

Модель для исследования переходных тепловых процессов в объекте нагрева

А. А. Тельнов

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

antel45@yandex.ru

Аннотация. Цель данной статьи – разработка и обоснование упрощенного метода определения распределения температур на поверхности нагреваемого объекта. Для реализации поставленной цели была предложена электрическая схема замещения объекта нагрева, состоящая из конденсаторов, соединенных между собой сопротивлениями. Конденсаторы в данной модели эквивалентны теплоемкости участков нагреваемого объекта, а сопротивления соответствуют тепловым сопротивлениям. Во второй половине статьи смоделирована предложенная схема в среде схемотехнического моделирования.

Ключевые слова: тепловые процессы, компьютерная модель, распределение температуры, тепловой баланс

Для цитирования: Тельнов А. А. Модель для исследования переходных тепловых процессов в объекте нагрева // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2023. Т. 16, № 5. С. 81–86. doi: 10.32603/2071-8985-2023-16-5-81-86.

Original article

A Model for Studying Transient Thermal Processes in a Heated Object

A. A. Telnov

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

antel45@yandex.ru

Abstract. This work is aimed at developing and justifying a simplified method for determining the temperature distribution on the surface of a heated object. To this end, the author proposes an electrical equivalent circuit for the heated object, consisting of capacitors interconnected by resistances. The capacitors in this model are equivalent to the heat capacity of the sections of the heated object, while the resistances correspond to the thermal resistances. Subsequently, the proposed circuit was simulated in a circuit simulation environment.

Keywords: thermal processes, computer model, temperature distribution, heat balance

For citation: Telnov A. A. Model for the Study of Transient Thermal Processes in the Heating Object // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2023. Vol. 16, no. 5. P. 81–86. doi: 10.32603/2071-8985-2023-16-5-81-86.

К важнейшим вопросам при проектировании системы управления комплексом электромагнитной обработки стали относиться невозможность достоверного определения температур на поверхности нагреваемого слоя. Причиной этого может быть малое расстояние между индуктором и нагреваемым изделием или плотная намотка витков индуктирующего провода, что затрудняет установку измерительных приборов (термопар) и вносит сложности для проведения бесконтактных

измерений (с помощью пирометра). Попытки реализации системы управления, где на информационный вход поступает сигнал, отслеживающий уровень температуры в точке, удаленной на некоторое расстояние от индуктора, приводят к нестабильной работе системы и возникновению автоколебаний. Данный режим работы недопустим, так как может стать причиной выхода из строя дорогостоящего оборудования или привести к увеличению количества отбракованной продукции.

Среди множества подходов к решению задачи определения температуры в заданной точке можно выделить следующие способы:

- решением дифференциального уравнения – уравнения теплопроводности (Фурье) [1];
- с помощью линейных интегральных преобразований.

Перечисленные способы сложны и часто требуют от разработчика большого ресурса времени для овладения тем или иным методом. Именно поэтому автором данной статьи предприняты попытки к составлению упрощенной компьютерной модели, способной прогнозировать температуру под индуктором в зависимости от температуры, измеренной на некотором расстоянии.

Рассмотрим рис. 1, на котором представлен эскиз нагреваемого индукционным способом изделия цилиндрической формы. Разделим мысленно объект нагрева на четыре сегмента согласно принятым обозначениям: Δ – глубина проникновения тока; r – радиус цилиндра; l_1 – величина, равная длине индуктора; l_2 – величина, определяющая границу цилиндра.

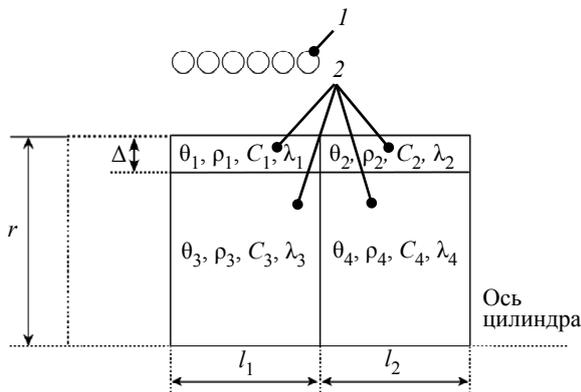


Рис. 1. Эскиз нагреваемого объекта: 1 – индуктор; 2 – сегменты нагреваемого объекта

Fig. 1. Scheme the heated object: 1 – inductor; 2 – segments of the heated object

При разработке и обосновании данной модели будем придерживаться следующих суждений:

1. Тепловая энергия, выделяемая в процессе бесконтактного нагрева изделия токами высокой частоты, концентрируется в пределах поверхностного слоя Δ :

$$\Delta = 503 \sqrt{\frac{\rho}{\mu f}},$$

где ρ – удельное электрическое сопротивление материала; μ – относительная магнитная проницаемость материала изделия; f – частота тока.

2. Представленные сегменты имеют однородную структуру, вследствие чего допустимо суждение о равномерности распределения температуры θ , удельного сопротивления ρ , теплоемкости C и теплопроводности λ в пределах рассматриваемого сегмента.

3. Коэффициент теплоотдачи a в процессе моделирования не изменяется.

Озвученные допущения снижают достоверность полученных результатов, но в значительной мере упрощают процесс разработки модели. Запишем уравнение теплового баланса для каждой части нагреваемого тела, как показано на рис. 2.

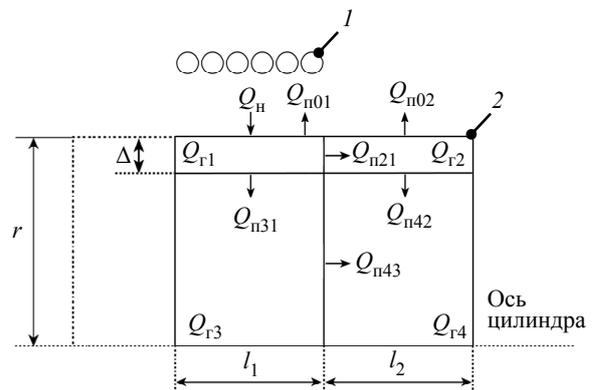


Рис. 2. Эскиз нагреваемого объекта: 1 – индуктор; 2 – нагреваемое изделие

Fig. 2. Scheme of the heated object: 1 – inductor; 2 – heated object

В силу принципа индукционного нагрева, электромагнитное поле индуктора наводит в заготовке вихревые токи, которые нагревают тело по закону Джоуля–Ленца. Количество тепловой энергии dQ_H , вызывающее нагрев первого сегмента за время dt , может быть определено по формуле

$$dQ_H = P dt,$$

где P – мощность, затраченная на нагрев металла.

Учитывая то обстоятельство, что повышение температуры остальных частей нагреваемого объекта осуществляется передачей тепла от первого сегмента, то формулы, описывающие количество тепловой энергии, затрачиваемой на нагрев соседних элементов, приобретают вид

$$dQ_{n21} = \frac{\lambda_{21}}{l_1} S_{21} (\theta_1 - \theta_2) dt;$$

$$dQ_{n31} = \frac{\lambda_{31}}{\Delta} S_{31} (\theta_1 - \theta_3) dt;$$

$$dQ_{n42} = \frac{\lambda_{42}}{\Delta} S_{42} (\theta_2 - \theta_4) dt;$$

$$dQ_{n43} = \frac{\lambda_{43}}{l_1} S_{43} (\theta_3 - \theta_4) dt,$$

где $\lambda_{21}, \lambda_{31}, \lambda_{42}, \lambda_{43}$ – коэффициенты теплопередачи между соответствующими частями нагреваемого объекта; $S_{21}, S_{31}, S_{42}, S_{43}$ – площади поверхностей теплообмена; $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ – температуры.

Кроме того, не стоит забывать, что поверхностный слой нагреваемого изделия характеризуется потерями тепла в окружающее пространство, поэтому для дальнейших расчетов введем два дополнительных выражения:

$$dQ_{п01} = a_1 S_{01} (\theta_1 - \theta_0) dt;$$

$$dQ_{п02} = a_2 S_{02} (\theta_2 - \theta_0) dt,$$

где $dQ_{п01}$ и $dQ_{п02}$ – количества тепловой энергии, передаваемые в окружающее пространство с первого и второго сегментов; a_1, a_2 – коэффициенты, характеризующие интенсивность теплоотдачи в окружающую среду; S_{01} и S_{02} – площади соприкосновения поверхностного слоя объектов с внешней средой; θ_0 – температура окружающего пространства, °С.

Формула коэффициента теплоотдачи имеет вид

$$a = a_k + a_p,$$

где a_k и a_p – конвективная и радиационная оставляющие соответственно.

Конвективная составляющая может быть определена из следующим образом [2]:

$$a_k = 1.864 \sqrt{\theta - \theta_0},$$

где θ – температура поверхностного слоя нагреваемого объекта.

Радиационная составляющая коэффициента теплоотдачи имеет вид

$$a_p = C_0 \varepsilon_k \frac{\left(\frac{\theta + 273.15}{100}\right)^4 - \left(\frac{\theta_0 + 273.15}{100}\right)^4}{\theta - \theta_0},$$

где $C_0 = 5.7 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ – коэффициент излучения абсолютно черного тела; ε_k – коэффициент теплового излучения с поверхностного слоя изделия.

Согласно принципу теплового баланса, количество тепловой энергии, затрачиваемой на нагрев, определяется разностью располагаемой тепловой энергии dQ_H , поступающей в объект нагрева, и энергией тепловых потерь $dQ_{п}$.

Отсюда справедлива запись:

$$dQ_{Г} = dQ_H - dQ_{п},$$

$$dQ_{Г} = m C d\theta,$$

где m – масса объекта, а C – теплоемкость материала.

В соответствии с эскизом, представленным на рис. 2, составим уравнения теплового баланса:

$$dQ_{Г1} = dQ_H - dQ_{п21} - dQ_{п31} - dQ_{п01};$$

$$dQ_{Г2} = dQ_{п21} - dQ_{п42} - dQ_{п02};$$

$$dQ_{Г3} = dQ_{п31} - dQ_{п43};$$

$$dQ_{Г4} = dQ_{п43} + dQ_{п42},$$

где $dQ_{Г1}, dQ_{Г2}, dQ_{Г3}, dQ_{Г4}$ – количества тепловой энергии, вызывающие нагрев соответствующих сегментов.

Распишем выражение для $dQ_{Г1}$:

$$m_1 C_1 d(\theta_1 - \theta_0) = P_1 dt - \frac{\lambda_{21}}{l_1} S_{21} (\theta_1 - \theta_2) dt -$$

$$- \frac{\lambda_{31}}{\Delta} S_{31} (\theta_1 - \theta_3) dt - a_1 S_{01} (\theta_1 - \theta_0) dt$$

и преобразуем его к виду

$$m_1 C_1 \frac{d}{dt} (\theta_1 - \theta_0) = P_1 - \frac{\lambda_{21}}{l_1} S_{21} (\theta_1 - \theta_2) -$$

$$- \frac{\lambda_{31}}{\Delta} S_{31} (\theta_1 - \theta_3) - a_1 S_{01} (\theta_1 - \theta_0).$$

Введем обозначение

$$(\theta_1 - \theta_0) = \Delta \theta_1.$$

Тогда, заменив d/dt на p , выразим формулу, описывающую изменение температуры в первом сегменте:

$$\Delta \theta_1 = \left[P_1 - \frac{\lambda_{21}}{l_1} S_{21} (\theta_1 - \theta_2) - \frac{\lambda_{31}}{\Delta} S_{31} (\theta_1 - \theta_3) - a_1 S_{01} (\theta_1 - \theta_0) \right] \frac{1}{m_1 C_1 p}. \quad (1)$$

Используя аналогичные рассуждения, определим выражения, описывающие изменение температуры в остальных сегментах объекта:

$$\Delta \theta_2 = \left[\frac{\lambda_{21}}{l_1} S_{21} (\theta_1 - \theta_2) - \frac{\lambda_{42}}{\Delta} S_{42} (\theta_2 - \theta_4) - a_2 S_{02} (\theta_2 - \theta_0) \right] \frac{1}{m_2 C_2 p}; \quad (2)$$

$$\Delta \theta_3 = \left[\frac{\lambda_{31}}{\Delta} S_{31} (\theta_1 - \theta_3) - \frac{\lambda_{43}}{l_1} S_{43} (\theta_3 - \theta_4) \right] \frac{1}{m_3 C_3 p}; \quad (3)$$

$$\Delta \theta_4 = \left[\frac{\lambda_{43}}{l_1} S_{43} (\theta_3 - \theta_4) + \frac{\lambda_{42}}{\Delta} S_{42} (\theta_2 - \theta_4) \right] \frac{1}{m_4 C_4 p}. \quad (4)$$

Опираясь на тождество математического аппарата теплофизики и электротехники, преобразуем полученные уравнения, заменив тепловые величины их электрическими аналогами, как показано в табл. 1.

Табл. 1. Электрические аналоги тепловых величин
Tab. 1. Electrical analogues of thermal quantities

Тепловая величина	Электрическая величина
Температура θ , °С	Напряжение V , В
Тепловой поток P , Вт	Ток I , А
Тепловое сопротивление R_{th} , К/Вт	Сопротивление R , Ом
Теплоемкость C , Дж/К	Емкость C_f , Ф

Таким образом, уравнения (1)–(4) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_1}{dt} &= \left[I_1 - \frac{V_1 - V_2}{R_3} - \frac{V_1 - V_3}{R_2} - \frac{V_1 - V_0}{R_1} \right] \frac{1}{C_{f1}}; \\ \frac{dV_2}{dt} &= \left[\frac{V_1 - V_2}{R_3} - \frac{V_2 - V_4}{R_6} - \frac{V_2 - V_0}{R_5} \right] \frac{1}{C_{f2}}; \\ \frac{dV_3}{dt} &= \left[\frac{V_1 - V_3}{R_2} - \frac{V_3 - V_4}{R_4} \right] \frac{1}{C_{f3}}; \\ \frac{dV_4}{dt} &= \left[\frac{V_3 - V_4}{R_4} + \frac{V_2 - V_4}{R_6} \right] \frac{1}{C_{f4}}, \end{aligned} \right\} (5)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{a_1 S_{01}}, \quad R_2 = \frac{\Delta}{\lambda_{31} S_{31}}, \quad R_3 = \frac{l_1}{\lambda_{21} S_{21}}, \\ R_4 &= \frac{l_1}{\lambda_{43} S_{43}}, \quad R_5 = \frac{1}{a_2 S_{02}}, \quad R_6 = \frac{\Delta}{\lambda_{42} S_{42}}, \\ C_{f1} &= \frac{1}{m_1 C_1}, \quad C_{f2} = \frac{1}{m_2 C_2}, \quad C_{f3} = \frac{1}{m_3 C_3}, \\ C_{f4} &= \frac{1}{m_4 C_4}. \end{aligned}$$

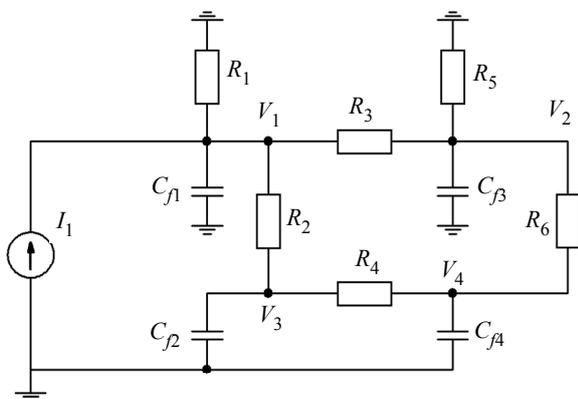


Рис. 3. Схема замещения объекта нагрева
Fig. 3. Heating object equivalent circuit

На основании полученных дифференциальных уравнений составим электрическую схему замещения нагреваемого объекта (рис. 3).

В данной модели сигналы, наблюдаемые между общим выводом (символ \equiv) и узлами V_1 , V_2 , V_3 и V_4 , повторяют форму температуры в четырех сегментах нагреваемого объекта.

На рис. 4 приведены временные зависимости температуры в первом и втором сегментах изделия для случая $I_1 = 200$ А, $R_1 = 5.5$ Ом, $R_2 = 1$ мОм, $R_3 = 40$ Ом, $R_4 = 1$ Ом, $R_5 = 5.5$ Ом, $R_6 = 1$ мОм, $C_{f1} = 24$ Ф, $C_{f2} = 780$ Ф, $C_{f3} = 24$ Ф, $C_{f4} = 780$ Ф.

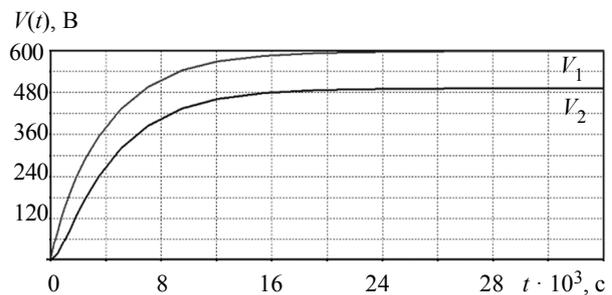


Рис. 4. Временные зависимости температуры в первом и втором сегментах
Fig. 4. Temperature time dependences in the first and second segments

Графики, иллюстрирующие зависимость кривой температуры как функцию от времени, могут быть использованы для приближенного определения требуемого времени нагрева [3]. Однако с практической точки зрения наибольший интерес представляет анализ протекающих процессов с позиций математики. Общий вид решения системы уравнений (5) в случае простых корней имеет вид [4]

$$\begin{aligned} V(t) &= V_B + A_1 e^{-t/\tau_1} + A_2 e^{-t/\tau_2} + \\ &+ A_3 e^{-t/\tau_3} + A_4 e^{-t/\tau_4}, \end{aligned}$$

где V_B – вынужденная составляющая решения системы уравнений; A_1, A_2, A_3, A_4 – постоянные интегрирования; $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ – постоянные времени; t – время.

Тогда характер изменения температуры в первом и втором секторах нагреваемого объекта можно описать с помощью выражений

$$\begin{aligned} V_1(t) &= 601 - 549e^{-t/4436} - 51e^{-t/418} - \\ &- 0.12e^{-t/0.028} - 0.11e^{-t/0.029}; \\ V_2(t) &= 497 - 549e^{-t/4436} + 51e^{-t/418} - \\ &- 0.12e^{-t/0.028} + 0.11e^{-t/0.029}. \end{aligned}$$

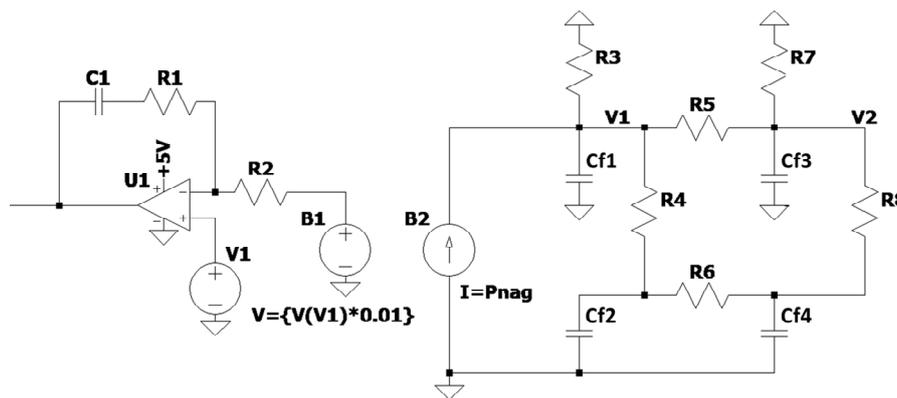


Рис. 5. Снимок экрана программы LTspice
 Fig. 5. Screenshot of the LTspice software

Прямое использование данных уравнений затруднительно, так как они не учитывают зависимость температуры от мощности, подводимой к индуктору. Поэтому в Spice-симуляторах удобно представлять объект нагрева в виде электрической схемы замещения, в которой ток источника B_2 равен мощности, выделяемой в объекте нагрева (рис. 5). В таком случае входной сигнал регулятора обратной связи будет отражать зависимость температуры как функции от мощности и времени расчета.

В компьютерной модели приняты следующие обозначения: элементы R_1, R_2, C_1, U_1, V_1 и B_1 формируют блок регулятора обратной связи; компоненты B_2, R_3-R_8, C_f1-C_f4 образуют эквивалентную схему замещения объекта нагрева, рассмотренную ранее.

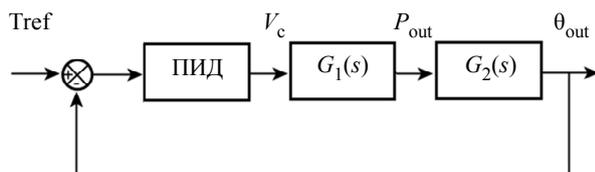


Рис. 6. Структурная схема объекта управления
 Fig. 6. Block diagram of the control object

В то же время, настройку параметров ПИ-регулятора целесообразно осуществлять с помощью специализированного программного пакета, например MatLab/Simulink, для чего в программной среде Simulink строится структурная схема

комплекса электромагнитной обработки стали, как показано на рис. 6.

Внесем сокращение, соответствующее следующему определению: ПФ – передаточная функция. Тогда на рассматриваемой блок-схеме приняты следующие обозначения: ПИД – ПФ регулятора обратной связи; $G_1(s)$ – ПФ преобразователя; $G_2(s)$ – ПФ, определяющая зависимость температуры под индуктором от мощности; T_{ref} – опорный сигнал, V_c – сигнал ошибки; P_{out} – выходная мощность преобразователя; θ_{out} – температура под индуктором.

Предложенная эквивалентная схема замещения объекта нагрева может найти применение при определении передаточной функции $G_2(s)$. При заданных ранее номиналах пассивных R - и C -элементов ПФ имеет вид

$$G_2(s) = \frac{\theta_{out}(s)}{P_{out}(s)} = \frac{V_1(s)}{I_1(s)} = \frac{35.9s^3 + 1591.6s^2 + 1985.7s + 2.9}{863.4s^4 + 74183.2s^3 + 1.59e6s^2 + 4783s + 1}$$

Таким образом, разработанная модель в полной мере подходит для исследования переходных тепловых процессов в объекте нагрева при постоянных тепловых воздействиях. Отдельно стоит отметить возможность ее применения для проведения аналитических расчетов, Spice-симуляции и решения задач проектирования цепи обратной связи в программном пакете MatLab/Simulink.

Список литературы

1. Дилигенская А. Н., Данилушкин И. А. Математическое моделирование систем с распределенными параметрами: учеб. пособие / Самар. гос. техн. ун-т. Самара, 2012. 65 с.
2. Волков А. С., Долгих И. Ю. Разработка декомпозиционного метода исследования индукционно-стыковой сварки // Вестн. РГЭТУ им. П. А. Соловьева. 2015. № 2. С. 64–69.

3. Шевяков В. В. Конденсаторная модель для исследования переходных тепловых процессов в кирпичной стенке бытовой печи // Universum. 2016. № 8. С. 1–23.

4. Вологдин В. П. Поверхностная закалка. М.: Оборонгиз, 1947. 291 с.

Информация об авторе

Тельнов Андрей Александрович – студент гр. 0931 СПбГЭТУ «ЛЭТИ».
E-mail: antel45@yandex.ru

References

1. Diligenskaja A. N., Danilushkin I. A. Matematicheskoe modelirovanie sistem s raspredelennymi parametrami: ucheb. posobie. Samara: Samar. gos. tehn. un-t. 2012. 65 s. (In Russ.).

2. Volkov A. S., Dolgih I. Ju. Razrabotka dekompozitnogo metoda issledovanija indukcionno-stykovoj svarki // Vestn. RGATU imeni P. A. Solov'jova. 2015. № 2. S. 64–69. (In Russ.).

3. Shevjakov V. V. Kondensatornaja model' dlja issledovanija perehodnyh teplovyh processov v kirpichnoj stenke bytovoj pechi // Universum. 2016. № 8. S. 1–23. (In Russ.).

4. Vologdin V. P. Poverhnostnaja zakalka. M.: Oborongiz, 1947. 291 s. (In Russ.).

Information about the author

Andrey A. Telnov – student gr. 0931 of Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: antel45@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 16.03.2023; принята к публикации после рецензирования 06.04.2023; опубликована онлайн 25.05.2023.

Submitted 16.03.2023; accepted 06.04.2023; published online 25.05.2023.
