

УДК 537.877

Д. А. Ходьков

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Влияние осесимметричного и неосесимметричного сферических поясов на излучение элементарного электрического вибратора

Рассмотрен подход, основанный на строгой постановке и позволяющий исследовать влияние осесимметричного и неосесимметричного сферических поясов на излучение элементарного электрического вибратора (ЭЭВ), расположенного на оси сферы, частью которой является рассматриваемый экран. Предложен численный подход, на основе которого выведена система интегро-дифференциальных уравнений, справедливая для произвольного первичного поля, которая сведена к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с комплексными коэффициентами. Исследовано распределение плотности наведенного на экране тока, а также влияние положения вибратора на вид диаграммы направленности (ДН) исследуемой системы. Для случая неосесимметричного сферического пояса введена специальная ортогональная система координат на сфере. Для указанной ортогональной системы координат выведена система интегро-дифференциальных уравнений и разработан эффективный, численный алгоритм ее решения. Проведено сравнение распределения плотности тока и ДН, соответствующих случаям осесимметричного и неосесимметричного сферического пояса.

Элементарный электрический вибратор, система интегро-дифференциальных уравнений, численный анализ, неосесимметричный сферический пояс, диаграмма направленности, плотность поверхностных токов

Общая постановка вопроса. При определении защищенности радиотехнической аппаратуры и отдельных цепей от воздействия внешних электромагнитных полей, а также при проектировании различных помехозащитных устройств применяются экраны, являющиеся частью поверхности сферы. В частности, во многих практически важных случаях такие экраны представляют собой сферический пояс (вырезку из сферы двумя плоскостями). Осесимметричному сферическому поясу соответствует случай, когда секущие плоскости параллельны друг другу. Задача о возбуждении такого экрана произвольным внешним электромагнитным полем может быть решена на основе метода, предложенного в [1] и развитого в [2].

Однако в ряде практически важных случаев сферический пояс не является осесимметричным. Основанный на строгой постановке анализ влияния такого экрана на электродинамические характеристики излучающих систем встречает существенные трудности.

В данной статье анализируется влияние осесимметричного и неосесимметричного сферических поясов на излучение ЭЭВ.

Влияние осесимметричного сферического пояса на излучение элементарного электрического вибратора. Вывод системы интегро-дифференциальных уравнений. Введем декартову x, y, z и сферическую r, θ, φ системы координат так, чтобы сферический пояс совпадал с частью поверхности сферы $r = r_0$; $0 \leq \varphi < 2\pi$; $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, где $r_0 = \text{const}$ (рис. 1).

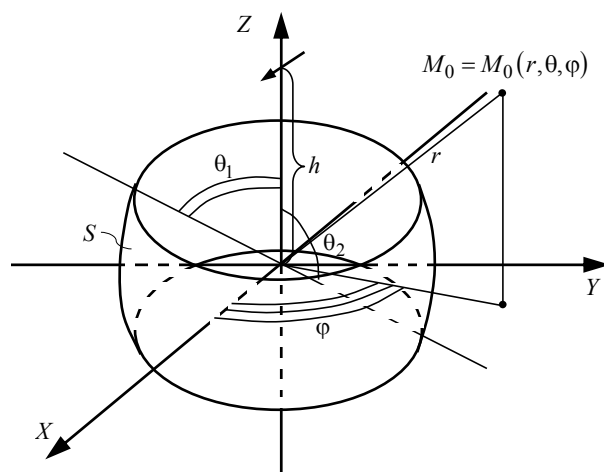


Рис. 1

Будем считать экран идеально проводящим и бесконечно тонким. Окружающее пространство – однородная изотропная среда без потерь с абсолютными диэлектрической и магнитной проницаемостями ϵ и μ соответственно. ЭЭВ расположен на оси Z в точке $Q_0 = Q(0, 0, h)$ и ориентирован вдоль оси X .

Решение задачи возможно на основе метода, изложенного в [1]. Система интегро-дифференциальных уравнений, записанная для произвольной идеально проводящей незамкнутой поверхности, в рассматриваемом случае принимает вид

$$\lim_{r \rightarrow r_0} r_0 \int_0^{2\pi} d\psi \int_{\theta_1}^{\theta_2} (j_\varphi K_{v\psi} + j_\theta K_{v\vartheta}) d\vartheta = 4\pi i \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_v(r_0, \varphi, \theta); \quad v = \varphi, \theta; \quad (1)$$

$$0 \leq \varphi < 2\pi; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,$$

где

$$K_{\varphi\psi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial \psi} - k^2 r_0 G \cos(\varphi - \psi) \sin \vartheta;$$

$$K_{\varphi\vartheta} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial G}{\partial \vartheta} - k^2 r_0 G \sin(\psi - \varphi) \cos \vartheta;$$

$$K_{\theta\psi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial G}{\partial \psi} - k^2 r_0 G \sin(\varphi - \psi) \cos \vartheta \sin \vartheta;$$

$$K_{\theta\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial G}{\partial \vartheta} - k^2 r_0 [\cos \theta \cos \vartheta \cos(\varphi - \psi) + \sin \theta \sin \vartheta] G;$$

$$G = \frac{\exp(-ikL)}{L};$$

$$L = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 [\cos(\varphi - \psi) \sin \vartheta \sin \theta + \cos \theta \cos \vartheta]};$$

где $i = \sqrt{-1}$; $E_v(r_0, \varphi, \theta)$ и $j_v = j_v(\psi, \vartheta)$; $v = \varphi, \theta$ – составляющие напряженности первичного электрического поля в точке наблюдения $M_0 = M_0(r, \theta, \varphi)$ и плотность наведенных токов в точке истока $P = P(r_0, \vartheta, \psi)$ соответственно, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число; ψ, ϑ – сферические углы точки истока.

Система уравнений (1) справедлива при произвольном первичном поле. В рассматриваемом случае функции $E_\varphi(r_0, \theta, \varphi)$, $E_\theta(r_0, \theta, \varphi)$ определяются выражением

$$E_v^0(r_0, \theta, \varphi) = -i \frac{I^0 l k^2}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} F_v, \quad v = \theta, \varphi, \quad (2)$$

где

$$F_\varphi = -S_x \sin \varphi + S_y \cos \varphi;$$

$$F_\theta = S_x \cos \theta \cos \varphi + S_y \cos \theta \sin \varphi - S_z \sin \theta;$$

$$S_x = \frac{r^2 \cos \varphi \sin^2 \theta}{R^2} W + i \frac{h^2 + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta}{R^2} V;$$

$$S_x = \frac{hr \sin \varphi \sin \theta}{R^2} (V + iW);$$

$$S_z = \frac{hr \cos \theta}{R^2} (V + iW);$$

$$V = \left[1 - \frac{i}{kR} - \frac{i}{(kR)^2} \right] e^{-ikR};$$

$$W = \frac{2}{kR} \left[1 - \frac{i}{kR} \right] e^{-ikR};$$

$$R = \sqrt{r_0^2 + h^2 + 2rh \cos \vartheta},$$

а l и I^0 – длина вибратора и амплитуда возбуждающего его тока.

Алгоритм численного решения. Выражение (1) с правой частью (2) допускает численное решение, например методом коллокации [3].

Алгоритм существенно упрощается, если использовать кусочно-постоянную аппроксимацию искомых функций.

Разобьем на N_φ частей интервал интегрирования $[0, 2\pi[$ по переменной φ и обозначим через φ_{m-1} начальную, а через φ_m – конечную точку m -го интервала разбиения ($m = 1, 2, \dots, N_\varphi$). Аналогично разобьем на N_θ частей интервал интегрирования $[\theta_1, \theta_2]$ по переменной θ и введем величины θ_{n-1} и θ_n ($n = 1, 2, \dots, N_\theta$). Таким образом, поверхность S будет разбита на $N = N_\varphi N_\theta$ элементов. Подставляем (2) в (1), и полагаем

$$j_\varphi \equiv j_\varphi(\psi, \vartheta) = \frac{k^2 I^0 l}{r_0} \sum_{n=1}^{N_\theta} \sum_{m=1}^{N_\varphi} I_{mn}^\varphi \psi_{mn}^\varphi;$$

$$j_\theta \equiv j_\theta(\psi, \vartheta) = \frac{k^2 I^0 l}{r_0} \sum_{n=1}^{N_\theta} \sum_{m=1}^{N_\varphi} I_{mn}^\theta \psi_{mn}^\theta,$$

где

$$\psi_{mn}^\varphi \equiv \psi_{mn}^\varphi(\psi, \vartheta) = \begin{cases} 1 & \text{при } \psi, \vartheta \in \Delta S_{mn}, \\ 0 & \text{при } \psi, \vartheta \notin \Delta S_{mn}, \end{cases}$$

а I_{mn}^v ; $v = \varphi, \theta$ – подлежащие определению постоянные. Точки коллокации выберем в серединах

интервалов разбиения ΔS_{mn} и придем к следующей СЛАУ:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{N_\varphi} \sum_{n=1}^{N_\theta} I_{mn}^\varphi T_{mn}^{\psi\nu} (M_{pq}) + I_{mn}^\theta T_{mn}^{\vartheta\nu} (M_{pq}) = \\ = E_\nu (M_{pq}), \nu = \varphi, \theta; \\ p = 1, 2, \dots, N_\varphi; \quad q = 1, 2, \dots, N_\theta, \end{aligned} \quad (3)$$

где $M_{pq} = M(r_0, \tilde{\varphi}_p, \tilde{\theta}_q)$ – точка коллокации, совпадающая с серединой элемента ΔS_{pq} ,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_p = 0.5(\varphi_{p-1} + \varphi_p); \quad \tilde{\theta}_q = 0.5(\theta_{q-1} + \theta_q); \\ T_{mn}^{\psi\varphi} (M_{pq}) = r_0 \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} \sin \vartheta \sin(\varphi - \vartheta) G^* \Big|_{\psi=\varphi_m}^{\psi=\varphi_{m-1}} d\vartheta + \\ + k^2 r_0 \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} d\vartheta \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} \sin \vartheta \cos(\varphi - \psi) G d\psi; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} T_{mn}^{\vartheta\varphi} (M_{pq}) = r_0 \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} \sin \vartheta \sin(\varphi - \psi) G^* \Big|_{\vartheta=\theta_n}^{\vartheta=\theta_{n-1}} d\psi + \\ + k^2 r_0 \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} d\vartheta \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} \cos \vartheta \sin(\psi - \varphi) G d\psi; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} T_{mn}^{\psi\theta} (M_{pq}) = -r_0 \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} [\sin \vartheta \cos \theta \cos(\varphi - \psi) + \\ + \sin \theta \sin \vartheta] G^* \Big|_{\psi=\varphi_m}^{\psi=\varphi_{m-1}} d\psi - \\ + k^2 r_0 \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} d\vartheta \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} \cos \theta \sin \vartheta \sin(\varphi - \psi) G d\psi; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} T_{mn}^{\vartheta\theta} (M_{pq}) = -r_0 \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} [\sin \vartheta \cos \theta \cos(\varphi - \psi) + \\ + \sin \theta \cos \vartheta] G^* \Big|_{\vartheta=\theta_n}^{\vartheta=\theta_{n-1}} d\psi - \\ - k^2 r_0 \int_{\theta_{n-1}}^{\theta_n} d\vartheta \int_{\varphi_{m-1}}^{\varphi_m} [\cos \theta \cos \vartheta \cos(\varphi - \psi) + \\ + \sin \theta \sin \vartheta] d\psi; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} G^* = G_{pq}^* = \left(\frac{ik}{L} + \frac{1}{L^2} \right) G_{pq}; \\ G_{pq} = G \Big|_{\varphi=\tilde{\varphi}_p, \theta=\tilde{\theta}_q}. \end{aligned}$$

Переход к пределу $r \rightarrow r_0$ при выводе формул (4)–(7) для элементов матрицы $T_{mn}^{\alpha\nu}$; $\alpha = \psi, \vartheta$; $\nu = \varphi, \theta$ осуществлялся после дискретизации уравнений (1) и аналитического вычисления интегралов.

Устойчивость численного алгоритма обусловлено тем, что СЛАУ (3) имеет доминирующую главную диагональ [3].

Отметим, что в (4)–(7) при совпадении точек истока и наблюдения неинтегрируемая особенность вида $1/L$ устраняется, если подынтегральное выражение для элементов матрицы представить в виде двух слагаемых, одно из которых – гладкая функция, а численное интегрирование второго упрощается, если понизить кратность с помощью следующей формулы

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{u \sin \alpha + v \cos \alpha + l}{\sqrt{a + b \cos \alpha + c \sin \alpha}} d\alpha = \\ = \left\{ \frac{2}{\sqrt{a+p}} [F(\gamma, \eta) - 2D(\gamma, \eta)] \times \right. \\ \times [u \sin m + v \cos m] + \frac{2l}{\sqrt{a+p}} F(\gamma, \eta) - \\ \left. - \frac{4\sqrt{1+\beta^2 \cos q}}{\beta^2} [u \cos m - v \sin m] \right\} \Bigg|_{\alpha=\alpha_1}^{\alpha=\alpha_2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $u, v, l, a, b, c, \alpha_1, \alpha_2 = \text{const}$; $p = \sqrt{b^2 + c^2}$; $m = \text{arctg}(a/p)$; $q = \frac{\alpha - m}{2}$; $\gamma = \text{tg } q$; $\beta = \sqrt{\frac{2p}{\alpha - p}}$; $\eta = \sqrt{\frac{2p}{\alpha + p}}$; $D(\gamma, \eta) = [F(\gamma, \eta) - E(\gamma, \eta)]/\eta^2$.

$F(\gamma, \eta)$ и $E(\gamma, \eta)$ эллиптические интегралы 1-го и 2-го рода соответственно.

С учетом того что исследуемый экран – это поверхность вращения, дифракционная матрица $T_{mn}^{\alpha\nu}$, $\alpha = \vartheta, \psi$, $\nu = \theta, \varphi$ имеет специальную блочно-теплицеву структуру. Это обстоятельство позволяет применить эффективные численные алгоритмы решения СЛАУ, требующие $8N_\varphi^3 N_\theta^2$ арифметических операций [4]. Однако в данном случае функция плотности поверхностных токов, наведенных на экране, симметрична относительно плоскостей $x = 0$ и $y = 0$ и для любых точек M_1, M_2, M_3, M_4 , положение которых на

сферическом поясе определено вышеуказанной симметрией (рис. 2), соблюдаются следующие соотношения:

$$j_\varphi(M_1) = j_\varphi(M_2) = -j_\varphi(M_3) = -j_\varphi(M_4);$$

$$j_\theta(M_1) = -j_\theta(M_2) = -j_\theta(M_3) = j_\theta(M_4).$$

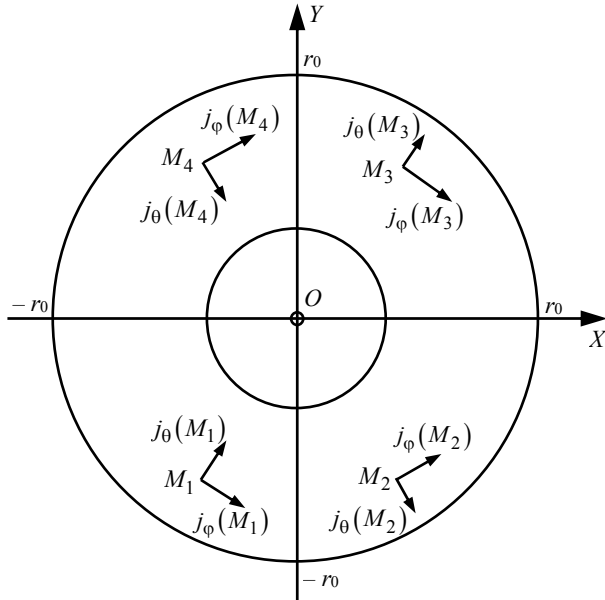


Рис. 2

Следовательно, определение функций $j_\varphi(\psi, \vartheta)$ и $j_\theta(\psi, \vartheta)$ на сферическом поясе, возбуждаемом полем (2), сводится к определению функций плотности поверхностного тока в области, определяемой неравенствами $0 \leq \varphi \leq \pi/2$; $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, равной 1/4 площади исследуемого сферического пояса S .

Указанное обстоятельство позволяет уменьшить размерность СЛАУ в четыре раза, используя метод свертки, изложенный в [5]. При этом СЛАУ (3) переходит в СЛАУ

$$\sum_{m=1}^{N_\varphi} \sum_{n=1}^{N_\varphi/4} I_{mn}^\varphi P_{mn}^{\psi v} (M_{pq}) + I_{mn}^\theta P_{mn}^{\vartheta v} (M_{pq}) =$$

$$= E_v (M_{pq}); \quad v = \varphi, \theta; \quad (9)$$

$$p = 1, 2, \dots, N_\varphi; \quad q = 1, 2, \dots, N_\theta,$$

где $M_{pq} = M(r_0, \tilde{\varphi}_p, \tilde{\theta}_q)$ – точка коллокации, совпадающая с серединой элемента ΔS_{pq} ;

$$P_{mn}^{\psi v} (M_{pq}) = T_{mn}^{\psi v} (M_{pq}) + T_{(N_\varphi/2-m)n}^{\psi v} (M_{pq}) -$$

$$- T_{(N_\varphi/2+m)n}^{\psi v} (M_{pq}) - T_{(N_\varphi-m)n}^{\psi v} (M_{pq});$$

$$P_{mn}^{\vartheta v} (M_{pq}) = T_{mn}^{\vartheta v} (M_{pq}) + T_{(N_\varphi/2-m)n}^{\vartheta v} (M_{pq}) -$$

$$- T_{(N_\varphi/2+m)n}^{\vartheta v} (M_{pq}) - T_{(N_\varphi-m)n}^{\vartheta v} (M_{pq}).$$

В этом случае матрица теряет блочно-теплицевую структуру и, следовательно, для решения СЛАУ требуется $N_\varphi^3 N_\theta^3 / 8$ арифметических операций. Очевидно, что при разбиении прямоугольного экрана на число сегментов $N_\varphi, N_\theta < 64$ эффективнее применять операцию «свертки». По сравнению с соответствующим числом для блочно-теплицевого алгоритма, число сэкономленных арифметических операций определяется выражением

$$N^+ = 8N_\varphi^3 N_\theta^2 - \frac{N_\varphi^3 N_\theta^3}{8}.$$

Необходимо отметить, что в частном случае, когда $h = 0$ (ЭЭВ расположен в начале координат), структура токов, наведенных на сферическом поясе, обладает дополнительной симметрией относительно плоскости $z = 0$, что позволяет «свернуть» дифракционную матрицу в восемь раз.

Результаты численных расчетов. Найденные в результате решения СЛАУ (3) составляющие $j_\varphi(\varphi, \theta)$, $j_\theta(\varphi, \theta)$ плотности наведенных токов в $N = N_\varphi N_\theta$ точках коллокации позволяют рассчитать компоненты электромагнитного поля в любой точке пространства.

На основании вышеописанного алгоритма было исследовано влияние идеально проводящего сферического пояса для случая $kr_0 = 3$;

$\theta_1 = \frac{\pi}{3}$; $\theta_2 = \frac{2\pi}{3}$ на электромагнитное поле, излучаемое ЭЭВ, изображенным на рис. 1.

На рис 3 построены графики модуля составляющей $j_\varphi(\theta, \varphi)$ при $\varphi = \pi/2$ и составляющей $j_\theta(\theta, \varphi)$ при $\varphi = 0$ от угла θ для случая $h \rightarrow -\infty$ при различных N_φ и N_θ , при падении на экран плоской электромагнитной волны, вектор \mathbf{E} которой определяется выражением $\mathbf{E} = \mathbf{x}^0 E_0 e^{-ik(-z)}$.

Решения, полученные при различных $N_\theta > 26$ и $N_\varphi > 48$, не отличаются в пределах графической точности, что свидетельствует о внутренней сходимости численного алгоритма.

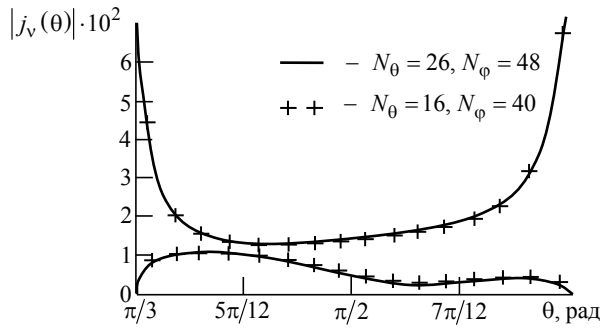


Рис. 3

При приближениях $\theta \rightarrow \theta_1$ и $\theta \rightarrow \theta_2$ тангенциальная составляющая $j_\varphi \rightarrow \infty$, а нормальная составляющая $j_\theta \rightarrow 0$, что согласуется с условиями на ребре [5].

Направленные свойства исследуемой системы проиллюстрированы рис. 4, 5, где построены графики НДН (нормированных диаграмм направленности) анализируемой системы в плоскостях $y = 0$ и $x = 0$ соответственно для случаев $h = 0$ (сплошные линии), $h = 0.05\lambda$ (точки) и $h = 0.1\lambda$ (штрихи); $\lambda = 2\pi/k$ – длина волны.

Влияние неосесимметричного сферического пояса на излучение элементарного электрического вибратора. Вывод нестандартной ортогональной системы координат на сфере. Случай, когда плоскости, секущие сферу, не параллельны друг другу, соответствует неосесимметричному сферическому поясу. Очевидно, что края исследуемой поверхности не совпадают с координатными линиями сферической системы координат r, θ, φ . Это не позволяет впрямую применить вышеизложенный метод, так как при выводе системы (3) предполагалось, что края исследуемой поверхности совпадают с координатными линиями выбранной ортогональной системы координат. Однако, если ввести на сфере нестандартную ортогональную систему координат, так, чтобы края неосесимметричного сферического пояса совпадали с его

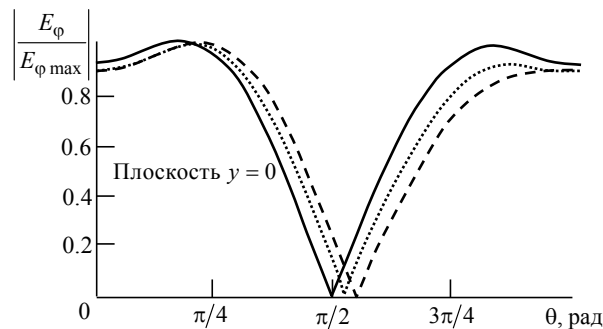


Рис. 4

координатными линиями, то метод может быть применен для решения поставленной задачи.

Покажем, что искомая ортогональная система координат существует.

Введем декартову x, y, z и сферическую r, θ, φ системы координат так, чтобы центр сферы S с радиусом r_0 находился в начале координат (рис. 6). Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что две секущие сферу плоскости, определяющие сферический пояс, проходят через прямую γ , лежащую в плоскости $z = 0$ и параллельную оси Y . Пучок плоскостей, проходящий через γ , индуцирует на поверхности сферы правильное однопараметрическое семейство линий. Необходимо определить другое однопараметрическое семейство линий, которое вместе с первым в произвольной точке $M = M(r_0, \theta, \varphi)$ на сфере обращает в ноль скалярное произведение (\mathbf{h}, \mathbf{p}) , где \mathbf{h} и \mathbf{p} – касательные векторы к соответствующим линиям двух семейств.

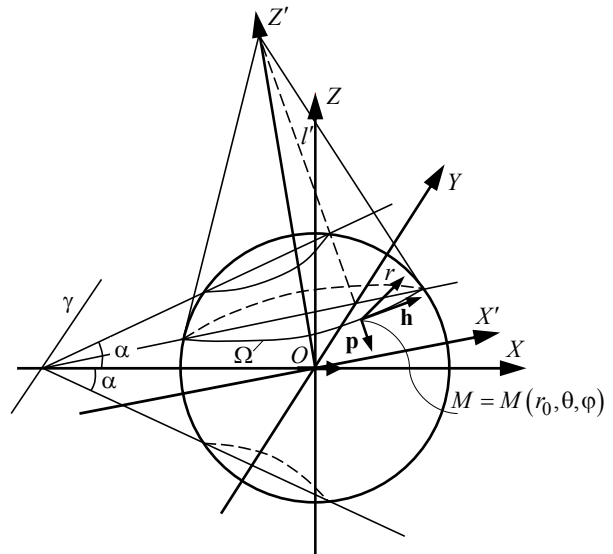


Рис. 6

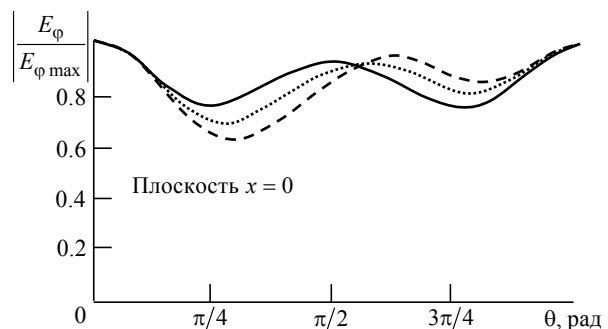


Рис. 5

Пусть какая-либо плоскость из пучка, определенного прямой γ , пересекает сферу по окружности Ω . Рассмотрим круговой конус, касающийся сферы вдоль Ω . Очевидно, что любая его образующая l' ортогональна Ω в точке пересечения M и лежит в плоскости, касательной к S . Следовательно, тройка векторов \mathbf{h} , \mathbf{p} , \mathbf{r} в произвольной точке M , где \mathbf{h} – вектор, касательный к окружности Ω ; \mathbf{p} – вектор, определяющий направление образующей l' , а \mathbf{r} – радиус-вектор, может рассматриваться, как локальный базис ортогональной системы координат. Следовательно, искомая ортогональная система существует. Определим ее связь с декартовой системой x, y, z . Тройка векторов \mathbf{h} , \mathbf{p} , \mathbf{r} в любой точке M может рассматриваться, как базисная тройка сферической системы координат r, θ, φ , введенной обычным образом в декартовой системе координат x', y', z' :

$$\begin{cases} x' = r \cos \varphi \sin \theta; \\ y' = r \sin \varphi \sin \theta; \\ z' = r \cos \theta, \end{cases}$$

где система x', y', z' связана с системой x, y, z соотношением:

$$\begin{cases} x = x' \cos \nu - z' \sin \nu; \\ z = x' \sin \nu + z' \cos \nu; \\ y = y'. \end{cases}$$

Угол ν определяет угол поворота системы x', y', z' вокруг оси Y и является функцией положения точки M на сфере. Для произвольной точки $M = M(r_0, \theta, \varphi)$, когда α мал ($\alpha \rightarrow 0$), то угол ν с точностью до множителей порядка α^3 может быть определен следующим выражением:

$$\nu = \alpha \cos \theta + 0(\alpha^3).$$

Тогда связь между декартовой и новой ортогональной системами координат определяется системой

$$\begin{cases} x = r_0 [\cos \varphi \sin \theta \cos(\alpha \cos \theta) - \cos \theta \sin(\alpha \cos \theta)]; \\ y = r_0 [\sin \varphi \sin \theta]; \\ z = r_0 [\cos \varphi \sin \theta \sin(\alpha \cos \theta) + \cos \theta \cos(\alpha \cos \theta)], \end{cases} \quad (10)$$

Вывод системы интегро-дифференциальных уравнений. После того как введена система координат (10), для решения поставленной задачи можно воспользоваться системой (1). Выражения для ядер системы в рассматриваемом случае определяются формулой

$$K_p^S = \frac{i}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{l_p} \left[-\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial G}{\partial s} + k^2 r_0 (U_p^S \cos \psi + V_p^S \sin \psi + W_p^S) \right]; \quad (11)$$

$$p = \varphi, \theta; s = \psi, \vartheta,$$

где $l_p = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2}$ – коэффициент

Ламэ в точке наблюдения $M = M(r, \theta, \varphi)$ и точке истока $P = P(r_0, \vartheta, \psi)$, а функции U_p^S, V_p^S, W_p^S определены следующими выражениями

$$U_\theta^\vartheta = \left\{ \frac{\partial x}{\partial \theta} [\cos \vartheta \cos(\alpha \cos \vartheta) + \alpha \sin^2 \vartheta \sin(\alpha \cos \vartheta) + \frac{\partial z}{\partial \theta} [\cos \vartheta \sin(\alpha \cos \vartheta) - \alpha \sin^2 \vartheta \cos(\alpha \cos \vartheta)] \right\}; \quad (12)$$

$$U_\theta^\psi = \left\{ \frac{\partial x}{\partial \theta} [\sin \vartheta \cos(\alpha \cos \vartheta) + \frac{\partial z}{\partial \theta} \sin^2 \vartheta \sin(\alpha \cos \vartheta) \right\}; \quad (13)$$

$$U_\theta^\vartheta = \left\{ \frac{\partial x}{\partial \varphi} [\cos \vartheta \cos(\alpha \cos \vartheta) + \alpha \sin^2 \vartheta \sin(\alpha \cos \vartheta)] + \frac{\partial z}{\partial \varphi} [\cos \vartheta \sin(\alpha \cos \vartheta) - \alpha \sin^2 \vartheta \cos(\alpha \cos \vartheta)] \right\}; \quad (14)$$

$$U_\varphi^\psi = - \left[\frac{\partial x}{\partial \varphi} \sin \vartheta \cos(\alpha \cos \vartheta) + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \sin \vartheta \sin(\alpha \cos \vartheta) \right]; \quad (15)$$

$$V_\theta^\vartheta = \frac{\partial y}{\partial \theta} \cos \vartheta; \quad (16)$$

$$V_\varphi^\vartheta = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cos \vartheta; \quad (17)$$

$$V_\varphi^\psi = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \sin \vartheta; \quad (18)$$

$$V_\theta^\psi = \frac{\partial y}{\partial \theta} \sin \vartheta; \quad (19)$$

$$W_\theta^\vartheta = \left\{ \frac{\partial x}{\partial \theta} [\sin \vartheta \sin(\alpha \cos \vartheta) + \alpha \cos \vartheta \cos(\alpha \cos \vartheta) \sin \vartheta] + \frac{\partial z}{\partial \theta} [-\sin \vartheta \cos(\alpha \cos \vartheta) + \alpha \cos \vartheta \sin(\alpha \cos \vartheta) \sin \vartheta] \right\}; \quad (20)$$

$$W_\varphi^\vartheta = \frac{\partial z}{\partial \varphi} [\sin \vartheta \cos(\alpha \cos \vartheta) - \alpha \cos \vartheta \sin(\alpha \cos \vartheta) \sin \vartheta]; \quad (21)$$

$$W_\theta^\psi = W_\varphi^\psi = 0, \quad (22)$$

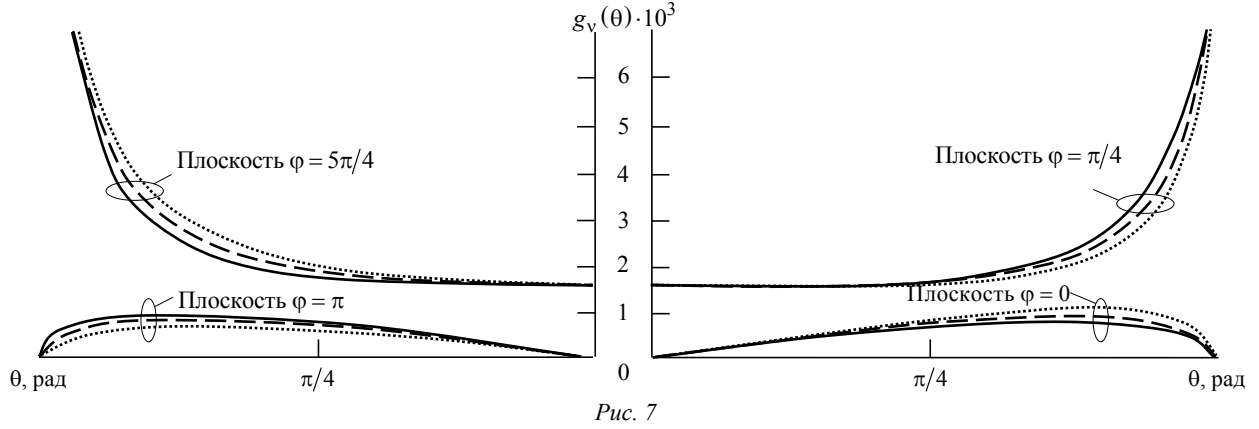


Рис. 7

где определенное в (1) расстояние от точки истока до точки наблюдения в новой системе координат

$$L = \sqrt{A \cos \psi + B \sin \psi + D};$$

$$A = -2r_0 [\sin \vartheta x \cos(\alpha \cos \vartheta) + z \sin(\alpha \cos \vartheta)];$$

$$B = -2r_0 y \sin \vartheta;$$

$$D = r^2 + r_0^2 + 2r_0 \cos \vartheta [\sin(\alpha \cos \vartheta) \cdot x - z \cos(\alpha \cos \vartheta)].$$

Алгоритм численного решения. Алгоритм решения системы уравнений (1) с ядрами, определенными (11), аналогичен соответствующему алгоритму, изложенному ранее для случая осесимметричного сферического пояса, и не требует специальных пояснений. В результате задача сводится к решению СЛАУ (3), где элементы дифракционной матрицы имеют вид

$$T_{ij}^{\psi p} = \frac{i}{4\pi} \frac{1}{kl_p} \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} \frac{\partial G(M)}{\partial p} \Big|_{\psi=\varphi_i}^{\psi=\varphi_{i-1}} d\vartheta + k^2 r_0 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} d\vartheta \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} G(M) \left(U_p^\psi \cos \psi + V_p^\psi \sin \psi + W_p^\psi \right) d\psi; \quad (23)$$

$$T_{ij}^{\vartheta p} = \frac{i}{4\pi} \frac{1}{kl_p} \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} \frac{\partial G(M)}{\partial p} \Big|_{\vartheta=\theta_j}^{\vartheta=\theta_{j-1}} d\psi + k^2 r_0 \int_{\theta_{j-1}}^{\theta_j} d\vartheta \int_{\varphi_{i-1}}^{\varphi_i} G(M) \left(U_p^\vartheta \cos \psi + V_p^\vartheta \sin \psi + W_p^\vartheta \right) d\psi, \quad (24)$$

где

$$\frac{\partial L}{\partial p} = \frac{x - \xi}{L} \frac{\partial x}{\partial p} + \frac{y - \eta}{L} \frac{\partial y}{\partial p} + \frac{z - \zeta}{L} \frac{\partial z}{\partial p};$$

ξ, η, ζ – декартовы координаты истока;

$$\frac{\partial G}{\partial p} = -\frac{\partial L}{\partial p} \left[\frac{ik}{L} + \frac{1}{L^2} \right] G(M),$$

$$G(M) = G|_{\varphi=\tilde{\varphi}_i, \theta=\tilde{\theta}_j}$$

и могут быть вычислены с помощью выражений (12)–(22). При этом первое слагаемое в (23)–(24) не содержит неинтегрируемую особенность, а численное интегрирование второго слагаемого не вызывает трудностей, если предварительно понизить кратность интеграла с помощью представления (8).

Следует отметить, что в рассматриваемом случае структура токов, наведенных на исследуемом экране, симметрична только относительно плоскости $y = 0$, что позволяет «свернуть» дифракционную матрицу $T_{mn}^{\alpha \nu}$; $\alpha = \psi, \vartheta$; $\nu = \varphi, \theta$ в два раза.

Результаты численных расчетов. На основании описанного численного алгоритма было исследовано влияние идеально проводящего неосесимметричного сферического пояса на излучение ЭЭВ, расположенного в начале координат (рис. 6) для случая $N_\varphi = 40$; $N_\theta = 22$. На рис. 7. показаны зависимости модуля составляющей $j_\varphi(\theta, \varphi)$ при $\varphi = \pi/4$ и составляющей $j_\theta(\theta, \varphi)$ при $\varphi = 0$ для случаев $\alpha = 0^\circ$ (сплошная линия), $\alpha = 10^\circ$ (штриховая линия) и $\alpha = 15^\circ$ (пунктир) для $\theta_1 = \pi/3$; $\theta_2 = 2\pi/3$. По оси ординат отложены абсолютные значения функции

$$g_\varphi(\theta) = \frac{j_\varphi(\theta, \pi/2)}{I^0 lk^2}; \quad g_\theta(\theta) = \frac{j_\theta(\theta, 0)}{I^0 lk^2}.$$

Из рисунка видно, что увеличение угла α приводит к изменению распределения тока на поверхности неосесимметричного сферического пояса. При $\theta \rightarrow \pi/3$ и $\theta \rightarrow 2\pi/3$ составляющая $j_\varphi \rightarrow \infty$, а составляющая $j_\theta \rightarrow 0$, что согласуется с условиями на ребре.

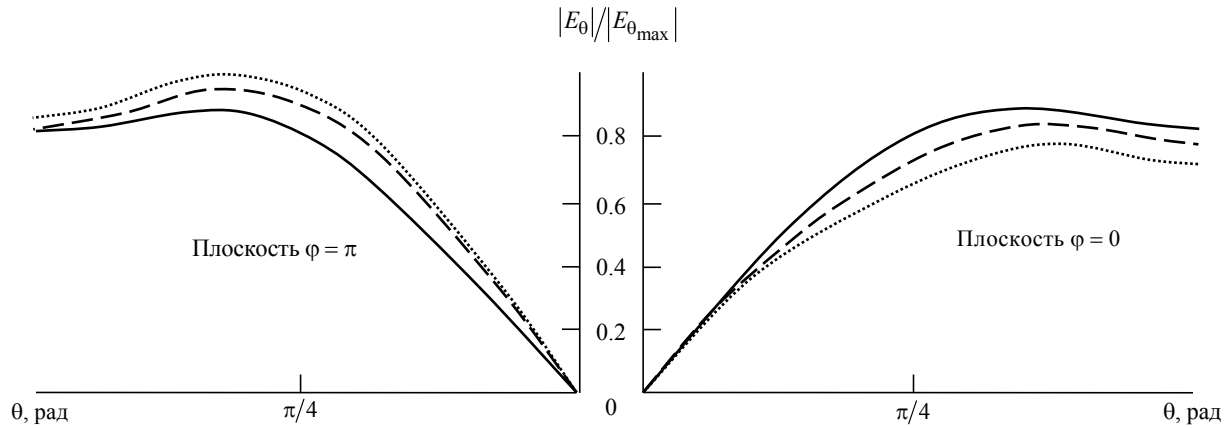


Рис. 8

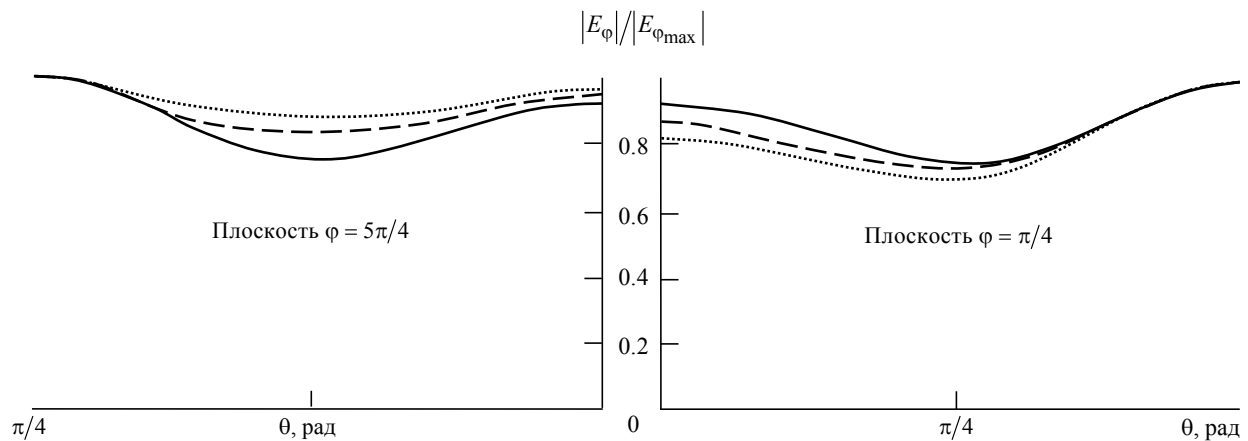


Рис. 9

На рис. 8, 9 приведены нормированные диаграммы направленности (НДН) анализируемой системы в плоскостях $y = 0$ и $x = 0$ соответственно для случаев $\alpha = 0^\circ$ (сплошные линии), $\alpha = 10^\circ$ (штриховые линии) и $\alpha = 15^\circ$ (пунктир). Из рисунков видно, что увеличение угла α , эквивалентное возрастанию асимметрии исследуемой системы, приводит к заметному изменению НДН.

Таким образом, в настоящей статье на основе строгой постановки проведен анализ влияния осесимметричного и неосесимметричного сферических поясов на излучение ЭЭВ, расположенного на оси сферы, частью которой являются рассматриваемые экраны. Исследовано распределение плотности наведенного на экране тока при различном числе сегментов разбиения, свиде-

тельствующее о внутренней сходимости построенного алгоритма и о выполнении условий на ребре. Исследовано влияние высоты положения вибратора на НДН. Введена специальная ортогональная система координат на сфере, позволяющая анализировать возбуждение неосесимметричного сферического пояса произвольным электромагнитным полем. В указанной ортогональной системе координат записана система интегро-дифференциальных уравнений рассматриваемой задачи и разработан эффективный, численный алгоритм ее решения. Проведено сравнение распределения плотности тока и НДН, соответствующих случаю экранирования поля ЭЭВ осесимметричным и неосесимметричным сферическими поясами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы // Док. АН СССР. 1984. Т. 276, № 1. С. 96–100.

2. Ходьков Д. А. Влияние осесимметричного сферического пояса на излучение элементарного электрического вибратора // СПбНТОРЭС: тр. ежегод. НТК. 2019. № 1(74). С. 59–61.

3. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979.

4. Воеводин В. В., Тыртышников Е. Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987.

5. Ходьков Д. А. Влияние прямоугольного вибратора на излучение элементарного электрического вибратора // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2019. № 6. С. 26–33.

D. A. Khodkov
Saint Petersburg Electrotechnical University

INFLUENCE OF AXISYMMETRIC AND NON-AXISYMMETRIC SPHERICAL BELTS ON THE RADIATION OF AN ELEMENTARY ELECTRIC VIBRATOR

An approach based on a strict formulation is considered that allows us to study the effects of an axisymmetric and non-axisymmetric spherical belt on the radiation of an elementary electric vibrator (EEV) located on the axis of the sphere, of which the screen under consideration is a part. A numerical approach is proposed, on the basis of which a system of integro-differential equations is derived.

Elementary electric vibrator, system of integro-differential equations, numerical analysis, non-axisymmetric spherical belt, directional diagram, surface current density
