, C. Wang, R. Qi // Intern. J. of Aerospace Engin. 2021. Vol. 2021(2). P. 1–15. doi: 10.1155/2021/8850071.

3. Stepanyan V., Kurdila A. Adaptive control of unmanned aerial vehicles subject to structural changes and external disturbances // Proc. of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conf. and Exhibit. AIAA: Hilton Head, South Carolina. 2007. P. 6599. doi: 10.2514/6.2007-6599.

4. An augmented sliding mode control for fixed-wing UAVs with external disturbances and model uncertainties / Y. Pan, N. Li, W. Zou, B. Wang, K. Wang, X. Tang, S. Bu, L. Qin // Drones. 2023. Vol. 7(7). P. 440–460. doi: 10.3390/drones7070440.

5. Sankaranarayanan V. N., Satpute S., Nikolakopoulos G. Adaptive robust control for quadrotors with unknown time-varying delays and uncertainties in dynamics // Drones. 2022. Vol. 6(9). P. 220–240. doi: 10.3390/drones6090220.

6. Castañeda H., Salas-Peña O. S., León-Morales J. D. Extended observer based on adaptive second order sliding mode control for a fixed wing UAV // ISA Transactions. 2017. Vol. 66. P. 226–232. doi: 10.1016/j.isatra.2016.09.013.

7. Non-cascade adaptive sliding mode control for quadrotor UAVs under parametric uncertainties and external disturbance with indoor experiments / T. Wang, H. Parwana, K. Umemoto, T. Endo, F. Matsuno // J. of Intelligent & Robotic Systems. 2021. Vol. 102(1). Article: 8. 21 p. doi: 10.1007/s10846-021-01351-z.

8. Robust adaptive global nonlinear sliding mode controller for a quadrotor under external disturbances and uncertainties / M. Labbadi, Y. El. Houm, A. Abbou,

M. Cherkaoui // *Advances in Mechanical Engin.* 2020. Vol. 12(11). 10 p. doi: 10.1177/1687814020975237.

9. Tan J., Guo Sh. Backstepping control with fixed-time prescribed performance for fixed wing UAV under model uncertainties and external disturbances // *Intern. J. of Control.* 2020. Vol. 95, iss. 4. P. 934–951. doi: 10.1080/00207179.2020.1831700.

10. Adaptive backstepping control of a quadcopter with uncertain vehicle mass, moment of inertia, and disturbances / W. Xie, D. Cabecinhas, R. Cunha, C. Silvestre // *IEEE Transactions on Ind. Electronics.* 2022. Vol. 69, no. 1. P. 549–559. doi: 10.1109/TIE.2021.3055181.

11. Full-state-constrained adaptive control for a class of UAVs suffering from coupled uncertainties using the HOBFL / X. Chang, K. Wang, K. Chen, W. Fu // *Math. Probl. in Engin.* 2021. Vol. 2021(S1). P. 1–17. doi: 10.1155/2021/9963426.

12. Performance precision and payloads: Adaptive nonlinear MPC for quadrotors / D. Hanover, P. Foehn, S. Sun, E. Kaufmann, D. Scaramuzza // *IEEE Robotics and Automation Lett.* 2022. Vol. 7, no. 2. P. 690–697. doi: 10.1109/LRA.2021.3131690.

13. Kotaru P., Edmonson R., Sreenath K. Geometric L1 adaptive attitude control for a quadrotor unmanned aerial vehicle // *J. of Dynamic Systems Measurement and Control.* 2020. Vol. 142, iss. 3. 15 p. doi: 10.1115/1.4045558.

14. Unmanned aerial vehicle attitude control using L1 adaptive controller / M. Hussien, M. Elnaggar, A. M. Kamel, H. A. A. Fattah // *IEEE Access.* 2021. Vol. 9. P. 131916–131925. doi: 10.1109/ACCESS.2021.3114508.

15. Gao Z., Wang J., Tian Y. Finite-Time attitude control for quadrotor with input constraints and disturbances // *Math. Probl. in Engin.* 2020. Vol. 2020 (5493686). P. 1–11. doi: 10.1155/2020/5493686.

16. Lavretsky E., Hovakimyan N. Positive μ -modification for stable adaptation in the presence of input constraints // *Proc. of the 2004 Am. Control Conf. (AAC).* IEEE: Boston, MA, USA, 2004. Vol. 3. P. 2545–2550. doi: 10.23919/ACC.2004.1383848.

17. Fertik H. A., Ross C. W. Direct digital control algorithm with anti-windup feature // *ISA Transactions.* 1967. Vol. 6, iss. 4. P. 317–328.

18. Tang S., Annaswamy A. M. Indirect adaptive optimal control in the presence of input saturation // *2023 Am. Control Conf. (ACC).* IEEE: San Diego, CA, USA, 2023. P. 3620–3625. doi: 10.23919/ACC55779.2023.10156146.

19. Liu S., Liu Ch., Dolan J. Safe control under input limits with neural control barrier functions // *Proc. of the 6th Conf. on Robot Learning (CoRL 2022).* Auckland, New Zealand, 2023. P. 1970–1980. doi: 10.48550/arXiv.2211.11056.

20. Chen M., Ge S. S., Ren B. Adaptive tracking control of uncertain MIMO nonlinear systems with input constraints // *Automatica.* 2011. Vol. 47, iss. 3. P. 452–465. doi: 10.1016/j.automatica.2011.01.025.

21. Adaptive sliding mode control for quadrotor UAVs with input saturation / X. Shao, G. Sun, W. Yao, J. Liu, L. Wu // *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics.* 2022. Vol. 27, no. 3. P. 1498–1509. doi: 10.1109/TMECH.2021.3094575.

22. Distributed adaptive control for UAV formation with input saturation and actuator fault / Z. Zheng, M. Qian, P. Li, H. Yi // *IEEE Access.* 2019. Vol. 7. P. 144638–144647. doi: 10.1109/ACCESS.2019.2918384.

23. Zhou Y., Tian Z., Lin H. UAV based adaptive trajectory tracking control with input saturation and unknown time-varying disturbances // *IET Intelligent Transport Systems.* 2023. Vol. 17, iss. 4. P. 780–793. doi: doi.org/10.1049/itr2.12303

24. NN-based parallel model predictive control for a quadrotor UAV / J. Qi, J. Chu, Z. Xu, C. Huang, M. Zhu // *Proc.* 2023. Vol. 11, iss. 6. P. 1706–1718. doi: 10.3390/pr11061706.

25. Fixed-time integral-type sliding mode control for the quadrotor UAV attitude stabilization under actuator failures / W. Q. Gong, B. Li, Y. S. Yang, H. Y. Ban, B. Xiao // *Aerospace Sci. and Technol.* 2019. Vol. 95. P. 105444. doi: 10.1016/j.ast.2019.105444.

26. Output robust control with anti-windup compensation for quadcopters / O. I. Borisov, V. S. Gromov, A. A. Pyrkin, A. A. Bobtsov, N. A. Nikolaev // *IFAC-Papers OnLine.* 2016. Vol. 49, no. 13. P. 287–292. doi: 10.1016/j.ifacol.2016.07.976.

27. Nguen Z. H., Putov V. V. Modelirovanie i issledovanie dvizhenija bespilotnyh letatel'nyh apparatov tipa trikoptera s povorotnymi vintami // *Sb. jubil. XXV konf. molodyh uchenykh «Navigacija i upravlenie dvizheniem».* SPb.: Koncern «CNII «jelektropribor», 2023. S. 38–41. (In Russ.).

28. Adaptive-robust control of a tricopter-type unmanned aerial vehicle with rotary propellers under uncertain conditions / D. K. Nguyen, V. V. Putov, A. A. Kuznetsov, M. A. Chernyshev // *2023 XXVI Intern. Conf. on Soft Computing and Measurements (SCM).* IEEE: SPb., RF, 2023. P. 53–56. doi: 10.1109/SCM58628.2023.10159063.

29. Robust adaptive tricopter control under parametric uncertainty and external disturbances conditions / V. V. Putov, V. N. Sheludko, D. K. Nguyen, B. Andrievsky, I. Zaitseva // *J. Math. in Sci., Engin., and Aerospace (MESA).* 2023. Vol. 14, no. 4. P. 1043–1064.

30. Chien M. C., Huang A. C. Adaptive impedance control of robot manipulators based on function approximation technique // *Robotica.* 2004. Vol. 22, iss. 4. P. 395–403. doi: 10.1017/S0263574704000190.

31. Kai Ch., Huang An- Ch. A regressor-free adaptive controller for robot manipulators without Slotine and Li's modification // *Robotica.* 2013. Vol. 31, iss. 7. P. 1051–1058. doi: 10.1017/S0263574713000301.

32. Villalobos-Chin J., Santibáñez V. An adaptive regressor-free Fourier series-based tracking controller for robot manipulators: Theory and experimental evaluation // *Robotica.* 2021. Vol. 39, iss. 11. P. 1981–1996. doi: 10.1017/S0263574721000084.

33. Wilcox H. J., Myers D. L. An introduction to Lebesgue integration and Fourier series. NY: Dover Publications, 2009. 192 p.

34. Slotine J.-J. E., Li W. On the adaptive control of robot manipulators // *The Intern. J. of Robotics Research.* 1987. Vol. 6, iss. 3. P. 49–59. doi: 10.1177/02783649870600303.

35. Slotine J.-J. E., Li W. Applied nonlinear control. New Jersey: Prentice-Hall, Inc. A Division of Simon & Schuster Englewood Cliffs, 1991. 459 p.

36. Ioannou P., Sun J. Robust adaptive control. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 834 p.

Information about the authors

Duy Khanh Nguyen – postgraduate student, Assistant of the Department of Automatic Control Systems, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: khanhnguyen.mta@gmail.com

Victor V. Putov – Dr Sci. (Eng.), Professor, Deputy Head of the Department of Automatic Control Systems for Development, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: vvputov@mail.ru

Victor N. Sheludko – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Department of Automatic Control Systems, Rector of Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: vnsheludko@etu.ru

Статья поступила в редакцию 04.04.2024; принята к публикации после рецензирования 25.04.2024; опубликована онлайн 21.06.2024.

Submitted 04.04.2024; accepted 25.04.2024; published online 21.06.2024.
