

Синтез нелинейной и адаптивно-робастной систем со скользящими режимами в управлении динамикой трикоптера с поворотными винтами при действии неизвестных внешних возмущений

З. Х. Нгуен[✉], В. В. Путов, В. Н. Шелудько

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

✉ khanhnguyen.mta@gmail.com

Аннотация. В статье разработаны полная нелинейная математическая модель динамики трикоптера с поворотными винтами в виде уравнений Лагранжа–Эйлера и две системы нелинейного и адаптивно-робастного управления со скользящими режимами, работоспособные при действии неизвестных внешних возмущений. Нелинейная система управления со скользящими режимами и постоянными параметрами регулятора синтезирована на основе метода функций Ляпунова. Адаптивно-робастная система разработана на базе метода функций Ляпунова с гладкими скользящими режимами управления и с адаптивной оценкой верхней границы внешних возмущений. Исследована работоспособность предлагаемых систем управления при действии неизвестных внешних возмущений и при изменении аэродинамических коэффициентов. Сравнительное исследование построенных систем управления проводится в программной среде MatLab/Simulink.

Ключевые слова: трикоптер с поворотными винтами, полная нелинейная математическая модель динамики трикоптера, нелинейное и адаптивно-робастное управления со скользящими режимами, неизвестные внешние возмущения, моделирование

Для цитирования: Нгуен З. Х., Путов В. В., Шелудько В. Н. Синтез нелинейной и адаптивно-робастной систем со скользящими режимами в управлении динамикой трикоптера с поворотными винтами при действии неизвестных внешних возмущений // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2024. Т. 17, № 5. С. 83–96. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-5-83-96.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

Synthesis of Nonlinear and Adaptive-robust Systems with Sliding Modes in Controlling the Dynamics of a Tricopter with Rotary Propellers Under the Action of Unknown External Disturbances

Duy Khanh Nguyen[✉], V. V. Putov, V. N. Sheludko

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

✉ khanhnguyen.mta@gmail.com

Abstract. The article develops a complete nonlinear mathematical model of tricopter dynamics with rotary propellers in the form of Lagrange-Euler equations and two systems of nonlinear and adaptive-robust control with sliding modes, operable under the action of unknown external disturbances. The nonlinear control system with sliding modes and constant controller parameters is synthesized based on the Lyapunov function method. The adaptive-robust system is developed on the basis of the Lyapunov function method with a smooth sliding

mode control and using an adaptive estimate of the upper bound of external disturbances. The performance of the proposed control systems under the action of unknown external disturbances and variations in aerodynamic coefficients is investigated. A comparative study of the constructed control systems is conducted in the MatLab/Simulink software environment.

Keywords: tricopter with rotary propellers, complete nonlinear mathematical model of tricopter dynamics, nonlinear and adaptive-robust controls with sliding modes, unknown external disturbances, modeling

For citation: Nguyen Duy Khanh, Putov V. V., Sheludko V. N. Synthesis of Nonlinear and Adaptive-robust Systems with Sliding Modes in Controlling the Dynamics of a Tricopter with Rotary Propellers Under the Action of Unknown External Disturbances // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2024. Vol. 17, no. 5. P. 83–96. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-5-83-96.

Conflict of interest. The authors declare no conflicts of interest.

Введение. В последние годы беспилотные летательные аппараты (БПЛА) привлекают значительное внимание широким спектром применения в различных отраслях, включая строительство, геологоразведку, здравоохранение, воздушное наблюдение, навигацию, картографирование, сельское хозяйство, мониторинг лесных пожаров, борьбу со стихийными бедствиями и грузовые перевозки, предлагая тем самым ряд преимуществ в этих отраслях – экономическую эффективность, гибкость использования и возможность доступа к удаленным или опасным районам [1]–[5].

Высокопроизводительные мультикоптеры различных моделей получили широкое распространение и развитие в течение последних десятилетий из-за растущей потребности в надежных моделях БПЛА, подходящих как для гражданских, так и для специальных целей. В связи с этим новая и малоизученная разработка трикоптеров с поворотными винтами представляет значительный интерес, учитывая ее многочисленные существенные преимущества по сравнению с такими популярными БПЛА, как квадрокоптеры или гексакоптеры [6]–[15]. Прежде всего, они отличаются от других типов мультикоптеров превосходной подвижностью, что делает их подходящими для выполнения сложных задач, требующих быстрого и точного маневрирования. Сокращение количества винтовых двигателей до трех приводит к экономии энергии и увеличению продолжительности безотказной работы. Трикоптер имеет такую же динамику полета, как самолет с неподвижным крылом, в то время как квадрокоптер ведет себя как одновинтовой летательный аппарат. Задний (хвостовой) двигатель позволяет трикоптеру управлять рысканием, обеспечивая вращение БПЛА вокруг вертикальной оси. Управление углом наклона позволяет трикоптерам совер-

шать более быстрые, чем в случае квадрокоптеров, повороты в соответствии с заданными ориентирами. Управление рысканием квадрокоптеров осуществляется за счет изменения крутящего момента с использованием всех четырех двигателей, тогда как чтобы заставить трикоптеры вращаться, достаточно просто изменить скорость любого из трех его винтовых двигателей. Даже в ветреную погоду трикоптеры работают более эффективно, чем квадрокоптеры, и ими легче управлять, чем квадрокоптерами того же размера.

Научные исследования и разработки БПЛА зачастую сосредоточены на квадрокоптерах или вертолетах, тогда как количество исследовательских работ по трикоптерам с поворотными винтами очень мало из-за сложности их математических моделей. В частности, проводимые в России исследования трикоптеров останавливаются лишь на построении упрощенных линеаризованных математических моделей и, соответственно, на синтезе регуляторов и моделировании на упрощенном уровне. Из-за асимметричности конструкции, существенных нелинейностей и перекрестных связей в полной нелинейной математической модели трикоптера с поворотными винтами проектирование его систем управления сталкивается со сложными проблемами в обеспечении работоспособности трикоптера.

В свете вышесказанного, разработка высокоточных систем управления трикоптерами, эффективными в условиях неизвестных внешних возмущений, неопределенности и нелинейности математических моделей, представляет собой в значительной степени нерешенную проблему. При наличии параметрической неопределенности модели и внешних возмущений упрощенная система управления способна выполнять свои намеченные функции лишь с большими погрешностями и даже терять устойчивость. Следовательно, разра-

ботка эффективных подходов к проектированию сложных систем управления трикоптерами имеет важное значение [16]–[18].

В [19] описано создание нового регулятора со скользящим режимом STNT-SMC (Supertwisting Nonsingular Terminal Sliding Mode Control) для обеспечения аттрактивности БПЛА в сочетании с нелинейным наблюдателем возмущений для компенсации детерминированного внешнего возмущения. В [20] рассматривается радиально-базисная нейронная сеть (RBFNN), используемая для системы управления БПЛА с неподвижным крылом в качестве наблюдателя неизвестных внешних возмущений. В [21] построена адаптивная система управления БПЛА на основе метода линеаризации обратной связью и адаптивного нейросетевого наблюдателя возмущения. Робастный регулятор, обеспечивающий отслеживание желаемых заданий в условии изменения параметров и наличия внешних возмущений, разработан в [22] с использованием наблюдателя со скользящим режимом более высокого порядка (HOSM) для оценки неизвестных возмущений.

Помимо использования наблюдателей возмущения существует эффективный подход к решению проблемы неопределенности динамики БПЛА с использованием активного управления подавлением возмущения (Active Disturbance Rejection Control) [23]. В [24] для БПЛА разработан гибридный регулятор, синтезированный комбинированием метода обхода интегратора (Backstepping) и активного управления подавлением возмущения. Для системы управления БПЛА с неподвижным крылом в условиях неизвестных внешних возмущений в [25] предложена комбинация нечеткого регулятора и регулятора обхода интегратора с барьерными функциями Ляпунова высокого порядка, основанными на ограничениях по состоянию.

В настоящей статье рассматривается разработка нелинейной математической модели динамики трикоптером с поворотными винтами и синтез нелинейного и адаптивно-робастного управления для компенсации неизвестных внешних возмущений. Методом функций Ляпунова доказаны экспоненциальная устойчивость или робастность разработанных систем управления. Исследованы движения управляемой нелинейной модели трикоптера с поворотными винтами при действии неизвестных внешних возмущений и при варьировании аэродинамических коэффициентов.

Описание трикоптера с поворотными винтами. Внешний вид трикоптера с поворотными винтами, рассматриваемого в качестве нелинейного объекта управления, показан на рис. 1.

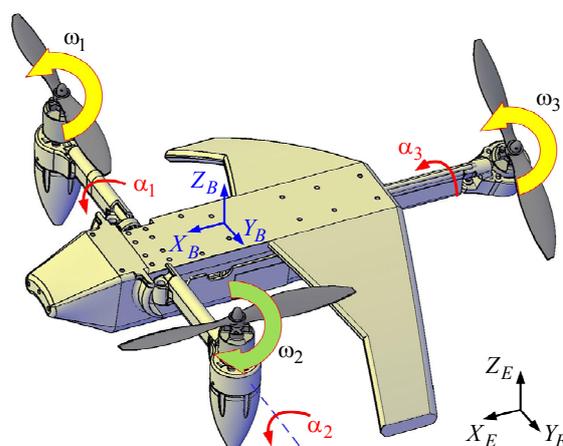


Рис. 1. Трикоптер с поворотными винтами
Fig. 1. Tricopter with rotary propellers

Трикоптер с поворотными винтами относится к типу БПЛА с вертикальным взлетом и посадкой. Его механическая конструкция имеет Т-образную форму с использованием трех несущих винтов, наклоняемых по трем лучам. Для этого используются три синхронных двигателя с постоянными магнитами, приводящие в движение винты. Два передних винта вращаются в противоположных направлениях, а задний – в направлении, согласованном с направлением одного из двух передних винтов (рис. 1). Из-за несимметричной конструкции трикоптера возникает нежелательный крутящий момент, приводящий к дисбалансу угла рыскания. Использование трех серводвигателей постоянного тока, способных поворачивать винты в вертикальной плоскости на углы в диапазоне $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ для создания горизонтальной составляющей силы тяги, не только решает проблему устранения дисбаланса угла рыскания, но и обеспечивает превосходство этого типа трикоптера над другими типами БПЛА.

Благодаря своей трансформируемой конструкции трикоптеры с поворотными винтами могут взлетать и садиться вертикально, маневрировать на малых скоростях и совершать крейсерские полеты на высокой скорости. Кроме того, трикоптер с поворотными винтами способен независимо выполнять поступательные и вращательные движения только за счет наклона несущего винта, а его фюзеляж остается в горизонтальном положении. Эта конфигурация трикоптера удобна, например, для установки камеры непосредственно на корпус аппарата, а не на подвесе. Поскольку эта конфигурация обеспечивает широ-

кие возможности наклона и повышенную маневренность, различные режимы наблюдения могут быть получены непосредственным изменением ориентации БПЛА, тем самым изменяя режимы наблюдения камеры. В такой ситуации использование подвеса становится излишним.

Разработка нелинейной математической модели динамики трикоптера с поворотными винтами. Для построения математической модели трикоптера с поворотными винтами системы отсчета определяются следующим образом. Как показано на рис. 1, земная система координат E определяется осью X_E , направленной на север, осью Y_E , направленной на запад, и осью Z_E , направленной вверх. Система координат B , связанная с трикоптером, совпадает с центром масс трикоптера и определяется осью X_B , ориентированной вдоль направления продольного полета трикоптера, осью Y_B , направленной влево, и осью Z_B , направленной вверх. Для удобства рассмотрения движения трикоптера с поворотными винтами используются следующие обозначения [26], [27]:

$\mathbf{q} = [\xi^T \ \eta^T]^T \in \mathfrak{R}^6$ – вектор обобщенных координат; \mathfrak{R}^n – вещественное пространство размерности n ; $\xi = [x \ y \ z]^T$ – вектор координат центра масс трикоптера в земной системе координат; $\eta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$ – вектор углов ориентации трикоптера в системе координат Эйлера: угол крена ϕ , угол тангажа θ и угол рыскания ψ ; $\phi, \theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\psi \in (-\pi, \pi)$; $\mathbf{\Omega} = [p \ q \ r]^T$ – вектор угловой скорости трикоптера в системе координат, связанной с трикоптером; $\mathbf{V} = [u \ v \ w]^T$ – вектор скорости центра масс трикоптера в системе координат, связанной с трикоптером; $\mathbf{O}_{m \times n}$ – нулевая матрица размера $m \times n$; \mathbf{E}_n – n -мерная единичная матрица.

Связь между векторами скорости $\mathbf{\Omega}$, \mathbf{V} и векторами $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$ задается следующими выражениями:

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}_{eb} \dot{\xi}; \quad \mathbf{\Omega} = \mathbf{P}_{eb} \dot{\eta},$$

где \mathbf{R}_{eb} – матрица перехода из земной системы координат в систему координат, связанную с трикоптером, а \mathbf{P}_{eb} – матрица преобразования угловых скоростей углов Эйлера в угловые скорости относительно корпуса трикоптера, выражающиеся как

$$\mathbf{R}_{eb} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & \cos(\theta) \sin(\psi) & -\sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) - \cos(\phi) \sin(\psi) & \sin(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) + \cos(\phi) \cos(\psi) & \sin(\phi) \cos(\theta) \\ \cos(\phi) \sin(\theta) \cos(\psi) + \sin(\phi) \sin(\psi) & \cos(\phi) \sin(\theta) \sin(\psi) - \sin(\phi) \cos(\psi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{P}_{eb} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \cos(\theta) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

По обобщенным координатам лагранжиан трикоптера с поворотными винтами определяется выражением вида

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - U(\mathbf{q}),$$

где полная кинетическая энергия $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ может быть записана как $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T_t + T_r$, где T_t – поступательная кинетическая энергия; T_r – вращательная кинетическая энергия трикоптера; $U(\mathbf{q})$ – потенциальная энергия.

Поступательная кинетическая энергия трикоптера записывается формулой

$$T_t = \frac{1}{2} m \dot{\xi}^T \dot{\xi} = \frac{1}{2} \dot{\xi}^T \mathbf{M}_a \dot{\xi}, \quad (1)$$

где $\mathbf{M}_a = m \mathbf{E}_3$, m – масса трикоптера.

Выражение для вращательной кинетической энергии трикоптера имеет вид

$$T_r = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^T \mathbf{J} \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} (\mathbf{P}_{eb} \dot{\eta})^T \mathbf{J} (\mathbf{P}_{eb} \dot{\eta}) = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T \mathbf{J}_a \dot{\eta}, \quad (2)$$

где $\mathbf{J} = \text{diag}(J_x, J_y, J_z)$ – матрица моментов инерции трикоптера; $\mathbf{J}_a = \mathbf{P}_{eb}^T \mathbf{J} \mathbf{P}_{eb}$. Пусть

$$\mathbf{J}_a = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & J_{13} \\ 0 & J_{22} & J_{23} \\ J_{13} & J_{23} & J_{33} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $J_{11} = J_x$; $J_{13} = -J_x \sin(\theta)$; $J_{22} = J_y \cos^2(\phi) + J_z \sin^2(\phi)$; $J_{23} = (J_y - J_z) \sin(\phi) \cos(\phi) \cos(\theta)$; $J_{33} = J_x \sin^2(\theta) + [J_y \sin^2(\phi) + J_z \cos^2(\phi)] \cos^2(\theta)$.

Представляя потенциальную энергию трикоптера в виде

$$U(\mathbf{q}) = mgz, \quad (4)$$

где g – ускорение свободного падения; z – высота центра масс трикоптера от поверхности Земли, получим следующее выражение для лагранжиана трикоптера с поворотными винтами:

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} - U(\mathbf{q}), \quad (5)$$

где $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_a \end{bmatrix}$ – симметричная матрица.

Динамическая модель трикоптера с поворотными винтами может быть описана формулой Эйлера–Лагранжа с вектором внешних обобщенных сил и моментов \mathbf{Q} и будет иметь вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}. \quad (6)$$

Перепишем (6) с учетом уравнений (1)–(5) в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}]}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{1}{2} \frac{\partial [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}]}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}, \quad (7)$$

где

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \frac{\partial [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}]}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_a \ddot{\boldsymbol{\xi}} \\ \mathbf{J}_a \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{J}_a \ddot{\boldsymbol{\eta}} \end{bmatrix}; \\ \frac{1}{2} \frac{\partial [\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}]}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 1} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} (\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{J}_a \dot{\boldsymbol{\eta}}) \end{bmatrix}; \\ \frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_a \\ \mathbf{O}_{3 \times 1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g}_a = [0 \quad 0 \quad mg]^T. \end{cases}$$

В (7) вектор обобщенных сил и моментов \mathbf{Q} разделим на три: вектор обобщенных сил тяги и крутящих моментов \mathbf{F}_t , вектор обобщенных сил и моментов сопротивления \mathbf{F}_d и вектор обобщенных неизвестных внешних возмущений \mathbf{F}_p :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F}_t + \mathbf{F}_d + \mathbf{F}_p.$$

Формула вектора обобщенных сил тяги и крутящих моментов имеет вид

$$\mathbf{F}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\xi^T & \boldsymbol{\tau}_\eta^T \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} (\mathbf{R}_{be} \mathbf{F}_b)^T & \boldsymbol{\tau}_\eta^T \end{bmatrix}^T. \quad (8)$$

Силы подъема и крутящие моменты винтов трикоптера в системе координат B при вертикальном положении винтов записываются формулами

$$\begin{aligned} F_i &= k_f \omega_i^2; \\ \tau_i &= k_\tau \omega_i^2, \end{aligned}$$

где ω_i – скорость вращения i -го винта ($i = 1, 2, 3$); k_f и k_τ – аэродинамические коэффициенты сил тяги и крутящего момента. Тогда силы тяги и кру-

тящие моменты с учетом поворота винтов могут быть записаны следующими выражениями:

$$\mathbf{F}_b = \begin{bmatrix} F_1 \sin(\alpha_1) + F_2 \sin(\alpha_2), \\ -F_3 \sin(\alpha_3), \\ F_1 \cos(\alpha_1) + F_2 \cos(\alpha_2) + F_3 \cos(\alpha_3); \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\tau}_\eta = \begin{bmatrix} -F_1 \cos(\alpha_1) l_s + F_2 \cos(\alpha_2) l_s - \\ -\tau_1 \sin(\alpha_1) + \tau_2 \sin(\alpha_2), \\ -F_1 \cos(\alpha_1) l_f - F_2 \cos(\alpha_2) l_f + \\ + F_3 \cos(\alpha_3) l_b + \tau_3 \sin(\alpha_3), \\ F_1 \sin(\alpha_1) l_s - F_2 \sin(\alpha_2) l_s - \\ - F_3 \sin(\alpha_3) l_b - \tau_1 \cos(\alpha_1) + \\ + \tau_2 \cos(\alpha_2) - \tau_3 \cos(\alpha_3), \end{bmatrix}$$

где α_i – угол наклона i -го винта относительно вертикальной плоскости ($i = 1, 2, 3$); l_b – расстояние от заднего несущего винта до центра масс трикоптера в направлении X_B ; l_f и l_s – расстояния от передних винтов до центра масс трикоптера в направлениях X_B и Y_B соответственно.

Запишем (8) в компактном виде:

$$\mathbf{F}_t(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_\xi^T & \boldsymbol{\tau}_\eta^T \end{bmatrix}^T = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{H} \mathbf{u},$$

где

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} k_f & k_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_f & k_f & k_f \\ -k_\tau & k_\tau & 0 & -k_f l_s & k_f l_s & 0 \\ 0 & 0 & k_\tau & -k_f l_f & -k_f l_f & k_f l_b \\ k_f l_s & -k_f l_s & -k_f l_b & -k_\tau & k_\tau & -k_\tau \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$$

– матрица входа; $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 \sin(\alpha_1), \\ \omega_2^2 \sin(\alpha_2), \\ \omega_3^2 \sin(\alpha_3), \\ \omega_1^2 \cos(\alpha_1), \\ \omega_2^2 \cos(\alpha_2), \\ \omega_3^2 \cos(\alpha_3) \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^6$ – вектор

входа; $\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{be} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{6 \times 6}$.

Вектор обобщенных сил и моментов сопротивления \mathbf{F}_d выражается в виде

$$\mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}) = \left[-(\mathbf{R}_{be} \mathbf{d}_\xi \mathbf{D}_\xi(\dot{\mathbf{q}}))^T \quad -(\mathbf{d}_\eta \mathbf{D}_\eta(\dot{\mathbf{q}}))^T \right]^T,$$

где

$$\mathbf{D}_\xi = [u|u| \quad v|v| \quad w|w|]^T;$$

$$\mathbf{D}_\eta = [\dot{\phi}|\dot{\phi}| \quad \dot{\theta}|\dot{\theta}| \quad \dot{\psi}|\dot{\psi}|]^T;$$

$$\mathbf{d}_\xi = \text{diag}(d_x \quad d_y \quad d_z); \quad \mathbf{d}_\eta = \text{diag}(d_\phi \quad d_\theta \quad d_\psi);$$

$$d_x, d_y, d_z, d_\phi, d_\theta, d_\psi$$

– коэффициенты аэродинамических сил и моментов сопротивления.

Вектор обобщенных неизвестных внешних возмущений $\mathbf{F}_p(t)$ выражается как

$$\mathbf{F}_p(t) = [\mathbf{F}_c^T \quad \boldsymbol{\tau}_c^T]^T,$$

где \mathbf{F}_c – вектор сил возмущения; $\boldsymbol{\tau}_c$ – вектор моментов возмущения.

В дальнейшем предположим, что внешние возмущения ограничены в виде $\|\mathbf{F}_p(t)\| \leq d$ (d – постоянная положительная величина), тогда получим математическую модель динамики трикоптера с поворотными винтами в следующем виде:

$$\left[\begin{array}{c} \mathbf{M}_a \ddot{\boldsymbol{\xi}} \\ \mathbf{J}_a \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{J}_a \ddot{\boldsymbol{\eta}} \end{array} \right] - \left[\begin{array}{c} \mathbf{O}_{3 \times 1} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} (\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{J}_a \dot{\boldsymbol{\eta}}) \end{array} \right] +$$

$$+ \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_a \\ \mathbf{O}_{3 \times 1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{F}_\xi \\ \boldsymbol{\tau}_\eta \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \mathbf{D}_\xi \\ \mathbf{D}_\eta \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \mathbf{F}_c \\ \boldsymbol{\tau}_c \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{M}_a & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_a \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \ddot{\boldsymbol{\xi}} \\ \ddot{\boldsymbol{\eta}} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{cc} \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{J}_a - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} (\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{J}_a) \end{array} \right] \times$$

$$\times \left[\begin{array}{c} \dot{\boldsymbol{\xi}} \\ \dot{\boldsymbol{\eta}} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \mathbf{g}_a \\ \mathbf{O}_{3 \times 1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{F}_\xi \\ \boldsymbol{\tau}_\eta \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \mathbf{D}_\xi \\ \mathbf{D}_\eta \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \mathbf{F}_c \\ \boldsymbol{\tau}_c \end{array} \right].$$

Пусть

$$\mathbf{C}_a(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) = \mathbf{J}_a - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\eta}} (\dot{\boldsymbol{\eta}}^T \mathbf{J}_a) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix},$$

где $c_{11} = 0$; $c_{13} = (J_z - J_y) \dot{\psi} \cos(\phi) \sin(\phi) \times \cos^2(\theta)$;

$$c_{12} = (J_y - J_z) (\dot{\theta} \cos(\phi) \sin(\phi) + \dot{\psi} \sin^2(\phi) \cos(\theta)) + (J_z - J_y) \dot{\psi} \cos^2(\phi) \cos(\theta) - J_x \dot{\psi} \cos(\theta);$$

$$c_{21} = (J_z - J_y) (\dot{\theta} \cos(\phi) \sin(\phi) + \dot{\psi} \sin^2(\phi) \cos(\theta)) + (J_y - J_z) \dot{\psi} \cos^2(\phi) \cos(\theta) + J_x \dot{\psi} \cos(\theta);$$

$$c_{22} = (J_z - J_y) \dot{\phi} \cos(\phi) \sin(\phi);$$

$$c_{23} = (-J_x + J_y \sin^2(\phi) + J_z \cos^2(\phi)) \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\theta);$$

$$c_{31} = (J_y - J_z) \dot{\psi} \cos(\phi) \sin(\phi) \cos^2(\theta) - J_x \dot{\theta} \cos(\theta);$$

$$c_{32} = (J_z - J_y) (\dot{\theta} \cos(\phi) \sin(\phi) \sin(\theta) + \dot{\phi} \sin^2(\phi) \cos(\theta)) + (J_y - J_z) \dot{\phi} \cos^2(\phi) \cos(\theta) + (J_x - J_y \sin^2(\phi) - J_z \cos^2(\phi)) \dot{\psi} \sin(\theta) \cos(\theta);$$

$$c_{33} = (J_y - J_z) \dot{\phi} \cos(\phi) \sin(\phi) \cos^2(\theta) + (J_x - J_y \sin^2(\phi) - J_z \cos^2(\phi)) \dot{\theta} \sin(\theta) \cos(\theta).$$

$$\text{Обозначая} \quad \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{O}_{3 \times 3} & \mathbf{C}_a(\boldsymbol{\eta}, \dot{\boldsymbol{\eta}}) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_a \\ \mathbf{O}_{3 \times 1} \end{bmatrix}, \text{ получим матричное уравнение вида}$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} = \mathbf{B}(\mathbf{q}) \mathbf{H} \mathbf{u} + \mathbf{F}_d(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{F}_p. \quad (9)$$

Матричное уравнение (9) описывает полную нелинейную математическую модель динамики трикоптера с поворотными винтами.

Синтез нелинейного управления со скользящими режимами. Выберем поверхность скольжения [28], [29], описанную уравнением

$$\mathbf{s}(t) = \dot{\mathbf{e}} + \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{e}, \quad (10)$$

где $\mathbf{e}(t) = \mathbf{q}_d(t) - \mathbf{q}(t)$ – вектор ошибок слежения; $\mathbf{q}_d(t)$ – вектор желаемых траекторий трикоптера; $\boldsymbol{\Lambda}$ – диагональная числовая матрица с положительными собственными значениями.

Положим, что нелинейный закон управления имеет следующий вид:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_n = [\mathbf{B}\mathbf{H}]^{-1} [\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{q}}_d + \boldsymbol{\Lambda}\dot{\mathbf{e}}) - \mathbf{F}_d + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{s}) + \mathbf{G} + \mathbf{K}\mathbf{s} + \varepsilon \text{sign}(\mathbf{s})], \quad (11)$$

где $\varepsilon > 0$ – положительное число; \mathbf{K} – диагональная числовая матрица с положительными собственными значениями.

Выбираем следующую функцию Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{s}. \quad (12)$$

Найдем производную функции (12) в силу уравнений (9)–(11):

$$\begin{aligned} \dot{V} = \mathbf{s}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}} \mathbf{s} = \mathbf{s}^T \left[\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \dot{\mathbf{e}}) - \mathbf{B} \mathbf{H} \mathbf{u} - \right. \\ \left. - \mathbf{F}_d - \mathbf{F}_p + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} \right] + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}} \mathbf{s}. \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая свойства кососимметричной матрицы $\mathbf{s}^T (\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}) \mathbf{s} = 0$ и уравнение (11), можно получить следующее выражение для производной (13):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\mathbf{s}^T \mathbf{K} \mathbf{s} - \mathbf{s}^T (\varepsilon \operatorname{sign}(\mathbf{s}) + \mathbf{F}_p) \leq \\ &\leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}) \|\mathbf{s}\|^2 - \varepsilon \|\mathbf{s}\| + \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{F}_p\|. \end{aligned}$$

Если $\varepsilon \geq d \geq \|\mathbf{F}_p(t)\|$, то

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{K}) \|\mathbf{s}\|^2 \leq -2\alpha V,$$

где $\alpha = \lambda_{\min}(\mathbf{K}) / \lambda_{\max}(\mathbf{M})$.

Из выражения (14) имеем $V(t) \leq e^{-2\alpha t} V(0)$. Это значит, что при $t \rightarrow \infty$, $\mathbf{s} \rightarrow 0$, т. е. $\mathbf{e} \rightarrow 0$ и $\dot{\mathbf{e}} \rightarrow 0$.

Отметим, что выбор значения ε в (11) влияет на динамику системы управления при действии внешних возмущений. Система управления трикоптером может оказаться неустойчивой, если значение ε выбрано неудачно. Наряду с этим, d – тоже неизвестная положительная величина, поэтому невозможно найти точное значение $\varepsilon \geq d$ в (11), но известно, что чем больше ε , тем справедливее неравенство $\varepsilon \geq d$. Однако ε не может быть сколь угодно большим, так как чем больше ε , тем больше значение составляющей $\varepsilon \operatorname{sign}(\mathbf{s})$, а значит, тем больше амплитуда высокочастотных колебаний в законе управления (11), вызванных высокочастотным переключением управляющих сигналов в скользящем режиме. Поэтому в следующем пункте синтезируем адаптивно-робастное управление для компенсации неизвестных внешних возмущений.

Синтез адаптивно-робастного управления со скользящими режимами. Целью управления трикоптером с поворотными винтами при действии неизвестных внешних возмущений служит синтез адаптивно-робастного управления со скользящими режимами, обеспечивающего выполнение неравенства $\|\mathbf{e}(t)\| \leq \delta_0$ для любых $t \geq t_a$, где δ_0 – окрестность заданного программного движения трикоптера $\mathbf{q}_d(t)$; t_a – время адаптации. Предлагаемый адаптивно-робастный закон управления имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \mathbf{u}_a = [\mathbf{B} \mathbf{H}]^{-1} \left[\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \dot{\mathbf{e}}) - \mathbf{F}_d + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{s}) + \right. \\ \left. + \mathbf{G} + \mathbf{K} \mathbf{s} + \hat{\rho} \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\|\mathbf{s}\|^2 + \varepsilon_0^2}} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

с алгоритмом настройки

$$\dot{\hat{\rho}} = \gamma \left(\frac{\|\mathbf{s}\|^2}{\sqrt{\|\mathbf{s}\|^2 + \varepsilon_0^2}} - \sigma \hat{\rho} \right), \quad (16)$$

где $\rho \geq d$; $\hat{\rho}$ – оценка ρ ; $\gamma, \sigma, \varepsilon_0 > 0$ – положительные числа.

Пусть $\tilde{\rho} = \rho - \hat{\rho}$ – ошибка оценивания. Выбираем функцию Ляпунова вида

$$V_1 = \frac{1}{2} (\mathbf{s}^T \mathbf{M} \mathbf{s} + \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \gamma^{-1} \tilde{\rho}^2). \quad (17)$$

Производная по времени функции V_1 равна

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \mathbf{s}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{s}} + \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}} \mathbf{s} + \mathbf{e}^T \dot{\mathbf{e}} + \gamma^{-1} \tilde{\rho} \dot{\tilde{\rho}}; \\ \dot{V}_1 &= \mathbf{s}^T \left[\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{q}}_d + \Lambda \dot{\mathbf{e}}) - \mathbf{B} \mathbf{H} \mathbf{u} - \mathbf{F}_d - \mathbf{F}_p + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{G} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \dot{\mathbf{M}} \mathbf{s} + \mathbf{e}^T (\mathbf{s} - \Lambda \mathbf{e}) - \gamma^{-1} \tilde{\rho} \dot{\tilde{\rho}}. \end{aligned}$$

Учитывая свойства кососимметричной матрицы $\mathbf{s}^T (\dot{\mathbf{M}} - 2\mathbf{C}) \mathbf{s} = 0$ и уравнения (15), (16), можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\mathbf{s}^T \mathbf{K} \mathbf{s} + \mathbf{e}^T \mathbf{s} - \mathbf{e}^T \Lambda \mathbf{e} - \mathbf{s}^T \left(\hat{\rho} \frac{\mathbf{s}}{\sqrt{\|\mathbf{s}\|^2 + \varepsilon_0^2}} + \mathbf{F}_p \right) - \\ &- \tilde{\rho} \frac{\|\mathbf{s}\|^2}{\sqrt{\|\mathbf{s}\|^2 + \varepsilon_0^2}} + \sigma \tilde{\rho} \hat{\rho}; \\ \dot{V}_1 &= -\mathbf{s}^T \mathbf{K} \mathbf{s} + \mathbf{e}^T \mathbf{s} - \mathbf{e}^T \Lambda \mathbf{e} - \\ &- \mathbf{s}^T \mathbf{F}_p - \rho \frac{\|\mathbf{s}\|^2}{\sqrt{\|\mathbf{s}\|^2 + \varepsilon_0^2}} + \sigma \tilde{\rho} \hat{\rho}. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее учтем следующие справедливые неравенства:

$$\begin{cases} \mathbf{e}^T \mathbf{s} \leq \frac{1}{2} (\mathbf{e}^T \mathbf{e} + \mathbf{s}^T \mathbf{s}); \\ \tilde{\rho} \hat{\rho} = \frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{2} (\tilde{\rho}^2 + \hat{\rho}^2) \leq \frac{1}{2} (\rho^2 - \tilde{\rho}^2); \\ -\frac{\|\mathbf{s}\|^2}{\sqrt{\|\mathbf{s}\|^2 + \varepsilon_0^2}} \leq -\frac{\|\mathbf{s}\|^2}{\|\mathbf{s}\| + \varepsilon_0} \leq -\|\mathbf{s}\| + \varepsilon_0; \\ -\mathbf{s}^T \mathbf{F}_p \leq \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{F}_p\| \leq \rho \|\mathbf{s}\|. \end{cases} \quad (19)$$

Из (18) и (19) получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -\mathbf{s}^T (\mathbf{K} - \mathbf{E}_{6 \times 6}) \mathbf{s} - \mathbf{e}^T \left(\Lambda - \frac{1}{2} \mathbf{E}_{6 \times 6} \right) \mathbf{e} + \rho \|\mathbf{s}\| + \\ &+ \rho (-\|\mathbf{s}\| + \varepsilon_0) + \frac{\sigma}{2} (\rho^2 - \tilde{\rho}^2); \end{aligned}$$

$$\dot{V}_1 \leq -[\lambda_{\min}(\mathbf{K}) - 1] \mathbf{s}^T \mathbf{s} - \left[\lambda_{\min}(\mathbf{\Lambda}) - \frac{1}{2} \right] \mathbf{e}^T \mathbf{e} - \frac{1}{2} \sigma \tilde{\rho}^2 + \left(\rho \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \sigma \rho^2 \right).$$

Выбираем $\alpha_1 > 0$ так, чтобы $\alpha_1 \leq \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{K}) - 1}{\lambda_{\max}(\mathbf{M})}; \lambda_{\min}(\mathbf{\Lambda}) - \frac{1}{2}; \gamma \sigma \right\}$, причем $\lambda_{\min}(\mathbf{K}) > 1$, $\lambda_{\min}(\mathbf{\Lambda}) > \frac{1}{2}$ и $\Delta_1 = \rho \varepsilon_0 + \frac{1}{2} \sigma \rho^2$, тогда

$$\dot{V}_1 \leq -2\alpha_1 V_1 + \Delta_1. \quad (20)$$

Из (17) и (20) получим следующие неравенства:

$$0 \leq V_1(t) \leq \left[V_1(0) - \frac{\Delta_1}{2\alpha_1} \right] e^{-2\alpha_1 t} + \frac{\Delta_1}{2\alpha_1};$$

$$\|\mathbf{e}\| \leq \sqrt{2 \left[V_1(0) - \frac{\Delta_1}{2\alpha_1} \right] e^{-2\alpha_1 t} + \frac{\Delta_1}{\alpha_1}}.$$

Таким образом, согласно принципу инвариантности Ла-Салля [30], все сигналы системы ограничены и экспоненциально сходятся к наибольшему инвариантному множеству. Используя закон адаптивно-робастного управления (15) с алгоритмом настройки (16), достигают цели управления, т. е. по прошествии некоторого времени $t \geq t_a$ выполняется неравенство $\|\mathbf{e}(t)\| \leq \delta_0$, где $\delta_0 = \sqrt{\Delta_1/\alpha_1}$.

Результаты компьютерного моделирования и обсуждение. Компьютерное моделирование синтезированной адаптивной робастной системы управления трикоптером при действии неизвестных внешних возмущений было проведено в среде MatLab/Simulink при следующих номинальных значениях аэродинамических коэффициентов: $k_\tau = 0.2 \cdot 10^{-4}$; $k_f = 0.25 \cdot 10^{-3}$; $d_x = 0.0242$; $d_y = 0.0316$; $d_z = 0.0546$; $d_\phi = 0.01$; $d_\theta = 0.0105$; $d_\psi = 0.0121$. Вектор внешнего возмущения выбран как

$$\mathbf{F}_p(t) = [10 \sin t \quad 10 \sin 2t \quad 10 \sin 3t \quad 10 \sin t \quad 10 \sin 2t \quad 10 \sin 3t]^T.$$

Параметры законов управления выбраны следующим образом: $\mathbf{K} = 50\mathbf{E}_6$; $\mathbf{\Lambda} = 2.5\mathbf{E}_6$; $\varepsilon = 5$; $\varepsilon_0 = 0.01$; $\gamma = 100$; $\sigma = 10^{-3}$.

Обозначаем

$$\mathbf{p} = [k_\tau \quad k_f \quad d_x \quad d_y \quad d_z \quad d_\phi \quad d_\theta \quad d_\psi]^T$$

– вектор аэродинамических коэффициентов. Пусть \mathbf{p}_0 – вектор номинальных аэродинамических коэффициентов.

Рассмотрим следующие результаты моделирования, где *штрихпунктирные линии* – заданное (программное) движение трикоптера, *штриховые линии* – движение трикоптера с нелинейными управлением и *сплошные линии* – движение трикоптера с адаптивно-робастными управлением:

1. Подача на вход системы единичного ступенчатого задающего воздействия в условиях действия неизвестных внешних возмущений:

– при номинальных значениях аэродинамических коэффициентов $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ (рис. 2);

– при увеличении до 3 раз значений аэродинамических коэффициентов $\mathbf{p} = 3\mathbf{p}_0$ (рис. 3);

– при уменьшении до 3 раз значений аэродинамических коэффициентов $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0/3$ (рис. 4).

2. Отслеживание траектории спиральной формы в условиях действия неизвестных внешних возмущений:

– при номинальных значениях аэродинамических коэффициентов $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ (рис. 5, 8);

– при увеличении до 3 раз значений аэродинамических коэффициентов $\mathbf{p} = 3\mathbf{p}_0$ (рис. 6, 9);

– при уменьшении до 3 раз значений аэродинамических коэффициентов $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0/3$ (рис. 7, 10).

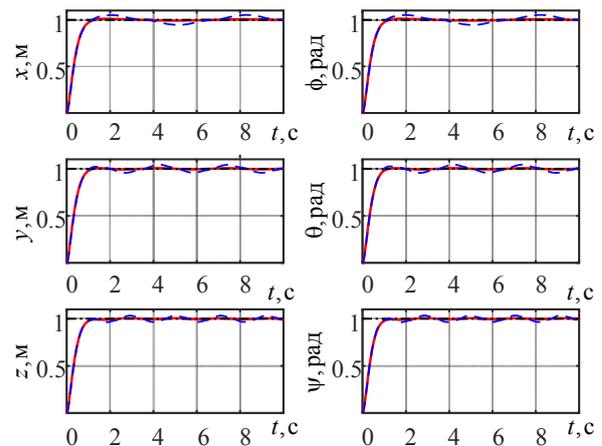


Рис. 2. Переходные процессы систем при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ и одновременном действии внешних возмущений
Fig. 2. Transient processes of systems at $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ with simultaneous action of external disturbances

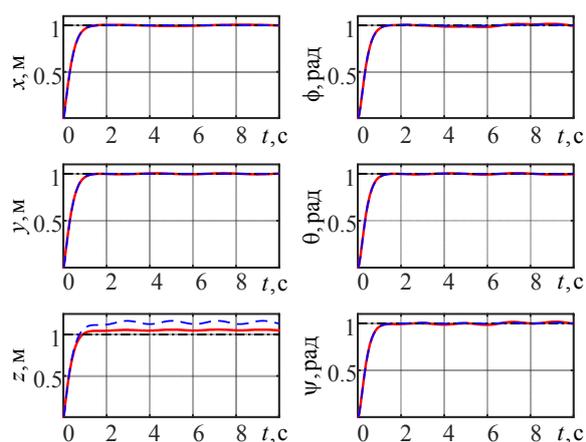


Рис. 3. Переходные процессы систем при $p = 3p_0$ и одновременном действии внешних возмущений
 Fig. 3. Transient processes of systems at $p = 3p_0$ with simultaneous action of external disturbances

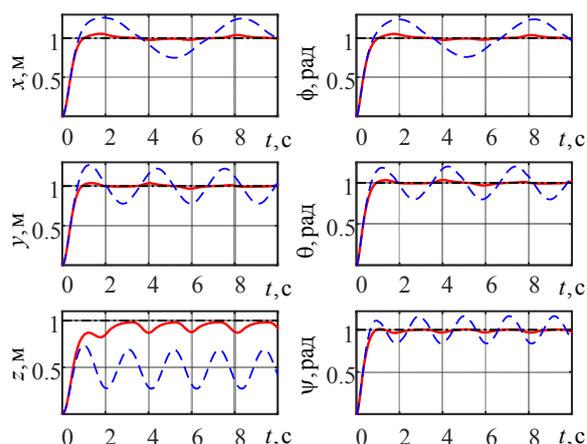


Рис. 4. Переходные процессы систем при $p = p_0/3$ и одновременном действии внешних возмущений
 Fig. 4. Transient processes of systems at $p = p_0/3$ with simultaneous action of external disturbances

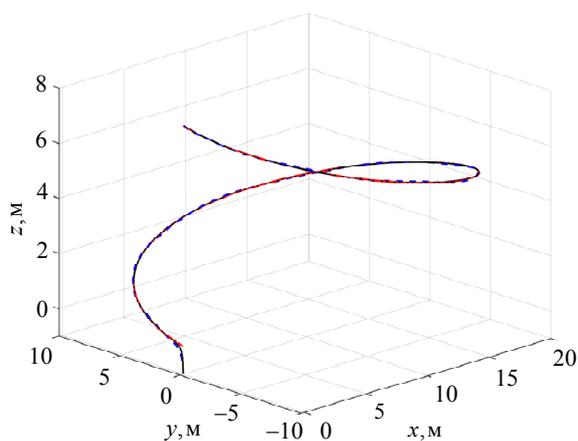


Рис. 5. Траектории трикоптера при $p = p_0$ и одновременном действии внешних возмущений
 Fig. 5. Tricopter trajectories at $p = p_0$ with simultaneous action of external disturbances

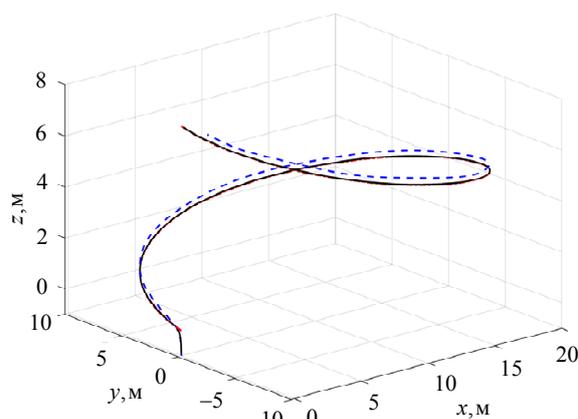


Рис. 6. Траектория трикоптера при $p = 3p_0$ и одновременном действии внешних возмущений
 Fig. 6. Tricopter trajectories at $p = 3p_0$ with simultaneous action of external disturbances

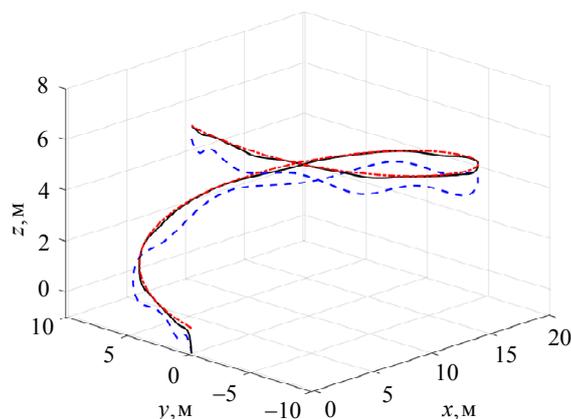


Рис. 7. Траектория трикоптера при $p = p_0/3$ и одновременном действии внешних возмущений
 Fig. 7. Tricopter trajectories at $p = p_0/3$ with simultaneous action of external disturbances

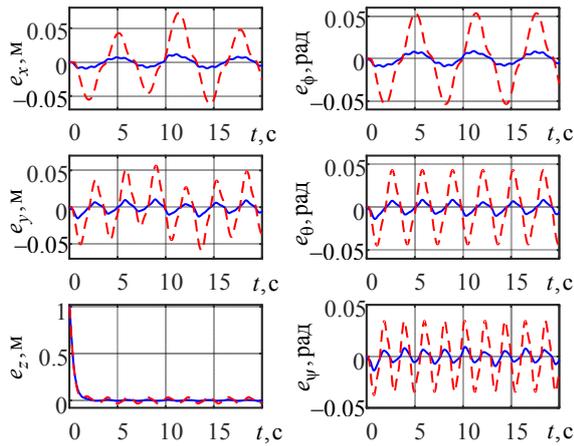


Рис. 8. Ошибки слежения трикоптера при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ и одновременном действии внешних возмущений
Fig. 8. Tricopter tracking errors at $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0$ with simultaneous action of external disturbances

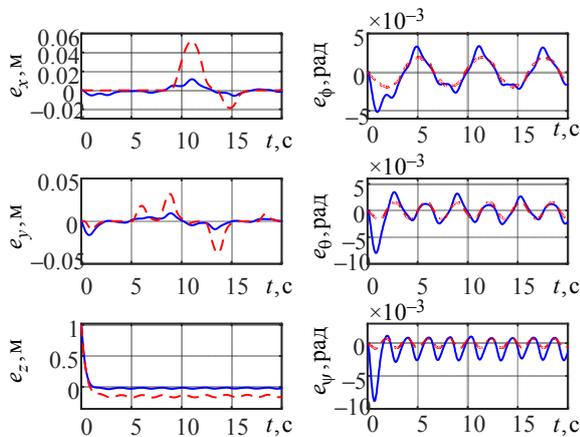


Рис. 9. Ошибки слежения трикоптера при $\mathbf{p} = 3\mathbf{p}_0$ и одновременном действии внешних возмущений
Fig. 9. Tricopter tracking errors at $\mathbf{p} = 3\mathbf{p}_0$ with simultaneous action of external disturbances

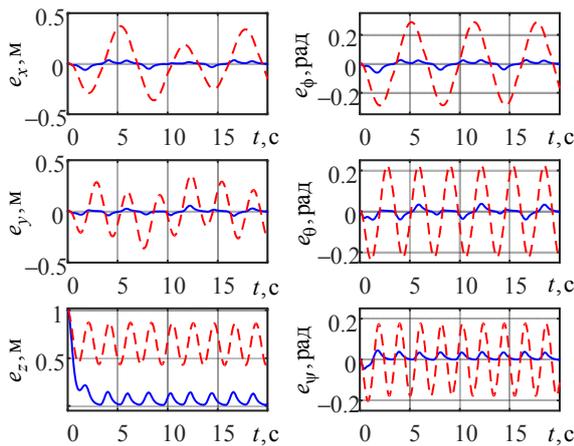


Рис. 10. Ошибки слежения трикоптера при $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0/3$ и одновременном действии внешних возмущений
Fig. 10. Tricopter tracking errors at $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0/3$ with simultaneous action of external disturbances

Из результатов моделирования на рис. 2–10 видно, что при действии неизвестных внешних

возмущений нелинейная система управления работает с приемлемой точностью управления, а адаптивно-робастная система управления – с высокой точностью управления. При изменении значений аэродинамических коэффициентов и одновременном действии внешних возмущений нелинейная система управления действует с низким качеством управления и может даже потерять устойчивость полета, тогда как адаптивно-робастная система управления справляется, но имеет невысокое качество управления, т. е. одновременное влияние неизвестных внешних возмущений и неопределенности параметров системы не устраняется полностью. Таким образом, в дальнейшем для улучшения летных характеристик трикоптера с поворотными винтами необходимо разрабатывать адаптивно-робастные системы управления, работоспособные не только при действии неизвестных внешних возмущений, но и одновременно в условиях частичной неопределенности матрицы входа, неопределенности аэродинамических коэффициентов и ограничения входных воздействий.

Заключение. Из полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Построена полная нелинейная математическая модель трикоптера с поворотными винтами в форме уравнений Лагранжа–Эйлера.

2. Разработаны две системы управления трикоптером с поворотными винтами, работоспособные при действии неизвестных внешних возмущений:

- нелинейная система управления со скользящими режимами, синтезированная методом функций Ляпунова;
- адаптивно-робастная система управления с гладкими скользящими режимами и адаптивной оценкой верхней границы внешних возмущений.

3. На основе анализа выявленных недостатков разработанной нелинейной системы управления – невозможность корректно работать при действии неизвестных внешних возмущений и негативном влиянии вибраций из-за высокочастотного переключения управляющего сигнала в скользящем режиме – в статье предлагается адаптивно-робастная система управления с гладкими скользящими режимами и адаптивной оценкой верхней границы внешних возмущений, позволяющая преодолеть вышеуказанные недостатки.

4. С использованием метода функций Ляпунова доказывается, что:

- нелинейная система управления экспоненциально устойчива, если правильно выбрать значе-

ния параметров регулятора, но может становиться неустойчивой при непредсказуемых изменениях внешних возмущений и влиянии вибраций, вызванных высокочастотным переключением управляющих сигналов в скользящем режиме;

– при непредсказуемых изменениях внешних возмущений адаптивно-робастная система управления не только обеспечивает ограничение всех сигналов системы и их экспоненциальную сходимость к наибольшему инвариантному множеству, которое может быть сделано достаточно малым, выбирая параметры регулятора, но и формирует плавное управление, позволяющее системе стабильно работать без вибраций.

5. Результаты моделирования показывают, что при действии неизвестных внешних возмущений обе системы управления работоспособны, причем

адаптивно-робастная система управления обеспечивает более высокую точность управления, чем нелинейная система. Однако при изменении значений аэродинамических коэффициентов и одновременном действии внешних возмущений нелинейная система управления показывает низкую эффективность и даже может стать неустойчивой, а адаптивно-робастная система работает с невысоким качеством управления. Поэтому в дальнейших публикациях будут разрабатываться адаптивно-робастные системы управления, работоспособные в условиях частичной неопределенности матрицы входа, неопределенности значений аэродинамических коэффициентов, ограничения входных воздействий и действия неизвестных внешних возмущений.

Список литературы

1. Hassija V., Saxena V., Chamola V. Scheduling drone charging for multi-drone network based on consensus time-stamp and game theory // *Comp. Communications*. 2019. Vol. 149(6). P. 51–61. doi: 10.1016/j.comcom.2019.09.021.
2. Conceptual design and multi-disciplinary computational investigations of multirotor unmanned aerial vehicle for environmental applications / V. Raja, S. K. Solaiappan, P. Rajendran, S. K. Madasamy, S. Jung // *Appl. Sci*. 2021. Vol. 11(18). P. 8364. doi: 10.3390/app11188364.
3. Nonami K. Prospect and recent research & development for civil use autonomous unmanned aircraft as UAV and MAV // *J. of System Design and Dynamics*. 2007. Vol. 1(2). P. 120–128. doi: 10.1299/jsdd.1.120.
4. Van Blyenburgh P. UAVs: an Overview // *Air & Space Europe*. 1999. Vol. 1, no. 5–6. P. 43–47. doi: 10.1016/S1290-0958(00)88869-3.
5. Valavanis K. P. Advances in unmanned aerial vehicles: State of the art and the road to autonomy // *Intern. Series on Intelligent Systems, Control, and Automation: Sci. and Engin.* Springer, 2007. Vol. 33. P. 544. doi: 10.1007/978-1-4020-6114-1.
6. Servais E., D'Andrea-Novet B., Mounier H. Ground control of a hybrid tricopter // 2015 Intern. Conf. on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). IEEE: Denver, CO, USA, 2015. P. 945–950. doi: 10.1109/ICUAS.2015.7152382.
7. Tikhonov N. O., Lepikhin T. A., Zhabk N. A. Mathematical modelling of tricopter // *Proc. of the II Intern. Scientific Conf. «Convergent Cognitive Information Technologies» (Convergent'2017)*. M., Russia, 2017. T. 2064. P. 335–340.
8. The synthesis of electric drives characteristics of the UAV of «convertiplane-tricopter» type / O. V. Emelyanova, G. K. Kazaryan, A. S. Martinez Leon, S. F. Jatsun // 2016 Workshop on Contemporary Materials and Technologies in the Aviation Ind. (CMTAI2016). MATEC Web Conf.: Moscow, Russia, 2017. T. 99. P. 02002. doi: 10.1051/mateconf/20179902002.
9. Mehndiratta M., Kayacan E., Kayacan E. A simple learning strategy for feedback linearization control of aerial package delivery robot // 2018 IEEE Conf. on Control Technol. and Appl. (CCTA). IEEE: Copenhagen, Denmark, 2018. P. 361–367. doi: 10.1109/CCTA.2018.8511485.
10. Design and modeling of actuation system of unmanned tricopter with thrust-vectoring front tilt rotors for sustainable flying / Jo R. Siswoyo, A. E. Tan, M. Tee Kit Tsun, Jo H. Siswoyo // *Proc. of the Intern. Conf. of Aerospace and Mechanical Engin.* 2019. Springer: Singapore, 2020. P. 45–55. doi: 10.1007/978-981-15-4756-0_5.
11. Carlson S., Papachristos C. The MiniHawk-VTOL: Design, modeling, and experiments of a rapidly prototyped tiltrotor UAV // 2021 Intern. Conf. on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). IEEE: Athens, Greece, 2021. P. 777–786. doi: 10.1109/ICUAS51884.2021.9476731.
12. Gu X., Xian B., Li J. Model free adaptive control design for a tilt trirotor unmanned aerial vehicle with quaternion feedback: Theory and implementation // *Intern. J. of Adaptive Control and Signal Proc.* 2021. Vol. 36(1). P. 122–137. doi: 10.1002/acs.3344.
13. Ramp M., Papadopoulos E. On modeling and control of a holonomic tricopter // *J. of Intelligent & Robotic Systems*. 2022. Vol. 105(3):51. doi: 10.1007/s10846-021-01541-9.
14. Beals N., Govindarajan B., Singh R. Conceptual design of UAS configurations with dissimilar rotors // 76th Ann. Forum & Technol. Display of the VFS. Virtual Event. 2020. 11 p. doi: 10.4050/F-0076-2020-16457.
15. Sababha B., Alzubi H., Rawashdeh O. A rotor-tilt-free tricopter UAV: design, modelling, and stability control // *Intern. J. of Mechatronics and Automation*. 2015. Vol. 5. P. 107–113. doi: 10.1504/IJMA.2015.075956.
16. Finite-time attitude tracking control for hypersonic flight vehicles with actuator saturation / T. Cao, H. Gong, H. Xiao, Y. Xue // *Intern. J. of Aerospace Engin.* 2022. Vol. 2022(5419377). P. 1–14. doi: 10.1155/2022/5419377.

17. Disturbance rejection attitude control for a quadrotor: Theory and experiment / L. Ding, Q. He, Ch. Wang, R. Qi // Intern. J. of Aerospace Engin. 2021. Vol. 2021(2). P. 1–15. doi: 10.1155/2021/8850071.
18. Stepanyan V., Kurdila A. Adaptive control of unmanned aerial vehicles subject to structural changes and external disturbances // Proc. of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conf. and Exhibit. AIAA: Hilton Head, South Carolina. 2007. P. 6599. doi: 10.2514/6.2007-6599.
19. Hassani H., Mansouri A., Ahaitouf A. Robust finite-time tracking control based on disturbance observer for an uncertain quadrotor under external disturbances // J. of Robotics. 2022. Vol. 2022(2). P. 1–20. doi: 10.1155/2022/4581165.
20. An augmented sliding mode control for fixed-wing UAVs with external disturbances and model uncertainties / Y. Pan, N. Li, W. Zou, B. Wang, K. Wang, X. Tang, S. Bu, L. Qin // Drones. 2023. Vol. 7(7). P. 440–460. doi: 10.3390/drones7070440.
21. Adaptive control with neural networks-based disturbance observer for a spherical UAV / T. Matassini, H. S. Shin, A. Tsourdos, M. Innocenti // IFAC-Papers OnLine. 2016. Vol. 49, iss. 17. P. 308–313. doi: 10.1016/j.ifacol.2016.09.053.
22. Robust control of UAV with disturbances and uncertainty estimation / D. Bianchi, S. Di Gennaro, M. Di Ferdinando, C. Acosta Lúa // Machines. 2023. Vol. 11(3). P. 352–374. doi: 10.3390/machines11030352.
23. The attitude control of UAV in carrier landing based on ADRC / Y. Yu, H. Wang, X. Shao, Y. Huang // Proc. of the 2016 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conf. IEEE: Nanjing, China, 2017. P. 832–837. doi: 10.1109/CGNCC.2016.7828893.
24. Linqi C., Tinghui L. UAV control system based on back-stepping and active disturbance rejection control // Proc. of the 2018 3rd Joint Intern. Information Technol., Mechanical and Electronic Engin. Conf. (JIMEC 2018). Atlantis Press: Chongqing, China, 2018. P. 133–137. doi: 10.2991/jimec-18.2018.28.
25. Full-state-constrained adaptive control for a class of UAVs suffering from coupled uncertainties using the HOBLF / X. Chang, K. Wang, K. Chen, W. Fu // Mathematical Problems in Engin. 2021. Vol. 2021(S1). P. 1–17. doi: 10.1155/2021/9963426.
26. Нгуен З. Х., Путов В. В. Моделирование и исследование движения беспилотных летательных аппаратов типа трикоптера с поворотными винтами // Сб. юбил. XXV конф. молодых ученых «Навигация и управление движением». СПб., Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2023. С. 38–41.
27. Robust adaptive tricopter control under parametric uncertainty and external disturbances conditions / V. V. Putov, V. N. Sheludko, Duy K. Nguyen, B. Andrievsky, Iu. Zaitseva // J. Math. in Sci., Engin., and Aerospace (MESA). 2023. Vol. 14, no. 4. P. 1043–1064.
28. Jinkun Liu. Sliding mode control using MatLab. Academic Press, 2017. 328 p. URL: <https://www.science-direct.com/book/9780128025758/sliding-mode-control-using-matlab>. (дата обращения: 15.01.2024).
29. Андриевский Б. Р., Бобцов А. А., Фрадков А. Л. Методы анализа и синтеза нелинейных систем управления. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2018. 336 с.
30. Халил Х. К. Нелинейные системы. М.: Ин-т компьютерных исследований; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 832 с.

Информация об авторах

Нгуен Зуи Хань – аспирант, ассистент кафедры систем автоматического управления СПбГЭТУ «ЛЭТИ».
E-mail: khanhnguyen.mta@gmail.com

Путов Виктор Владимирович – д-р техн. наук, профессор, зам. зав. кафедрой систем автоматического управления по развитию СПбГЭТУ «ЛЭТИ».
E-mail: vvputov@mail.ru

Шелудько Виктор Николаевич – д-р техн. наук, профессор кафедры систем автоматического управления, ректор СПбГЭТУ «ЛЭТИ».
E-mail: vnsheludko@etu.ru

References

1. Hassija V., Saxena V., Chamola V. Scheduling drone charging for multi-drone network based on consensus time-stamp and game theory // Comp. Communications. 2019. Vol. 149(6). P. 51–61. doi: 10.1016/j.comcom.2019.09.021.
2. Conceptual design and multi-disciplinary computational investigations of multirotor unmanned aerial vehicle for environmental applications / V. Raja, S. K. Solaiappan, P. Rajendran, S. K. Madasamy, S. Jung // Appl. Sci. 2021. Vol. 11(18). P. 8364. doi: 10.3390/app11188364.
3. Nonami K. Prospect and recent research & development for civil use autonomous unmanned aircraft as UAV and MAV // J. of System Design and Dynamics. 2007. Vol. 1(2). P. 120–128. doi: 10.1299/jsdd.1.120.
4. Van Blyenburgh P. UAVs: an Overview // Air & Space Europe. 1999. Vol. 1, no. 5–6. P. 43–47. doi: 10.1016/S1290-0958(00)88869-3.
5. Valavanis K. P. Advances in unmanned aerial vehicles: State of the art and the road to autonomy // Intern. Series on Intelligent Systems, Control, and Automation:

Sci. and Engin. Springer, 2007. Vol. 33. P. 544. doi: 10.1007/978-1-4020-6114-1.

6. Servais E., D'Andrea-Novel B., Mounier H. Ground control of a hybrid tricopter // 2015 Intern. Conf. on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). IEEE: Denver, CO, USA, 2015. P. 945–950. doi: 10.1109/ICUAS.2015.7152382.

7. Tikhonov N. O., Lepikhin T. A., Zhabk N. A. Mathematical modelling of tricopter // Proc. of the II Intern. Scientific Conf. «Convergent Cognitive Information Technologies» (Convergent'2017). M., Russia, 2017. T. 2064. P. 335–340.

8. The synthesis of electric drives characteristics of the UAV of «convertiplane-tricopter» type / O. V. Emelyanova, G. K. Kazaryan, A. S. Martinez Leon, S. F. Jatsun // 2016 Workshop on Contemporary Materials and Technologies in the Aviation Ind. (CMTAI2016). MATEC Web Conf.: Moscow, Russia, 2017. T. 99. P. 02002. doi: 10.1051/mateconf/20179902002.

9. Mehndiratta M., Kayacan E., Kayacan E. A simple learning strategy for feedback linearization control of aerial package delivery robot // 2018 IEEE Conf. on Control Technol. and Appl. (CCTA). IEEE: Copenhagen, Denmark, 2018. P. 361–367. doi: 10.1109/CCTA.2018.8511485.

10. Design and modeling of actuation system of unmanned tricopter with thrust-vectoring front tilt rotors for sustainable flying / Jo R. Siswoyo, A. E. Tan, M. Tee Kit Tsun, Jo H. Siswoyo // Proc. of the Intern. Conf. of Aerospace and Mechanical Engin. 2019. Springer: Singapore, 2020. P. 45–55. doi: 10.1007/978-981-15-4756-0_5.

11. Carlson S., Papachristos C. The MiniHawk-VTOL: Design, modeling, and experiments of a rapidly prototyped tiltrotor UAV // 2021 Intern. Conf. on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS). IEEE: Athens, Greece, 2021. P. 777–786. doi: 10.1109/ICUAS51884.2021.9476731.

12. Gu X., Xian B., Li J. Model free adaptive control design for a tilt trirotor unmanned aerial vehicle with quaternion feedback: Theory and implementation // Intern. J. of Adaptive Control and Signal Proc. 2021. Vol. 36(1). P. 122–137. doi: 10.1002/acs.3344.

13. Ramp M., Papadopoulos E. On modeling and control of a holonomic tricopter // J. of Intelligent & Robotic Systems. 2022. Vol. 105(3):51. doi: 10.1007/s10846-021-01541-9.

14. Beals N., Govindarajan B., Singh R. Conceptual design of UAS configurations with dissimilar rotors // 76th Ann. Forum & Technol. Display of the VFS. Virtual Event. 2020. 11 p. doi: 10.4050/F-0076-2020-16457.

15. Sababha B., Alzubi H., Rawashdeh O. A rotor-tilt-free tricopter UAV: design, modelling, and stability control // Intern. J. of Mechatronics and Automation. 2015. Vol. 5. P. 107–113. doi: 10.1504/IJMA.2015.075956.

16. Finite-time attitude tracking control for hypersonic flight vehicles with actuator saturation / T. Cao, H. Gong, H. Xiao, Y. Xue // Intern. J. of Aerospace Engin. 2022. Vol. 2022(5419377). P. 1–14. doi: 10.1155/2022/5419377.

17. Disturbance rejection attitude control for a quadrotor: Theory and experiment / L. Ding, Q. He, Ch. Wang, R. Qi // Intern. J. of Aerospace Engin. 2021. Vol. 2021(2). P. 1–15. doi: 10.1155/2021/8850071.

18. Stepanyan V., Kurdila A. Adaptive control of unmanned aerial vehicles subject to structural changes and external disturbances // Proc. of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conf. and Exhibit. AIAA: Hilton Head, South Carolina, 2007. P. 6599. doi: 10.2514/6.2007-6599.

19. Hassani H., Mansouri A., Ahaitouf A. Robust finite-time tracking control based on disturbance observer for an uncertain quadrotor under external disturbances // J. of Robotics. 2022. Vol. 2022(2). P. 1–20. doi: 10.1155/2022/4581165.

20. An augmented sliding mode control for fixed-wing UAVs with external disturbances and model uncertainties / Y. Pan, N. Li, W. Zou, B. Wang, K. Wang, X. Tang, S. Bu, L. Qin // Drones. 2023. Vol. 7(7). P. 440–460. doi: 10.3390/drones7070440.

21. Adaptive control with neural networks-based disturbance observer for a spherical UAV / T. Matassini, H. S. Shin, A. Tsourdos, M. Innocenti // IFAC-Papers OnLine. 2016. Vol. 49, iss. 17. P. 308–313. doi: 10.1016/j.ifacol.2016.09.053.

22. Robust control of UAV with disturbances and uncertainty estimation / D. Bianchi, S. Di Gennaro, M. Di Ferdinando, C. Acosta Lúa // Machines. 2023. Vol. 11(3). P. 352–374. doi: 10.3390/machines11030352.

23. The attitude control of UAV in carrier landing based on ADRC / Y. Yu, H. Wang, X. Shao, Y. Huang // Proc. of the 2016 IEEE Chinese Guidance, Navigation and Control Conf. IEEE: Nanjing, China, 2017. P. 832–837. doi: 10.1109/CGNCC.2016.7828893.

24. Linqi C., Tinghui L. UAV control system based on back-stepping and active disturbance rejection control // Proc. of the 2018 3rd Joint Intern. Information Technol., Mechanical and Electronic Engin. Conf. (JIMEC 2018). Atlantis Press: Chongqing, China, 2018. P. 133–137. doi: 10.2991/jimec-18.2018.28.

25. Full-state-constrained adaptive control for a class of UAVs suffering from coupled uncertainties using the HOBLF / X. Chang, K. Wang, K. Chen, W. Fu // Math. Problems in Engin. 2021. Vol. 2021(S1). P. 1–17. doi: 10.1155/2021/9963426.

26. Nguen Z. H., Putov V. V. Modelirovanie i issledovanie dvizhenija bespilotnyh letatel'nyh apparatov tipa trikoptera s povorotnymi vintami // Sb. jubil. XXV konf. molodyh uchenyh «Navigacija i upravlenie dvizheniem». SPb., Koncern «CNII «Jelektropribor», 2023. S. 38–41. (In Russ.).

27. Robust adaptive tricopter control under parametric uncertainty and external disturbances conditions / V. V. Putov, V. N. Sheludko, Duy K. Nguyen, B. Andrievsky, Iu. Zaitseva // J. Math. in Sci., Engin., and Aerospace (MESA). 2023. Vol. 14, no. 4. P. 1043–1064.

28. Jinkun Liu. Sliding mode control using MatLab. Academic Press, 2017. 328 p. URL: <https://www.science-direct.com/book/9780128025758/sliding-mode-control-using-matlab>. (data obrashhenija: 15.01.2024).

29. Andrievskij B. R., Bobcov A. A., Fradkov A. L. Metody analiza i sinteza nelinejnyh sistem upravlenija. M.; Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 2018. 336 s. (In Russ.).

30. Halil H. K. Nelinejnye sistemy. M.: In-t komp'juternyh issledovanij; Izhevsk: NIC «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika», 2009. 832 s. (In Russ.).

Information about the authors

Nguyen Duy Khanh – postgraduate student, Assistant of the Department of Automatic Control Systems, Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: khanhnguyen.mta@gmail.com

Victor V. Putov – Dr Sci. (Eng.), Professor, Deputy Head of the Department of Automatic Control Systems for Development, Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: vvputov@mail.ru

Victor N. Sheludko – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Department of Automatic Control Systems, Rector of Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: vnsheludko@etu.ru

Статья поступила в редакцию 27.02.2024; принята к публикации после рецензирования 02.04.2024; опубликована онлайн 24.05.2024.

Submitted 27.02.2024; accepted 02.04.2024; published online 24.05.2024.
