

Применение методов Фурье и вейвлет-преобразования для обработки и сжатия информации

С. Г. Подклетнов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

podklet@yandex.ru

Аннотация. *Цель:* Рассмотреть необходимость улучшить выявление признаков дефектов эскалатора на ранних стадиях. Разработать и усовершенствовать методы тестовой и функциональной диагностики эскалаторов. Предложить методы цифровой обработки сигналов. Разработать правильную интерпретацию результатов обработки сигналов.

Методы: Применяются методы цифровой обработки сигналов: преобразования Фурье и вейвлет-преобразования. Представлено сравнение методов Фурье и вейвлет-преобразований. Показана возможность их успешного применения для обработки сигналов. Указана необходимость совершенствования параметров данных методик.

Результаты: Показано успешное применение методов цифровой обработки сигналов: преобразование Фурье – для анализа стационарных сигналов, и вейвлет-преобразования – для анализа нестационарных сигналов.

Практическая значимость: преобразование Фурье и вейвлет-анализ позволяют выявлять изменение характера колебаний в разной степени. Каждый метод обладает своими достоинствами. Метод Фурье-преобразования более прост в использовании. Метод вейвлет-преобразования обладает несомненными преимуществами благодаря растянутому и сдвинутому вейвлет-функциям для обработки сложных нестационарных сигналов, меняющихся со временем. Преимущество вейвлет-метода состоит также в том, что частные вейвлет-функции локализованы в пространстве. Для вейвлет-обработки была использована вейвлет-функция Добеши. Тем не менее, на сегодняшний день более распространен метод Фурье-преобразования в силу его технической простоты и более долгого периода технического использования. Данная статья должна способствовать более широкому техническому применению вейвлет-преобразования.

Ключевые слова: Фурье преобразование, вейвлет-преобразование, цифровая обработка сигналов, сжатие информации, вейвлет Добеши

Для цитирования: Подклетнов С. Г. Применение методов Фурье и вейвлет-преобразования для обработки и сжатия информации // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2024. Т. 17, № 6. С. 56–64. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-6-56-64.

Original article

Application of Fourier and Wavelet Transform Methods for Information Processing and Compression

S. G. Podkletnov

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

podklet@yandex.ru

Abstract. *Objective:* To consider the need to improve the detection of signs of escalator defects in the early stages. To develop and improve methods of test and functional diagnostics of escalators. To propose methods of digital signal processing. To develop the correct interpretation of the signal processing results.

Methods: Digital signal processing methods are used: Fourier transforms and wavelet transforms. A comparison of Fourier and wavelet transform methods is presented. The possibility of their successful application for signal processing is shown. The need to improve the parameters of these techniques is indicated.

Results: The successful application of digital signal processing methods is shown: Fourier transforms for the analysis of stationary signals and wavelet transforms for the analysis of non-stationary signals.

Practical significance: Fourier transform and wavelet analysis allow us to identify changes in the nature of oscillations to varying degrees. Each method has its own advantages. The Fourier transform method is easier to use. The wavelet transform method has undoubted advantages due to the stretched and shifted wavelet functions for processing complex non-stationary signals that change over time. The advantage of the wavelet method is also that the particular wavelet functions are localized in space. The wavelet function was used for wavelet processing, however, today the Fourier transform method is more common due to its technical simplicity and a longer period of technical use. This article should contribute to a broader technical application of the wavelet transform

Keywords: Fourier transform, wavelet transform, digital signal processing, information compression, Daubechies wavelets

For citation: Podkletnov S. G. Application of Fourier and Wavelet Transform Methods for Information Processing and Compression // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2024. Vol. 17, no. 6. P. 56–64. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-6-56-64.

В наше время большое количество информации, преимущественно в цифровом виде, вызывает необходимость сокращения ее объемов [1], [2] – возможно, за счет исключения избыточности или повышения энтропии. Среди средств решения этой задачи выделяются методы обработки информации: и традиционный метод преобразования Фурье, и появившийся не так давно метод вейвлет-преобразования. Каждый из них интересен по-своему.

1. Преобразование Фурье. Преобразование Фурье можно использовать в самых разных сферах деятельности [1]–[5]. При этом желательно, чтобы частоты сигнала были ярко выражены и хорошо локализованы во времени [2].

Прямое преобразование Фурье для непрерывного сигнала:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx.$$

Можно восстановить сигнал с помощью обратного преобразования Фурье:

$$f(x) = \sqrt{\frac{|b|}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-ib\omega x} d\omega.$$

Если применяются дискретные компоненты сигнала, то используется дискретное преобразование Фурье [5], [6].

Прямое дискретное преобразование Фурье [7], [8]:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{T=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi kn/N};$$

обратное дискретное преобразование Фурье:

$$x_n = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-2\pi kn/N} = \frac{1}{N} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_k + lN.$$

Здесь $X_k - k = 0, N - 1$ – комплексные амплитуды синусоидальных сигналов, составляющие в сумме исходный сигнал; $x_n - n = 0, N - 1$ – значения сигнала во временных точках $n = 0, N - 1$ – значения сигнала за период и количество компонент разложения;

Кроме обычного Фурье-преобразования применяется также быстрое преобразование Фурье БПФ или FFT [8].

Каждый сигнал можно характеризовать несколькими компонентами разной степени важности [7], [8]:

1. *Частота* – величина, обратная периоду, или скорость повторения сигнала в заданную единицу времени.

2. *Мощность* – количество энергии для каждой частоты.

3. *Сам сигнал* – материальная передача каких-то физических данных. При этом любой первичный сигнал – это функция времени. Сигнал может использоваться для переработки и хранения информации. Сигналы могут быть самыми разными: ЭКГ, видеосигнал, звуковой сигнал, сигналы от датчиков температуры, давления и т. д.



Рис. 1. Виды синусоидальных волн
Fig. 1. Types of sinusoidal waves

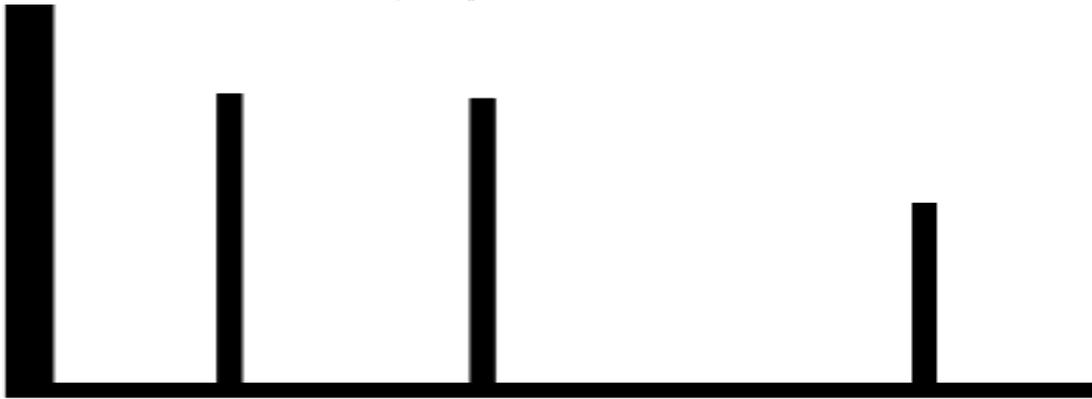


Рис. 2. Схематическое представление частотного спектра музыкального сигнала
Fig. 2. Schematic representation of the frequency spectrum of a musical signal

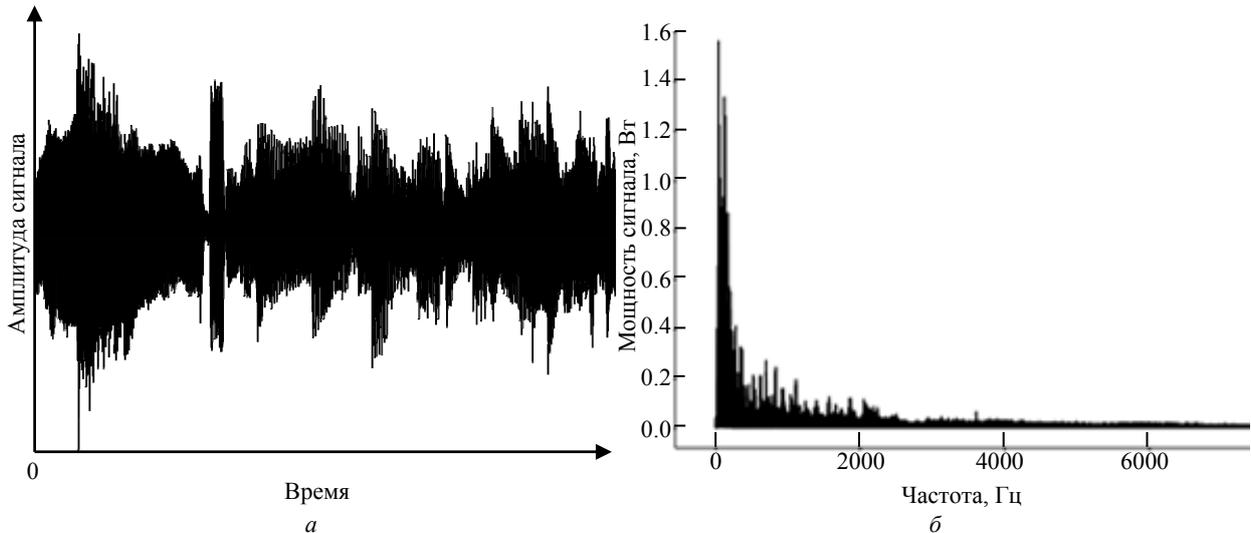


Рис. 3. Представление сигнала: *a* – во времени; *b* – по частоте
Fig. 3. Representation of the signal: *a* – in time; *b* – in frequency

Виды различных гармонических синусоидальных сигналов разной частоты и мощности показаны на рис. 1.

Для высокочастотной синусоидальной волны пики расположены очень близко друг к другу и могут даже сливаться, пики низкочастотной волны расположены далеко друг от друга и при очень низкой частоте могут даже быть не видны на рисунке, мощность и амплитуда синусоидальной волны прямо пропорциональны друг другу, что хорошо видно на рис. 1 справа.

Используем преобразование Фурье для обработки сигнала, который часто встречается в практике: сигнал имеет частоты, хорошо отделенные по времени друг от друга. Для частотной обработки используем дискретные сигналы, обычно обрабатываются звуки. Сигнал зададим с помощью простых музыкальных нот через большие промежутки времени. Возьмем для обработки три ноты. После преобразования получим частотный спектр сигнала (рис. 2). По оси абсцисс отложена частота, по оси ординат – мощность.

Имеем результирующий частотный спектр из трех пиков: 1 пик – 1 нота. На спектре можно рассмотреть также мощность сигнала, она прямо связана с исполненной нотой. Более «сильное» исполнение ноты покажет большую мощность ее частоты.

Применение преобразования Фурье. Преобразование Фурье уже давно применяется там, где есть какие-либо сигналы. Желательно, чтобы сигналы были стационарными. Это может быть, например, обработка изображения и речи, очистка от шумов, обработка электрокардиограмм, музыки [2]–[4].

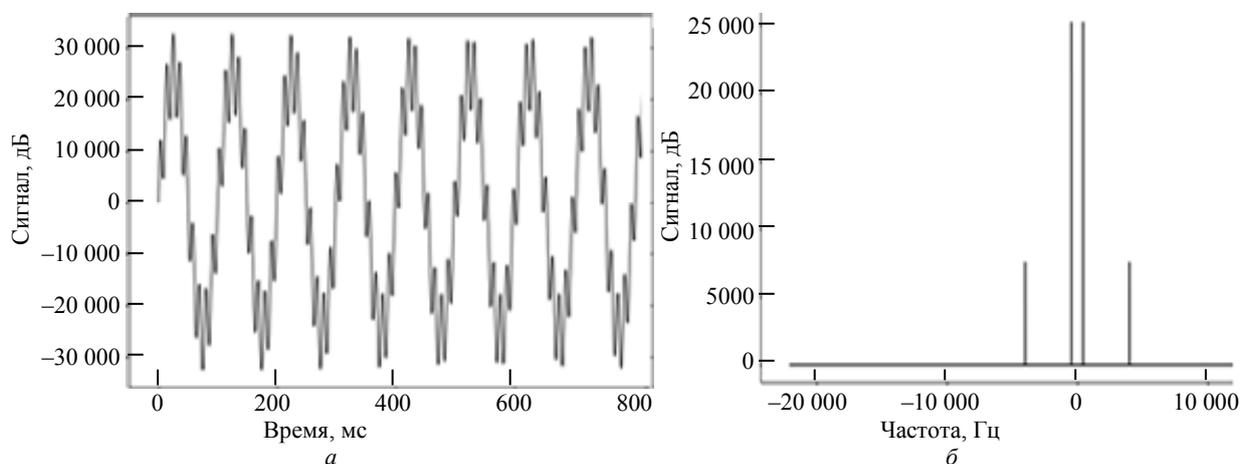


Рис. 4. Вид смикшированного сигнала: *a* – во временной области; *b* – в частотной области
Fig. 4. View of the mixed signal: *a* – in the time domain; *b* – in the frequency domain

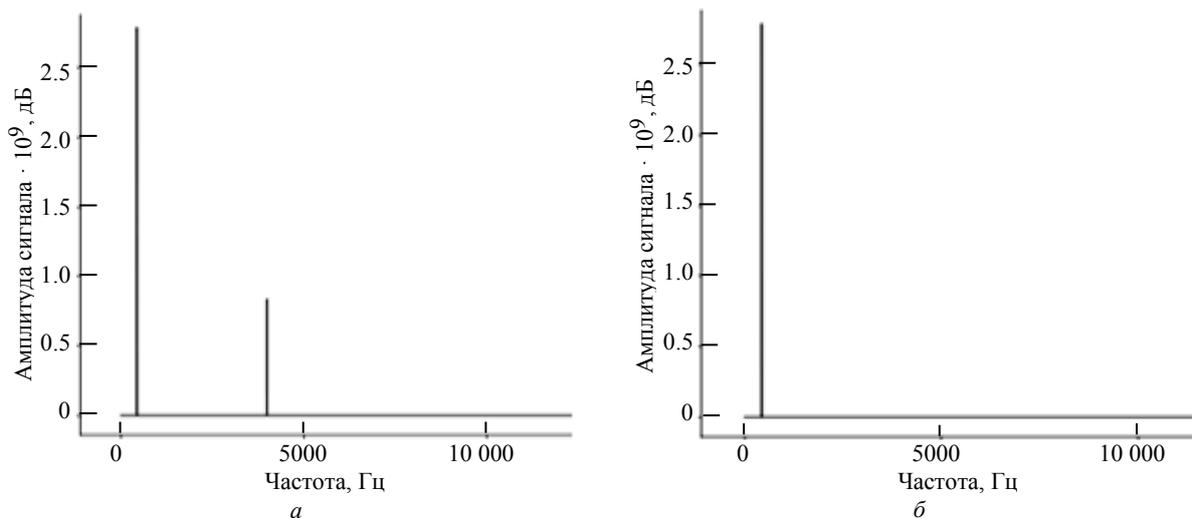


Рис. 5. Спектр сигнала: *a* – исходный; *b* – после очистки
Fig. 5. Spectrum of the signal: *a* – the initial; *b* – after cleaning

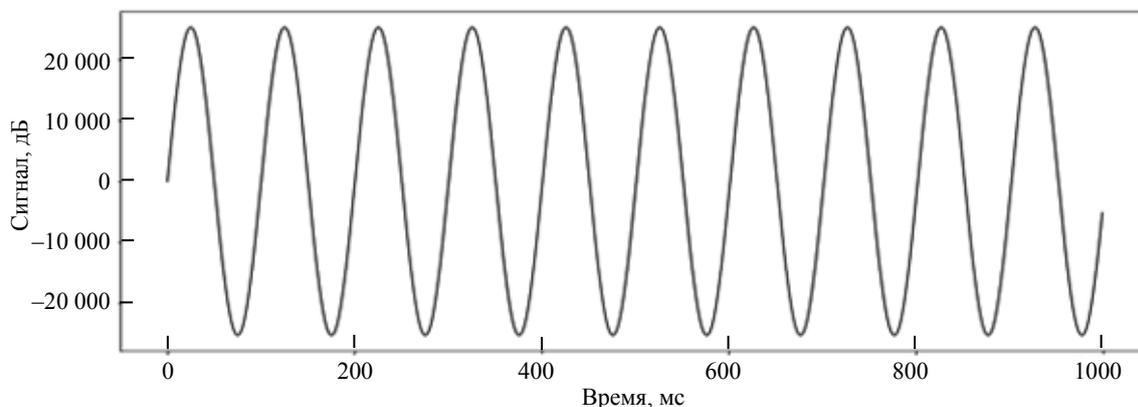


Рис. 6. Итоговой сигнал
Fig. 6. Final signal

Представление сигналов во времени или в виде частот. Сигнал можно представить по-разному. Записываем сигнал во времени. Делаем преобразование Фурье – и теперь у нас есть совокупность частот и амплитуд. Возьмем звуковой сигнал для обработки во временной области (рис. 3, а). Горизонтальная ось соответствует времени, вертикальная – амплитуде. Разбиваем сигнал по частотам. Горизонтальная ось на рис. 3, б представляет частоту, вертикальная – мощность.

Последующая обработка сигнала. Добавим в исходный звуковой сигнал шум, который обычно представляется в виде высокочастотного сигнала, и перемешаем или смикшируем сигнал. Полученный сигнал обработаем с помощью прямого преобразования Фурье. Помним, что одно колебание – это одна частота, и на слух она представляется чистым тоном. Используем это для генерации звука: на рис. 4, а по оси OX отложено время в миллисекундах и значение сигнала по оси OY ; на рис. 4, б по оси OX отложены частоты в герцах и значение сигнала по оси OY .

После преобразования можно различить положительные частоты сигнала 3500 и 350 Гц.

Для преобразования взяты две частоты, изображенные на рис. 5, а.

Из частотной области вернемся снова во временную с помощью обратного преобразования Фурье. В результате убирается шум с высокочастотными компонентами.

На рис. 6 показана одна итоговая синусоида с частотой 350 Гц. Ненужные добавки сигнала удалены.

В чем разница Фурье-преобразования и вейвлет-анализа, каковы их сферы применения? В общем случае Фурье-преобразование – это разложение функции по ортонормированному базису функций. Разлагая функцию таким образом, можно сделать ее амплитудно-частотный анализ [7]. Это имеет огромное применение там, где имеют дело с сигналами (радиосигналы, звуковые сигналы), с колебаниями и с периодическими пространственными структурами.

Однако Фурье-преобразование не учитывает нестационарность разлагаемой функции. Оно не может определить, в какой именно момент времени частота сигнала изменилась, поэтому будем использовать вейвлет-преобразование.

2. Вейвлет-преобразование. Вейвлет-преобразование (*англ.* Wavelettransform), иначе – всплеск, использует ту особенность, что при пре-

образовании Фурье разложение сигнала происходит по бесконечной синусоидальной функции, в то время как при вейвлет-преобразовании вейвлет-функция Ψ ограничена во времени и на большей части временного интервала равна 0 [9], [10].

Прямое вейвлет-преобразование:

$$Wf(a, b) = \int f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt,$$

где a – масштаб; b – частота. Обычно $b = 1/a$.

Обратное вейвлет-преобразование переводит сигнал снова во временную область:

$$f = \frac{1}{C_\Psi} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (f, \Psi_{ab}) \Psi_{ab}(t) \frac{da db}{a^2}.$$

Дискретное вейвлет-преобразование (DWT) – это преобразование, которое разлагает данный сигнал на ряд множеств, где каждое множество представляет собой временной ряд коэффициентов, описывающих временную эволюцию сигнала в соответствующей полосе частот.

Сама систематизированная теория вейвлет-преобразования начала создаваться сравнительно недавно [8]–[11]. Для обработки сначала надо выбрать вейвлет-функцию и параметры масштаба для непрерывного вейвлет-преобразования или количество уровней разложения сигналов – для дискретного. Также надо продумать, процедуру построения аппроксимирующего базиса, конструкции разложения временного ряда, и др.

Исходный поток информации можно разложить на несколько потоков разной степени информативности, при этом каждый новый поток вносит свою добавку-информацию в полученный ранее поток. Упрощенно представим наш поток в виде трех составляющих (можно больше). Каждый последующий поток добавляет уточняющую информацию к предыдущему – от первого к третьему:

- 1) основной поток информации (представляется гораздо менее плотный, чем исходный);
- 2) уточняющий поток (необходим не во всех случаях);
- 3) несущественный поток (как правило, отбрасывается).

Обратим внимание: основной поток информации – это и есть сжатый исходный поток информации.

Для эксперимента выберем два сигнала, представленные функциями и заданные в виде таблицы. Длину сигнала (количество точек) желательнее

указать удобной для последующей обработки и равной степени числа 2. При этом сильно упрощается программа, реализующая само преобразование. Поэтому возьмем 2 в степени 9 – всего 512 точек. Будем считать, что высокочастотная составляющая незначительна – это помехи, и для обработки важна только низкочастотная составляющая сигнала – основной поток. Сигналы для обработки приведены на рис. 7. По оси Ox указано время, по оси Oy – амплитуда сигнала.

Обработка сигнала состоит в выделении важной составляющей сигнала. Всего сделаем две стадии:

1) сжатие сигнала в два раза (сохраняется только первая, важная – низкочастотная состав-

ляющая, убирается ненужная вторая – высокочастотная составляющая);

2) потом происходит укрупнение для низкочастотной составляющей сетки в два раза.

Увеличение глубины разложения будем делать до того момента, пока вейвлет-преобразование не станет существенно изменять форму исходного сигнала.

Для вейвлет-преобразования необходима вейвлет-функция. Выбор вейвлет-функций весьма широк [8], [10]. Остановим свой выбор на вейвлете Добеши D4 (рис. 8). По оси Ox указано время, мс, по оси Oy – амплитуда сигнала, дБ.

Вейвлет-функция Добеши D4 уже давно хорошо зарекомендовала себя при отфильтровке

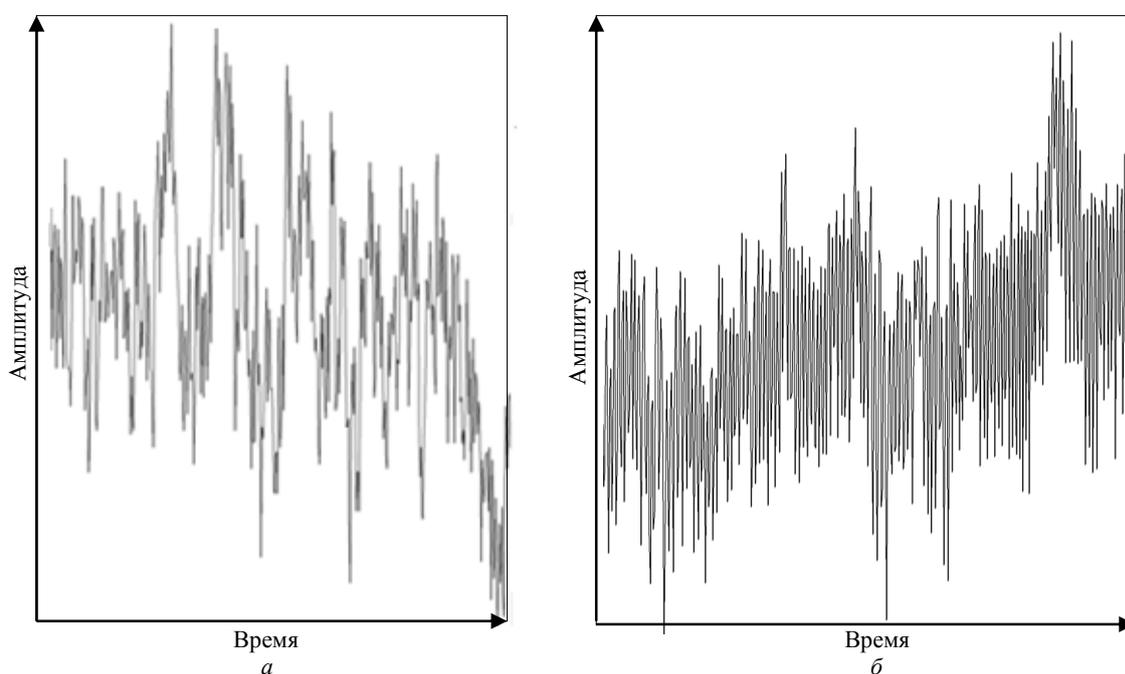


Рис. 7. Входные сигналы: a – первый; b – второй
Fig. 7. Input signals: a – first; b – second

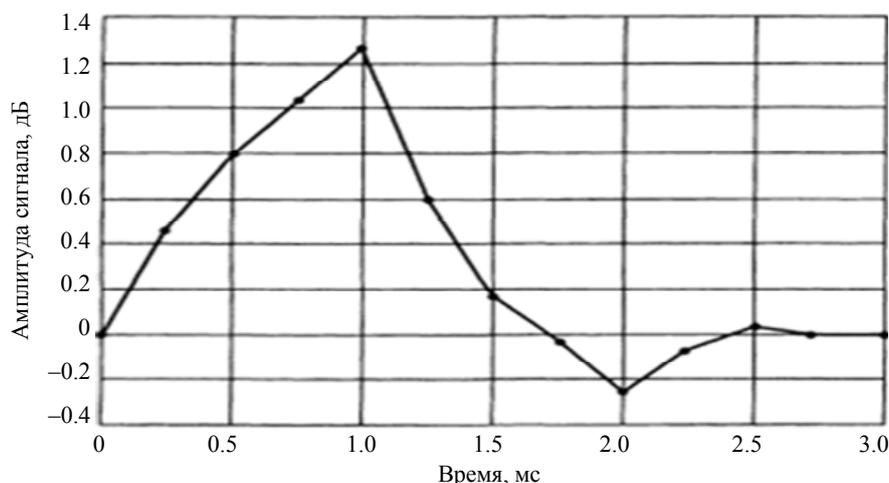


Рис. 8. D4 – вейвлет Добеши
Fig. 8. D4 – the Dobshy wavelet

высокочастотных изменений сигнала и при проведении крупномасштабного анализа [8].

Теперь надо выбрать количество уровней разложения сигналов. Ограничимся применением трех уровней для обработки или сжатия первого исходного сигнала. (рис. 9–11). Ось OX указывает время, ось OY – амплитуду сигнала.

Входной сигнал на рисунке представлен тонкой серой линией, а обработанный сигнал – толстой черной сплошной линией. Входной сигнал имеет длину 512, обработанный сигнал уменьшился в 2 раза – 256. После обработки сигнал имеет приращение по оси OX в два раза больше, чем входной сигнал.

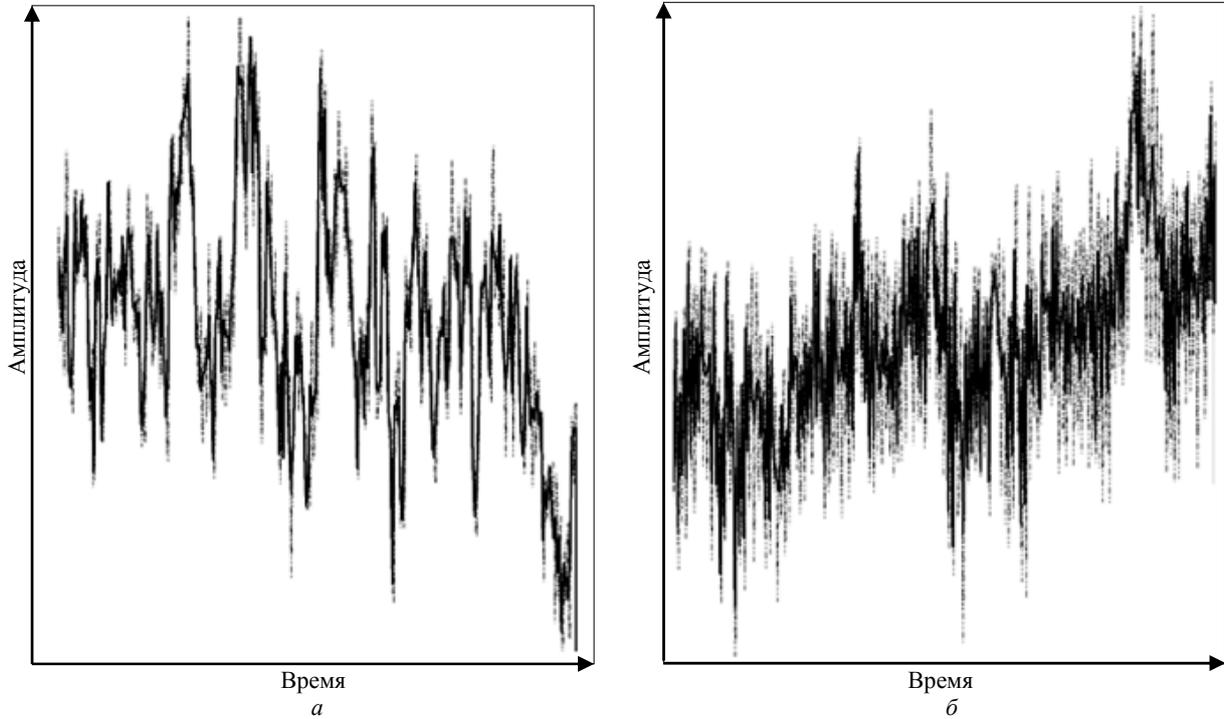


Рис. 9. Первые уровни разложения: a – первого входного сигнала; b – второго входного сигнала
Fig. 9. First levels of decomposition: a – first input signal; b – second input signal

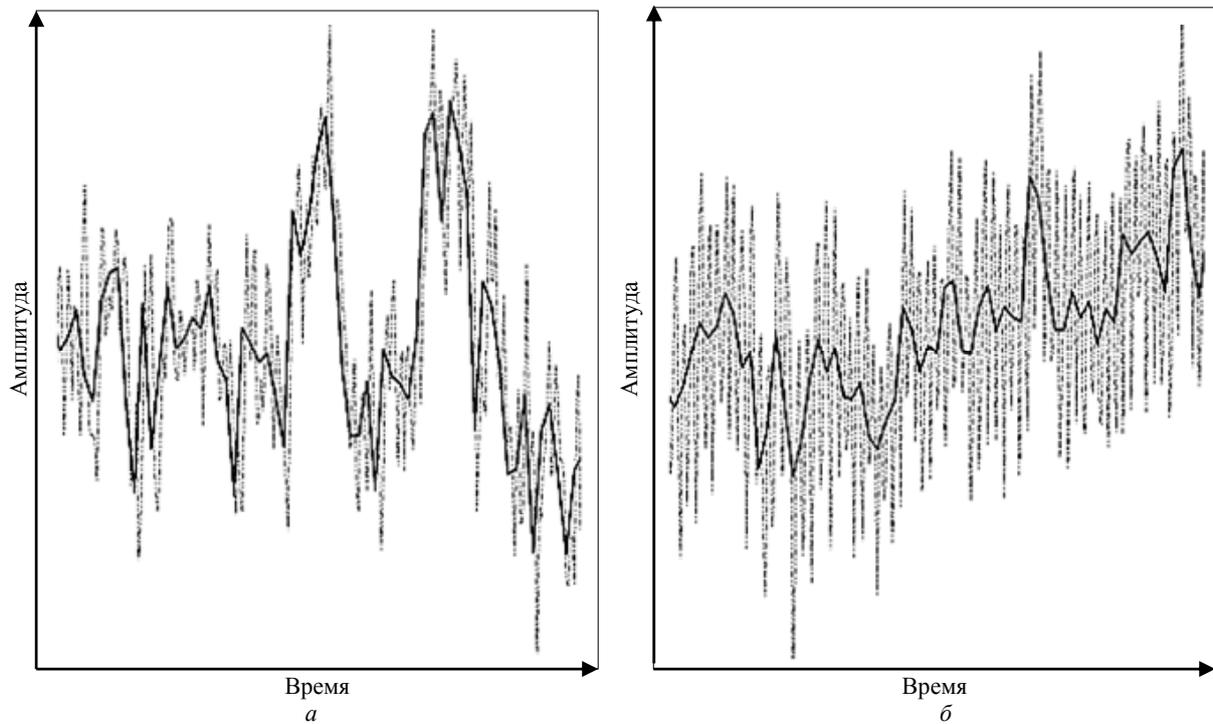


Рис. 10. Вторые уровни разложения: a – первого входного сигнала; b – второго входного сигнала
Fig. 10. Second levels of decomposition: a – first input signal; b – second input signal

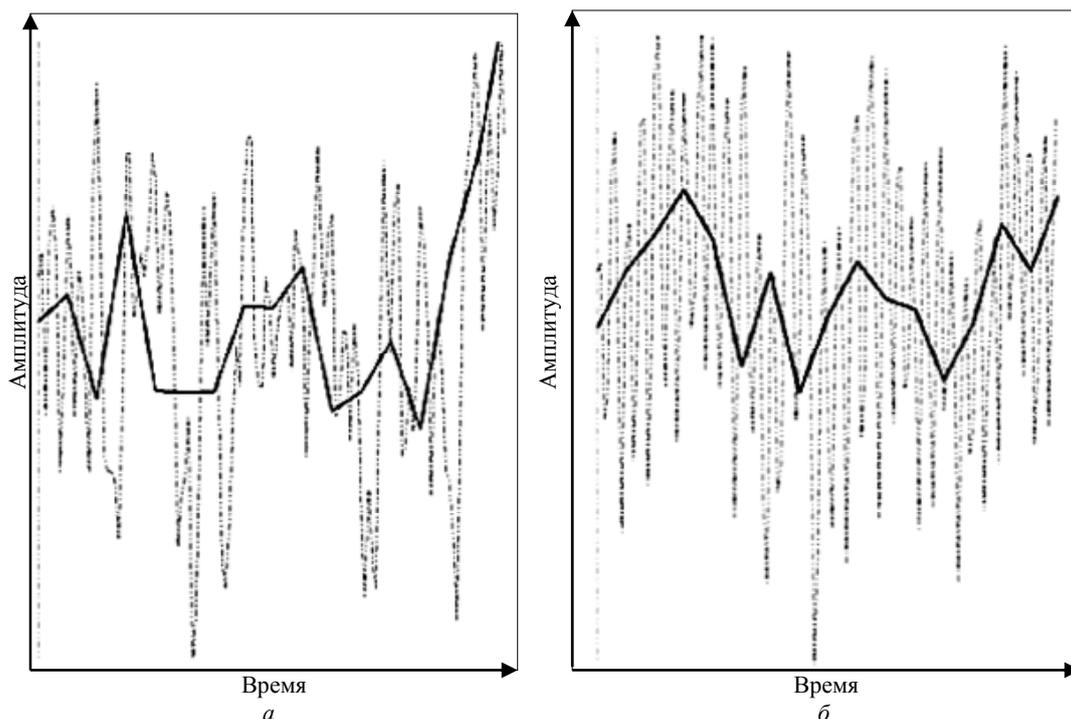


Рис. 11. Третьи уровни разложения: *a* – первого входного сигнала; *б* – второго входного сигнала
Fig. 11. Third levels of decomposition: *a* – first input signal, *б* – second input signal

Теперь произведем восстановление сжатого сигнала первого уровня 256 точек с помощью обратного вейвлет-преобразования до исходного файла, состоящего из 512 точек, оба графика (исходный и восстановленный) были наложены один на другой с одинаковыми масштабами по оси *OX*.

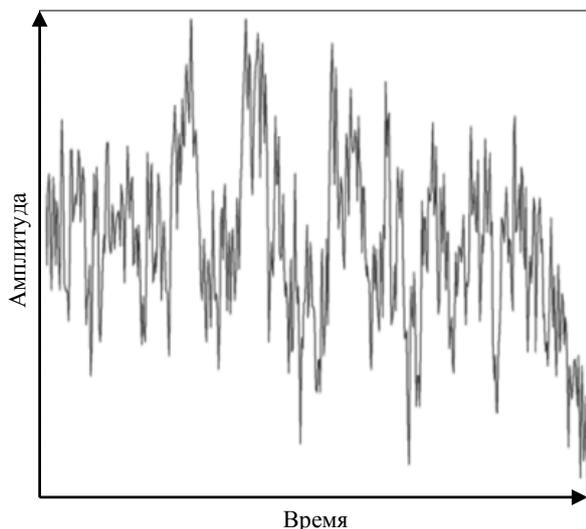


Рис. 12. Исходный сигнал – серая линия, восстановленный – черная линия
Fig. 12. The original signal is a gray line, the restored one is a black line

Исходный сигнал снова изображался тонкой серой штрих пунктирной линией, а восстановленный – толстой сплошной черной линией (рис. 12).

При этом получилось, что пунктирная линия не видна на рисунке, она скрыта под черной. Это значит, что произошло практически полное перекрытие сигналов.

Для преобразования использовалась программа на языке C++ размером 142 Кбайт памяти.

В дальнейшем можно применить вейвлет-преобразование в самых разных предметных областях: анализ фондовых рынков, обработка медицинских сигналов, прогнозирование спроса на продукцию, выявление дефектов конструкций, обработка воздушных потоков транспортных средств, связь и т. д.

Заключение. Какое же преобразование лучше, Фурье или вейвлет?

Если вы имеете дело только со стационарными процессами, то вейвлет-преобразование ничуть не лучше. Вейвлет-анализ не сможет дать больше новой информации, чем Фурье-анализ, а компьютер затратит на него больше вычислительных ресурсов и времени, чем на анализ Фурье.

По этой причине рекомендованная область применения вейвлет-анализа – это ярко выраженные нестационарные процессы сложного математического характера – например, когда спектр вычислительного процесса очень сильно меняется со временем.

Список литературы

1. Сато Ю. Без паники! Цифровая обработка сигналов. М.: Додэка XXI, 2010. 176 с.
2. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Питер, 2006. 2-е изд.
3. Харкевич А. А. Спектры и анализ, М.: ЛКИ, 2007. 236 с. 4-е изд.
4. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2007. 856 с. Изд. 2-е, испр.
5. Федоренко С. В. Модификация алгоритма Грецеля–Блейхута // Приборостроение. 2013. Т. 56, № 8. С. 17–20.
6. Савинков А. Ю. Вычислительно-эффективная реализация дискретного преобразования Фурье // Материалы XXIII Междунар. науч.-практ. конф. им. Э. К. Алгазинова. Воронеж: Изд-во Воронежского гос. ун-та. С. 407–419.
7. Нуссбаумер Г. Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток. М.: Радио и связь, 1985.
8. Мандрикова О. В., Горева Т. С. Метод идентификации структурных компонентов сложного природного сигнала на основе вейвлет-пакетов. М.: Цифровая обработка сигналов. 2010. № 1. С. 45–50.
9. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / пер. с англ. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 464 с.
10. Марпл.-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / пер. с англ. М.: Мир, 1990. 265 с.
11. Маллат С. Вейвлет-тур по обработке сигналов / пер. с англ. М.: Мир, 2005. 671с.

Информация об авторах

Подклетнов Сергей Георгиевич – канд. техн. наук, доцент кафедры вычислительной техники СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

Email: podklet@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0001-6617-5901>

References

1. Sato Ju. Bez paniki! Cifrovaja obrabotka signalov. M.: Dodjeka XXI, 2010. 176 s. (In Russ.).
2. Sergienko A. B. Cifrovaja obrabotka signalov. SPb.: Piter, 2006. 2-e izd. (In Russ.).
3. Harkevich A. A. Spektry i analiz, M.: LKI, 2007. 236 s. 4-e izd. (In Russ.).
4. Oppengejm A., Shafer R. Cifrovaja obrabotka signalov. M.: Tehnosfera, 2007. 856 s. Izd. 2-e, ispr. (In Russ.).
5. Fedorenko S. V. Modifikacija algoritma Grecelja–Blejhuta // Priborostroenie. 2013. T. 56, № 8. S. 17–20. (In Russ.).
6. Savinkov A. Ju. Vychislitel'no-jeffektivnaja realizacija diskretnogo preobrazovanija Fur'e // Materialy XXIII Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. im. Je. K. Algazinova. Voronezh: Izd-vo Voronezhskogo gos. un-ta. S. 407–419. (In Russ.).
7. Nussbaumer G. Bystroe preobrazovanie Fur'e i algoritmy vychislenija svjortok. M.: Radio i svjaz', 1985. (In Russ.).
8. Mandrikova O. V., Goreva T. S. Metod identifikacii strukturnyh komponentov slozhnogo prirodnogo signala na osnove vejvlet-paketov. M.: Cifrovaja obrabotka signalov. 2010. № 1.S. 45–50. (In Russ.).
9. Dobeshi I. Desjat' lekcij po vejvletam / per. s angl. Izhevsk: NIC «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika», 2001. 464 s. (In Russ.).
10. Marpl.-ml. S. L. Cifrovoj spektral'nyj analiz i ego prilozhenija / per. s angl. M.: Mir, 1990. 265 s.
11. Mallat S. Vejvlet-tur po obrabotke signalov / per. s angl. M.: Mir, 2005. 671s. (In Russ.).

Information about the authors

Sergei G. Podkletnov – Cand. Sci. (Eng.), Assistant of the Department of Computer Engineering of the Saint Petersburg Electrotechnical University.

Email: podklet@yandex.ru

<https://orcid.org/0000-0001-6617-5901>

Статья поступила в редакцию 27.04.2024; принята к публикации после рецензирования 05.05.2024; опубликована онлайн 21.06.2024.

Submitted 27.04.2024; accepted 05.05.2024; published online 21.06.2024.
