УДК 519.622.2

С. В. Горяинов, Ш. С. Фахми, С. А. Панов
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Влияние дискретного оператора на свойства нелинейных динамических систем

Исследуется влияние дискретного оператора (метода численного интегрирования) на поведение во времени и качественные свойства нелинейных динамических систем. Рассматриваются методы численного интегрирования трех классов: явные, неявные и полуявные. Приводится методология определения объема фазового пространства нелинейных динамических систем, а также методология построения метода неявной средней точки и полуявного метода Верле для произвольной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Экспериментальные исследования проводятся на двух системах: модели нелинейного гармонического осциллятора и модели, реализующей гравитационную задачу N тел. Для каждой модели приводятся результаты долгосрочного моделирования и оценки фазового объема системы с использованием явных, неявных и полуявных методов. Приводятся преимущества и недостатки использования каждого класса методов численного интегрирования при моделировании рассмотренных математических систем. Делаются выводы о применимости рассмотренных методов при моделировании нелинейных гамильтоновых систем.

Методы численного интегрирования, объем фазового пространства, задача *N* тел, дискретный оператор, гармонический осциллятор, метод Верле, метод неявной средней точки

Под динамическими системами понимаются математические системы с заданным начальным состоянием и законом изменения во времени. Динамические системы нашли широкое применение в различных отраслях науки и техники – химии, теории сигнала, социологии, экономике и др., – однако активное внимание протекающим в них нелинейным процессам стало уделяться сравнительно недавно [1], [2]. Не секрет, что линейные динамические системы не способны адекватно описать большинство реальных процессов. В то же время, использование нелинейных динамических систем, с одной стороны, позволяет значительно повысить адекватность воспроизведения оригинала, а с другой, накладывает значительные ограничения на используемый математический аппарат за счет сложности эволюции системы во времени.

Классические методы интегрирования (дискретные операторы) – такие, как метод Эйлера и методы Рунге–Кутты младших порядков, ориентированы в первую очередь на моделирование линейных систем. Сингулярности и бифуркации, возникающие в нелинейных динамических системах, накладывают существенные ограничения на параметры моделирования с использованием классических методов интегрирования, из чего, в свою очередь, следует увеличение вычислительных затрат, требуемых для сохранения адекватности моделируемой системы.

Развитие теории динамических систем привело к появлению большого количества различных численных методов. В настоящее время принято выделять три класса методов интегрирования: явные, неявные и полуявные. При расчете будущих состояний системы явные методы опираются только на ее предыдущие состояния, а неявные методы используют прогноз ее будущего состояния. Полуявные методы – это сравнительно молодой класс численных методов, они предлагают комбинированный подход, при котором неявный прогноз достигается с использованием явного подхода к расчету будущего состояния системы [3].

При работе с динамическими системами важен тот факт, что любой дискретный оператор вне зависимости от его класса вносит искажения в продуцируемую модель [3], [4]. Цель данной статьи заключается в исследовании влияния различных методов численного интегрирования на свойства нелинейных динамических систем. В качестве исследуемых моделей были выбраны две гамильтоновых системы: модель нелинейного гармонического осциллятора и модель, описывающая систему под названием «задача *N* тел». Качество продуцируемых моделей оценивалось с точки зрения поведения переменных состояния систем во времени и сохранения значения объема фазового пространства, являющегося неотъемлемым свойством гамильтоновых систем [5].

Исследуемые динамические системы. В качестве первой системы была рассмотрена модель нелинейного гармонического осциллятора (НГО), представляющая собой одну из базовых систем теории колебаний. Модель НГО – это простая в реализации нелинейная гамильтонова система второго порядка, что обусловливает ее высокую применимость в исследовании численных методов интегрирования. В виде системы ОДУ данная система может быть представлена как

$$\begin{cases} \dot{q} = a\sin(v); \\ \dot{v} = bq, \end{cases} \tag{1}$$

где q и v – переменные состояния системы, a и b – ее параметры.

На рис. 1 продемонстрировано поведение переменных состояния системы (1) в фазовом пространстве при следующих параметрах моделирования: интервал времени $t = 100$; шаг моделирования $h = 0.01$; $q_0 = 0$, $v_0 = 1$; $a = 1$, $b = 1$.

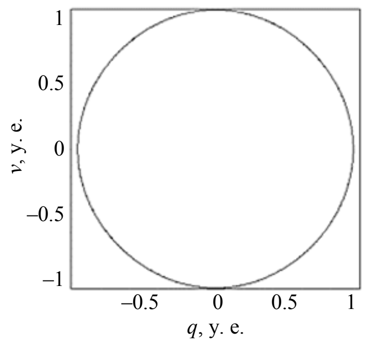

Рис. 1

Второй исследуемой системой стала так называемая гравитационная задача *N* тел. Данная модель отражает поведение нескольких тел, помещенных в пустоту, на основе их взаимного влияния и является одной из классических задач небесной механики. С целью получения наглядных результатов и во избежание нежелательного хаотического поведения системы ее начальные параметры заданы таким образом, чтобы отражать свойства объектов Солнечной системы на примере шести тел: Солнце, Меркурий, Венера, Земля, Луна, Марс.

С математической точки зрения задача *N* тел представляет собой нелинейную гамильтонову систему сложного поведения, обусловленного наличием непреодолимых сингулярностей [6], [7]. В виде системы ОДУ гравитационная задача шести тел может быть представлена в виде тридцати шести уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{v}_{1x} = \sum\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{6} Gm_j \times \\ \times \dfrac{q_{jx} - q_{1x}}{\sqrt{(q_{jx}-q_{1x})^2 + (q_{jy}-q_{1y})^2 + (q_{jz}-q_{1z})^2}^{\,3}}; \\ \dot{q}_{1x} = v_{1x}; \\ \ldots \\ \dot{v}_{6z} = \sum\limits_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{6} Gm_j \times \\ \times \dfrac{q_{jz} - q_{6z}}{\sqrt{(q_{jx}-q_{6x})^2 + (q_{jy}-q_{6y})^2 + (q_{jz}-q_{6z})^2}^{\,3}}; \\ \dot{q}_{6z} = v_{6z}, \end{cases} \tag{2}$$

где $\dot{v}_{ik}$ – мгновенное ускорение i-го тела по k-й координате, $k = \{x, y, z\}$; G – гравитационная постоянная; m_j – масса j-го тела; q – координата i-го или j-го тела в трехмерном пространстве [8].

Поведение системы (2) во времени представлено на рис. 2.

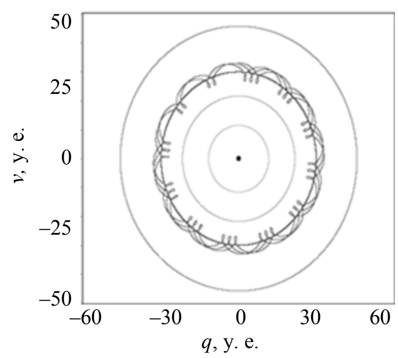

Рис. 2

В дальнейшем будет рассмотрено влияние различных методов численного интегрирования и подходов к управлению шагом интегрирования на поведение и качественные свойства системы (1).

Использованные дискретные операторы. Метод явной средней точки (EMP) – это модификация метода Эйлера, при этом повышение порядка точности достигается внедрением в расчет промежуточного состояния системы, рассчитанного явным образом. В случае рассматриваемых систем метод EMP может быть представлен как

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + 0.5h\left[q_n + 0.5hf_q(q_n, v_n)\right]; \\ v_{n+1} &= v_n + 0.5h\left[v_n + 0.5hf_v(q_n, v_n)\right], \end{aligned} \tag{3}$$

где q_n, v_n – значения переменных состояния систем в момент времени n; h – шаг интегрирования; $f_q(q_n, v_n)$, $f_v(q_n, v_n)$ – функции приращения переменных состояния.

Метод неявной средней точки (IMP) также представляет собой модификацию метода Эйлера, при этом повышение вычислительной точности достигается внедрением в расчет дополнительного состояния системы на базе прогноза, рассчитанного на основе матрицы Якоби моделируемой системы [9]. В рассмотренных системах метод IMP может быть представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + 0.5h\left[f_q(q_n, v_n) + f_q\left(\overset{*}{q}_{n+1}, \overset{*}{v}_{n+1}\right)\right]; \\ v_{n+1} &= v_n + 0.5h\left[f_v(q_n, v_n) + f_v\left(\overset{*}{q}_{n+1}, \overset{*}{v}_{n+1}\right)\right], \end{aligned} \tag{4}$$

где $\overset{*}{q}_{n+1}$ и $\overset{*}{v}_{n+1}$ – прогноз будущих значений переменных состояния системы, полученный на основе матрицы Якоби.

Метод Верле представляет собой полуявный метод численного интегрирования второго порядка точности. В статье рассмотрена модификация метода Верле (CD), предложенная в [10]. Для исследуемых систем метод CD может быть сформулирован следующим образом:

$$\begin{aligned} q_{n+0.5} &= q_n + 0.5hf_q(q_n, v_n); \\ v_{n+0.5} &= v_n + 0.5hf_v(q_{n+0.5}, v_n); \\ v_{n+1} &= v_{n+0.5} + 0.5hf_v(q_{n+0.5}, v_{n+0.5}); \\ q_{n+1} &= q_{n+0.5} + 0.5hf_q(q_{n+0.5}, v_{n+1}). \end{aligned} \tag{5}$$

(3) представляет собой классический явный метод численного интегрирования и не обладает свойствами симплектичности и симметричности, неявный алгоритм (4) и полуявный алгоритм (5) обладают указанными свойствами, что делает их использование предпочтительным в случае гамильтоновых систем. В целях исследования будет осуществлено моделирование систем (1) и (2) всеми рассмотренными методами.

Исследование динамики фазового пространства. Для гамильтоновых консервативных систем (1) и (2) характерно сохранение объема фазового пространства при долгосрочном моделировании. В связи с особенностями численного моделирования его значение может колебаться в определенном диапазоне, но не должно иметь тенденции к убыванию или увеличению.

В общем виде объем фазового пространства модели может быть определен как

$$V_{\text{фаз}} = \sqrt{\sum_{i=1}(x_{i\max} - x_{i\min})^2},$$

где $x_{i\max}$ и $x_{i\min}$ – максимальное и минимальное значения переменных состояния системы по i-й оси координат.

Исследование динамики фазового пространства модели полезно тем, что позволяет оценить искажения, возникающие в модели, раньше, чем они станут очевидны с точки зрения поведения переменных состояния системы. Так, незначительная тенденция к убыванию или возрастанию объема фазового пространства модели может привести к существенному изменению эволюционных процессов модели при долгосрочном моделировании.

На рис. 3 приводятся результаты оценки объема фазового пространства системы (1) на интервале времени t = 30 с, с шагом интегрирования h = 0.01 при моделировании с использованием методов EMP (*а*), IMP (*б*) и CD (*в*).

Методы EMP (*а*) и IMP (*б*) демонстрируют нежелательное поведение объема фазового пространства в ходе моделирования. В случае метода EMP наблюдается явная тенденция к увеличению объема фазового пространства со временем, в случае метода IMP объем постепенно убывает. Метод CD (*в*) демонстрирует хорошие результаты: объем фазового пространства изменяется по закону, близкому к периодическому, и не имеет тенденции к убыванию или возрастанию.

На рис. 4 приводятся результаты оценки объема фазового пространства системы (2) на интервале времени t = 50 с, шаг интегрирования h = 0.001 при моделировании с использованием метода EMP (*а*), IMP (*б*) и CD (*в*).

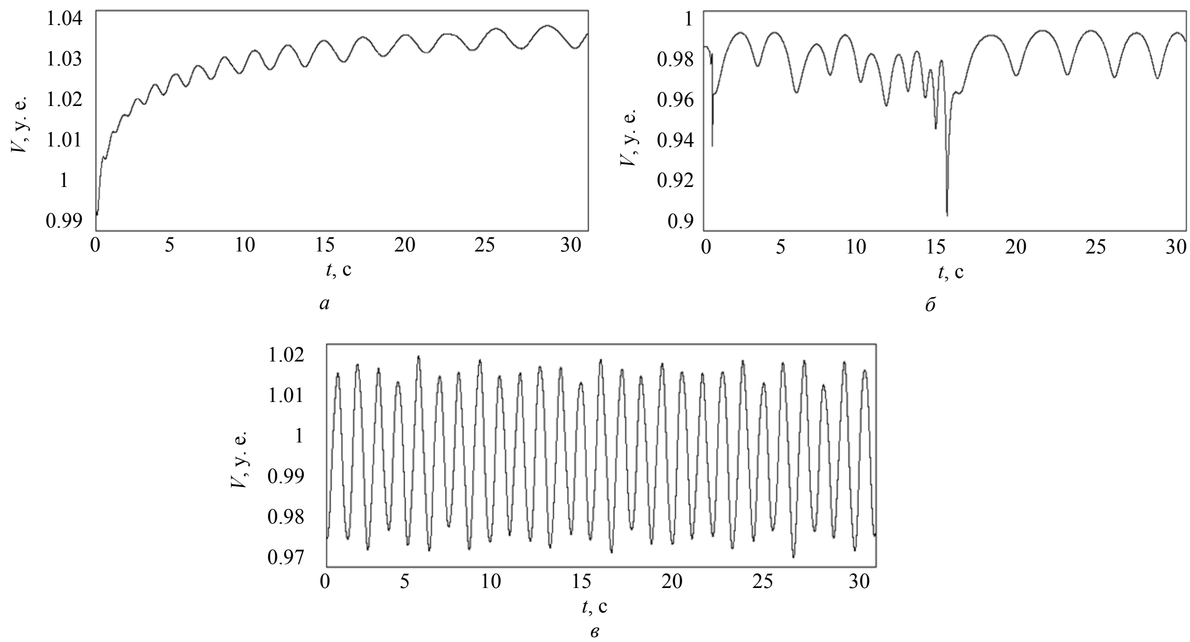

Рис. 3

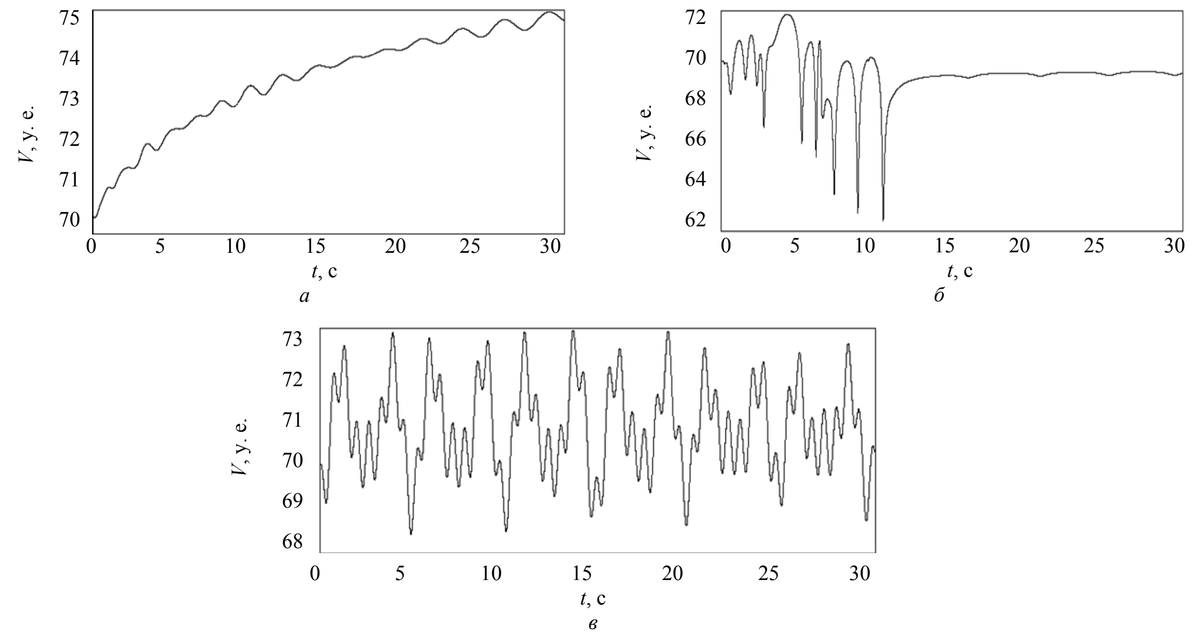

Рис. 4

Исследование системы (2) демонстрирует схожую тенденцию поведения объема фазового пространства модели для всех рассмотренных методов, выраженную более наглядно за счет большей сложности по сравнению с системой (1).

На рис. 5–7 приводятся результаты долгосрочного моделирования системы (1). Интервал времени t = 100 000 с, шаг интегрирования h = 0.01 при моделировании с использованием метода EMP (рис. 5), IMP (рис. 6) и CD (рис. 7).

Из полученных результатов можно видеть, что моделирование методом EMP (рис. 5) приводит к постепенному нарастанию значений переменных состояния (1), в то время как использование метода IMP (рис. 6) приводит к их постепенному уменьшению. Использование полуявного метода CD (рис. 7) позволяет сохранить характерное для данной системы поведение переменных состояния на всем рассмотренном интервале.

На рис. 8–10 приводятся результаты долгосрочного моделирования системы (2). Интервал времени t = 100 000 с, шаг интегрирования h = 0.001 при моделировании с использованием метода EMP (рис. 8), IMP (рис. 9) и CD (рис. 10). На графиках приведено изменение координат объекта, имитирующего поведение Земли.

Использование метода EMP (рис. 8), как и в случае системы (1), приводит к постепенному

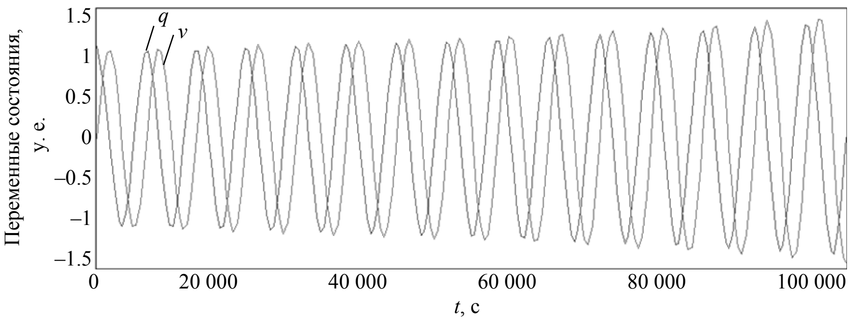

Рис. 5

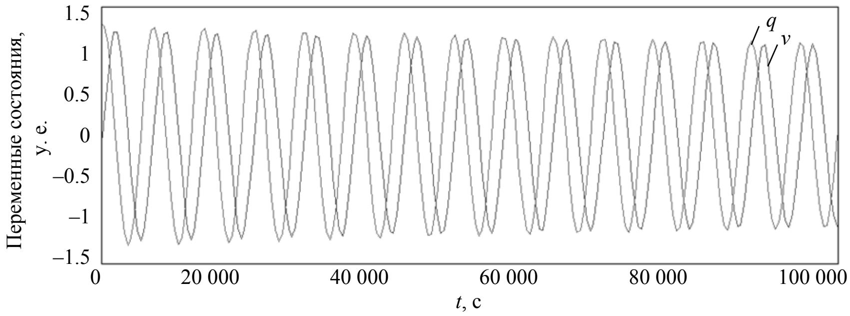

Рис. 6

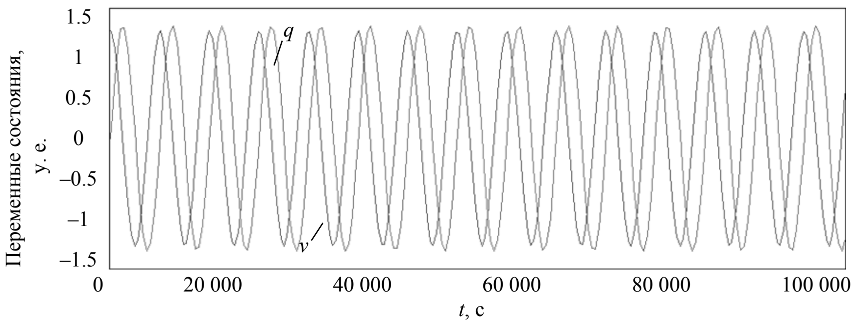

Рис. 7

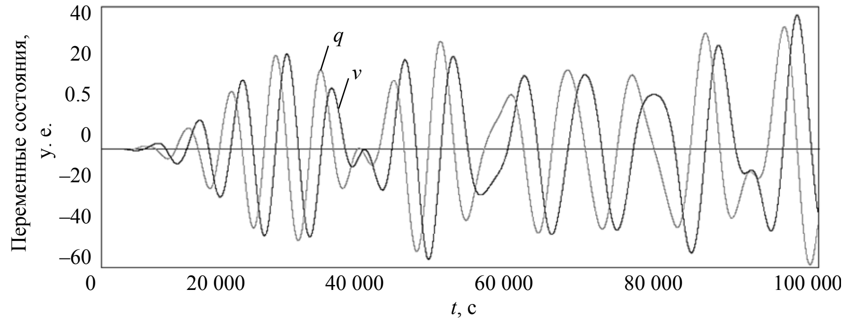

Рис. 8

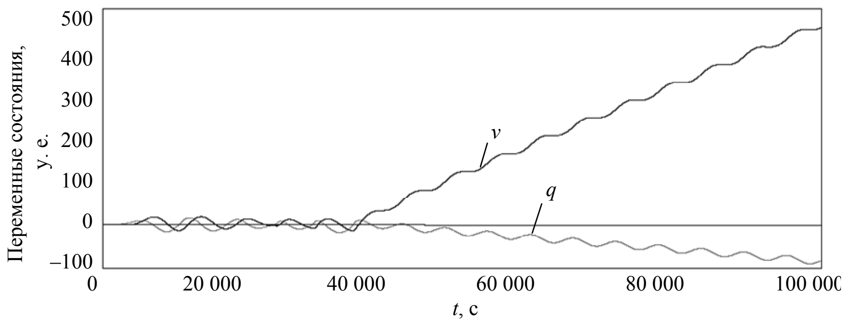

Рис. 9

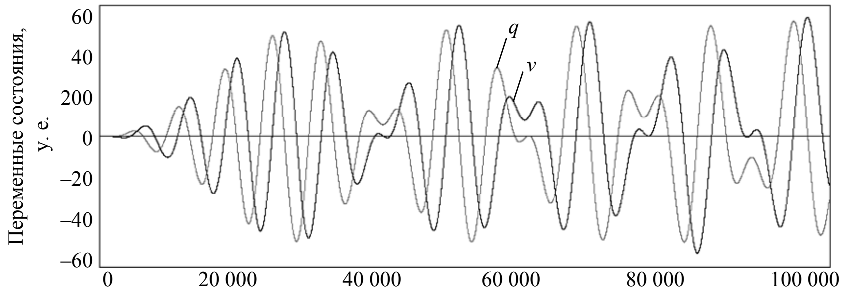

Рис. 10

расхождению системы. Уменьшение объема фазового пространства при моделировании методом IMP привело к катастрофической смене режима работы системы (2) в момент времени $t \approx 40\,000$ с (рис. 9). Использование метода CD позволило сохранить близкое к периодическому поведение переменных состояния (рис. 10).

В данной статье было рассмотрено влияние выбранного дискретного оператора на свойства и поведение во времени двух нелинейных динамических систем. Для исследования были выбраны две гамильтоновы системы различной сложности для наглядной демонстрации влияния выбранного метода численного интегрирования на неотъемлемые свойства продуцируемой модели.

Было рассмотрено, как методы численного интегрирования различных классов влияют на свойство сохранения объема фазового пространства исследуемых моделей на краткосрочном интервале моделирования, когда изменения в эволюционных процессах модели еще не заметны, и вытекающие из этого последствия при долгосрочном моделировании.

Альтернативой объема фазового пространства в исследовании свойств продуцируемой модели выступает полная энергия системы. Однако, поскольку негамильтоновы системы не обладают свойством сохранения полной энергии системы во времени, подход к исследованию систем, основанный на оценке полной энергии продуцируемой модели, более узконаправлен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трубецков Д. И. Наука о сложностях в лицах, датах и судьбах. Как закладывались основы синергетики: Пиршество духа и драма идей. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013.

2. Нелинейное подмешивание радио- и видеосигналов в системе связи с использованием динамического хаоса / И. В. Романов, И. В. Измайлов, А. П. Коханенко, Б. Н. Пойзнер // Изв. Томского политех. ун-та. 2011. Т. 318, № 2. С. 53–58.

3. Бутусов Д. Н., Каримов А. И., Каримов Т. И. Аппаратно-ориентированные численные методы интегрирования. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2016.

4. Geometric numerical integration / E. Hairer, M. Hochbruck, A. Iserles, C. Lubich // Springer Series in Computational Mathematics. 2006. Vol. 31. P. 209–286.

5. The effects of Padé numerical integration in simulation of conservative chaotic systems / D. Butusov, A. Karimov, A. Tutueva, D. Kaplun, E. G. Nepomucheno // Entropy. 2019. № 21(4). P. 362.

6. Aarseth S., Sverre J. Gravitational n-body Simulations, Tools and Algorithms. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

7. Meyer K. R., Hall G. R., Offin D. Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N-body problem // Applied Mathematical Sciences, 2009. URL: http://www.springer.com/jp/book/9780387097237 (дата обращения 12.02.2019).

8. Trenti M., Hut P. N-body simulations // Scholarpedia. 2003. № 3 (5). P. 3930.

9 Burden R. L., Faires J. D. Numerical analysis. Publisher Richard Stratton, 2010.

10. Butusov D. N., Karimov T. I., Ostrovskii V. Y. Semi-implicit ODE solver for matrix Riccati equation // Proc. IEEE NW Russia Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conf. (EIConRusNW). St. Petersburg, 2016. P. 168–172.

S. V. Goryainov, Sh. S. Fahmi, S. A. Panov
Saint Petersburg Electrotechnical University

DISCRETE OPERATOR INFLUENCE ON THE PROPERTIES OF NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS

In this paper, we study the influence of a discrete operator (a numerical integration method) on the time behavior and qualitative properties of nonlinear dynamical systems. Methods of numerical integration of three classes are considered: explicit, implicit and semi-implicit. A methodology for determining the volume of the phase space of nonlinear dynamical systems is presented. A methodology for constructing the implicit midpoint method and the semi-implicit Wehrle method for an arbitrary system of ordinary differential equations is presented. Experimental studies are carried out on two systems: a model of a nonlinear harmonic oscillator and a model that implements the gravitational problem of N bodies. For each model, the results of long-term modeling and estimation of the phase volume of the system using explicit, implicit and semi-implicit methods are presented. The advantages and disadvantages of using each class of numerical integration methods in modeling the considered mathematical systems are presented. Conclusions are drawn about the applicability of the considered methods in modeling nonlinear Hamiltonian systems.

Numerical integration methods, phase space volume, N-body problem, discrete operator, harmonic oscillator, Verlet method, implicit midpoint method

УДК 004.056.5

Т. М. Татарникова, Ф. Бимбетов
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

П. Ю. Богданов
Российский государственный гидрометеорологический университет

Выявление аномалий сетевого трафика методом глубокого обучения

Обсуждается применение метода глубокого обучения, основанного на нейронных сетях, в системах обнаружения атак. Обозначены ограничения применения нейронных сетей для классификации трафика на нормальный – не содержащий атаку, и аномальный – содержащий атаку. Ограничения связаны с необходимостью набора данных для обучения нейронной сети, низкой скоростью вычисления нейронной сети при большом количестве входных параметров и влиянием неравномерности распределения выборки примеров из обучающего набора на качество обучения. Предложены способы обхода этих ограничений: выбор значимых информационных признаков, позволяющих классифицировать сетевой трафик, и сохранение значимых примеров обучения, которые представлены малым объемом выборки. Снижать размерность вектора информационных признаков предложено линейным методом с ранжированием признаков по степени важности и в дальнейшем для обучения нейронной сети использовать только «важные» признаки. Сохранение значимых примеров обучения, представленных малым объемом выборки, предложено решить модификацией алгоритма обучения, суть которого сводится к адаптивному присвоению весовых коэффициентов таким примерам. Проведенные эксперименты свидетельствуют об эффективности предложенных метода и алгоритма обучения нейронной сети обнаружению сетевых атак.

Сетевая атака, аномалии сетевого трафика, нейронная сеть, глубокое обучение, сокращение параметров, неравномерность количества обучающих примеров, ошибка обучения, точность классификации

Системы обнаружения атак (СОА) – базовое средство защиты корпоративных информационных ресурсов. Обнаружение атаки подразумевает сначала сбор данных, а затем их анализ средства-