

УДК 533.932, 533.9.07

С. А. Марцынюков, Д. К. Кострин  
Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

## Физико-математическая модель распределения заряженных частиц плазмы положительного столба газового разряда в поперечном магнитном поле

*В случае размещения активной среды газоразрядного лазера в поперечном магнитном поле распределение электронов низкотемпературной плазмы будет меняться, что приведет к изменению выходной характеристики лазера. В статье представлен анализ распределения заряженных частиц в радиальном направлении при воздействии поперечного магнитного поля. Расчеты в соответствии с физико-математической моделью показывают, что влияние поперечного магнитного поля приводит к сжиманию плазмы к одной стороне трубки, центральная область плазмы смещается от центра координат на некоторое расстояние. Была проведена экспериментальная проверка адекватности рассмотренной физико-математической модели посредством помещения разрядной трубки лазера в поперечное магнитное поле. Применение вакуумной системы позволяет заполнять объем лазера различными газами при разных давлениях в трубке. Предполагается, что область максимума концентрации заряженных частиц соответствует наибольшей яркости области тлеющего разряда, где происходит наиболее интенсивное возбуждение газа. Расхождение результатов расчета по рассмотренной модели и экспериментальных данных составляет менее 5 %.*

### Газоразрядный лазер, низкотемпературная плазма, поперечное магнитное поле, заряженные частицы, положительный столб, физико-математическая модель

В газоразрядных лазерах (ГЛ) [1]–[3] благодаря поддержанию электрического разряда внутри протяженной трубки с малым радиусом создается низкотемпературная плазма, используемая в качестве активной среды. Концентрация электронов максимальна на оси и снижается в радиальном направлении. В случае размещения активной среды в поперечном магнитном поле (МП) распределение электронов будет меняться, что приводит к изменению выходной характеристики ГЛ [4], [5]. Таким образом, определенный интерес представляет анализ распределения заряженных частиц (ЗЧ) в радиальном направлении.

Допустим, что электрическое поле (ЭП) ориентировано вдоль центральной оси разрядной трубки, а силовые линии МП – перпендикулярно этой оси. Плазменный поток, перемещающийся под воздействием МП, представляет собой аналог жидкости, состоящей из двух практически независимых компонентов (в данном случае электронов и ионов) [6]. Кроме воздействия сил, вызванных неоднородностью распределения давления, а также трения, возникающего при контакте, ЗЧ подвергаются влиянию силы Ампера

$$\mathbf{F}_A = \mathbf{E} + [\mathbf{v}\mathbf{B}],$$

где  $\mathbf{E}$  – напряженность используемого ЭП;  $\mathbf{v}$  – скорость перемещения ЗЧ;  $\mathbf{B}$  – индукция приложенного МП. Используя уравнения гидродинамики, силы, действующие на ЗЧ вида  $j$ , в общем случае могут быть описаны уравнением Навье–Стокса

$$m_j \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} + (\mathbf{v}_j \nabla) \mathbf{v}_j \right] = e_j \mathbf{E} + e_j [\mathbf{v}_j \mathbf{B}] - \frac{\nabla p_j}{k_j} + m_j \frac{\delta \mathbf{v}_j}{\delta t}, \quad (1)$$

где  $m$  – масса;  $t$  – время;  $\nabla$  – оператор набла;  $e$  – заряд;  $p$  – давление;  $k$  – постоянная Больцмана;  $j$  – коэффициент, зависящий от типа частиц ( $j = i$  ( $e_j = e$ ) для положительных ионов,  $j = e$  ( $e_j = -e$ ) для электронов).

Выражение (1) описывает баланс воздействий, которым подвергаются ЗЧ в плазме при наличии МП. С левой стороны в данном выражении представлены силы, приводящие к ускорению ЗЧ. Используя распределение Максвелла, парциальное давление ЗЧ вида  $j$  можно записать следующим образом:

$$p_j = k n_j T_j,$$

где  $T_j$  – температура, которую можно принять практически неизменной ( $T_j = \text{const}$ );  $n_j$  – концентрация ЗЧ. Тогда

$$\nabla p_j = k T_j \nabla n_j.$$

Сила трения, следствие контакта ЗЧ разного сорта ( $j, k$ ) в плазме, – это функция от их темпа направленного перемещения

$$m_j \frac{\delta v_j}{\delta t} = -m_j \sum_k v_{jk} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k),$$

где  $v_{jk}$  – периодичность взаимодействий между ЗЧ и атомами.

Если рассматривать изменение концентрации  $n$  и ЭП как линейное, то компонента  $(\mathbf{v}_j \nabla) \mathbf{v}_j$  в (1) становится пренебрежимо малой и может быть проигнорирована. Принимая во внимание сделанные допущения, можно записать выражение, описывающее перемещение ЗЧ, в следующей форме:

$$e_j \mathbf{E} + e_j [\mathbf{v}_j \mathbf{B}] - k T_j \frac{\nabla n_j}{n_j} - m_j \sum_k v_{jk} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k) = 0. \quad (2)$$

Так как плазма ГЛ слабоионизированная, то периодичность взаимодействий ЗЧ с неионизированными атомами или молекулами газа значительно превышает периодичность их взаимодействий между собой. Также в рассматриваемой ситуации темп направленного перемещения атомов или молекул значительно ниже аналогичной характеристики ЗЧ. Следовательно, (2) можно записать в следующем виде:

$$e_j \mathbf{E} + e_j [\mathbf{v}_j \mathbf{B}] - k T_j \frac{\nabla n_j}{n_j} - m_j v_j \mathbf{v}_j = 0. \quad (3)$$

При решении (3) для нахождения рассредоточения ЗЧ в пространстве по радиусу разрядной трубки принимаем следующие допущения:

– МП направляется только по оси  $y$  ( $B = B_y = \text{const}$ ,  $B_x = 0$ ,  $B_z = 0$ ) и отсутствует МП, создаваемое перемещением ЗЧ;

– влияние распределенных в анализируемой области зарядов на ЗЧ не рассматривается;

– используются усредненные значения скорости перемещения ЗЧ в установившемся состоянии.

С учетом (3) компонента направленной по оси  $y$  скорости ЗЧ может быть найдена при помощи анализа выражения

$$e_j \mathbf{E} - m_j v_j \mathbf{v}_j - k T_j \frac{\nabla n_j}{n_j} = 0,$$

принимая во внимание, что  $[\mathbf{v}_j \mathbf{B}] = 0$ . Таким образом, можно записать:

$$v_{jy} = \frac{1}{m_j v_j} \left[ e_j E_y - \frac{k T_j}{n_j} \frac{\partial n_j}{\partial y} \right].$$

Определим следующие величины:

$$\frac{e_j}{m_j v_j} = \mu_j; \quad \frac{k T_j}{m_j v_j} = D_j,$$

где  $\mu_j$  – дрейфовая подвижность рассматриваемых ЗЧ в плазме;  $D_j$  – коэффициент диффузии ЗЧ в плазме. Можно отметить, что обе эти характеристики ЗЧ не изменяются при приложении МП. Таким образом, компоненты скорости ЗЧ обоих знаков по оси  $y$  могут быть записаны как

$$v_{ey} = -\mu_e E_y - \frac{D_e}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial y}; \quad v_{iy} = \mu_i E_y - \frac{D_i}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial y}.$$

Компоненты направленных скоростей ЗЧ обоих знаков по поверхности  $xOz$  могут быть рассчитаны из (3). Предположим, что некоторый вектор  $\mathbf{h}$  направлен соосно с приложенным МП и связан с ним выражением  $\mathbf{B} = B \mathbf{h}$ . Запишем выражение, определяющее гиромагнитные частоты рассматриваемых частиц

$$\omega_{\Gamma j} = \frac{e_j B}{m_j}.$$

Тогда решение (3) преобразуется к следующему виду:

$$\mathbf{v}_j = \mu_j \mathbf{E} + \omega_{\Gamma j} \tau_j [\mathbf{v}_j \mathbf{h}] - \frac{D_j}{n_j} \nabla n_j, \quad (4)$$

где  $\tau_j = 1/v_j$  – время столкновений. Умножив обе части (4) векторно на  $\mathbf{h}$  и учитывая, что  $[\mathbf{v}_j \mathbf{h}] \mathbf{h} = \mathbf{v}_j$ , получим

$$[\mathbf{v}_j \mathbf{h}] = \mu_j [\mathbf{E} \mathbf{h}] + \omega_{\Gamma j} \tau_j \mathbf{v}_j - \frac{D_j}{n_j} [\nabla n_j \mathbf{h}]. \quad (5)$$

Подставив (5) обратно в (4), получим выражение для  $\mathbf{v}_j$ :

$$\mathbf{v}_j = \frac{\mu_j}{1 + \omega_{Tj}^2 \tau_j^2} \mathbf{E} - \frac{D_j}{1 + \omega_{Tj}^2 \tau_j^2} \frac{\nabla n_j}{n_j} + \omega_{Tj} \tau_j \left[ \frac{\mu_j}{1 + \omega_{Tj}^2 \tau_j^2} [\mathbf{E} \mathbf{h}] - \frac{D_j}{1 + \omega_{Tj}^2 \tau_j^2} \left[ \frac{\nabla n_j}{n_j} \mathbf{h} \right] \right].$$

Проектируя  $\mathbf{v}_j$  на плоскость  $xOz$  с учетом  $[\mathbf{E} \mathbf{h}] = \mathbf{a}E_x - \mathbf{c}E_z$  и  $[\nabla n_j \mathbf{h}] = \mathbf{a} \frac{\partial n_j}{\partial x} - \mathbf{c} \frac{\partial n_j}{\partial z}$ , где  $\mathbf{a}, \mathbf{c}$  – векторы направления компонент ЭП, запишем выражения для ориентированных по обоям компонент скорости:

$$\begin{aligned} v_{jx} &= \frac{\mu_j}{1 + \omega_{Tj}^2 \tau_j^2} E_x - \frac{D_j}{1 + \omega_{Tj}^2 \tau_j^2} \frac{1}{n_j} \frac{\partial n_j}{\partial x} - \\ &- \frac{\omega_{Tj} \tau_j}{1 + \omega_{Tj}^2 \tau_j^2} \mu_j E_z + \frac{\omega_{Tj} \tau_j D_j}{1 + \omega_{Tj}^2 \tau_j^2} \frac{1}{n_j} \frac{\partial n_j}{\partial z}; \\ v_{jz} &= \frac{\mu_j}{1 + \omega_{Tj}^2 \tau_j^2} E_z - \frac{D_j}{1 + \omega_{Tj}^2 \tau_j^2} \frac{1}{n_j} \frac{\partial n_j}{\partial z} + \\ &+ \frac{\omega_{Tj} \tau_j}{1 + \omega_{Tj}^2 \tau_j^2} \mu_j E_x - \frac{\omega_{Tj} \tau_j D_j}{1 + \omega_{Tj}^2 \tau_j^2} \frac{1}{n_j} \frac{\partial n_j}{\partial x}. \end{aligned}$$

Учитывая, что газоразрядная плазма в рассматриваемой ситуации гомогенна в ориентации оси  $z$  ( $\partial n_j / \partial z = 0$ ), компоненты скоростей ЗЧ обоих знаков по осям  $x$  и  $z$  могут быть записаны настоящим образом:

$$\begin{aligned} v_{ex} &= -\frac{\mu_e}{1 + \omega_{Te}^2 \tau_e^2} E_x - \\ &- \frac{D_e}{1 + \omega_{Te}^2 \tau_e^2} \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} - \frac{\omega_{Te} \tau_e \mu_e}{1 + \omega_{Te}^2 \tau_e^2} E_z; \\ v_{ix} &= \frac{\mu_i}{1 + \omega_{Ti}^2 \tau_i^2} E_x - \frac{D_i}{1 + \omega_{Ti}^2 \tau_i^2} \frac{1}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x} - \frac{\omega_{Ti} \tau_i \mu_i}{1 + \omega_{Ti}^2 \tau_i^2} E_z; \\ v_{ez} &= -\frac{\mu_e}{1 + \omega_{Te}^2 \tau_e^2} E_z + \\ &+ \frac{\omega_{Te} \tau_e \mu_e}{1 + \omega_{Te}^2 \tau_e^2} E_x - \frac{\omega_{Te} \tau_e D_e}{1 + \omega_{Te}^2 \tau_e^2} \frac{1}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x}; \\ v_{iz} &= \frac{\mu_i}{1 + \omega_{Ti}^2 \tau_i^2} E_z + \frac{\omega_{Ti} \tau_i \mu_i}{1 + \omega_{Ti}^2 \tau_i^2} E_x - \frac{\omega_{Ti} \tau_i D_i}{1 + \omega_{Ti}^2 \tau_i^2} \frac{1}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x}. \end{aligned}$$

Из полученных выражений видно, что в ориентации перпендикулярной МП подвижность заряженных частиц и коэффициент диффузии зависят от индукции МП:

$$\mu_{j\perp} = \frac{\mu_j}{1 + \omega_{Tj}^2 \tau_j^2} = \alpha_j \mu_j;$$

$$D_{j\perp} = \frac{\omega_{Tj} \tau_j}{1 + \omega_{Tj}^2 \tau_j^2} D_j = \beta_j D_j.$$

Обычно ионы в слабом МП немагнитичны ( $\omega_{Ti} \tau_i \ll 1$ ). Тогда в конечном итоге получаем следующие зависимости компонент скоростей для электронов и ионов:

$$\begin{aligned} v_{ex} &= -\alpha \mu_e E_x - \alpha \frac{D_e}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x} - \beta \mu_e E_z; \\ v_{ey} &= -\mu_e E_y - \frac{D_e}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial y}; \\ v_{ez} &= -\alpha \mu_e E_z + \beta \mu_e E_x - \beta \frac{D_e}{n_e} \frac{\partial n_e}{\partial x}; \\ v_{ix} &= \mu_i E_x - \frac{D_i}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x} - \mu_i^2 B E_z; \\ v_{iy} &= \mu_i E_y - \frac{D_i}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial y}; \\ v_{iz} &= \mu_i E_z + \mu_i^2 B E_x - \mu_i B \frac{D_i}{n_i} \frac{\partial n_i}{\partial x}. \end{aligned} \quad (6)$$

Ориентированные по радиусу компоненты скоростей перемещения ЗЧ в гомогенном столбе с оболочкой из диэлектрического материала имеют одинаковые значения. Учитывая то, что потоки ЗЧ обоих знаков к внутренней поверхности трубки ( $v_{ex} = v_{ix} = v_x$ ,  $v_{ey} = v_{iy} = v_y$ ) и условия квазинейтральности плазмы  $n_e = n_i = n$ , получаем выражения для смешанных составляющих полей  $E_x$  и  $E_y$ :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} \frac{D_i - \alpha D_e}{\mu_i + \alpha \mu_e} + \frac{\mu_i^2 B - \beta \mu_e}{\mu_i + \alpha \mu_e} E_z; \\ E_y &= \frac{D_i - D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y}. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (6) и сделав необходимые преобразования, получим соответствующие выражения для расчета компонент скорости по осям  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} v_x &= -\alpha \frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_i + \alpha \mu_e} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial x} - \mu_e \mu_i E_z \frac{\beta + \alpha \mu_i B}{\mu_i + \alpha \mu_e}; \\ v_y &= -\frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_i + \mu_e} \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial y}. \end{aligned}$$

Определим новую характеристику плазмы:

$$D_a = \frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_i + \mu_e},$$

где  $D_a$  – коэффициент совместной диффузии ЗЧ обоих знаков в плазме, определяющий ориентированный по радиусу темп амбиполярной миграции ЗЧ. Как правило, для газового разряда  $\mu_e \gg \mu_i$ ,  $\alpha\mu_e \gg \mu_i$ . В этом случае

$$\begin{aligned} D_a &= D_i + \frac{\mu_i}{\mu_e} D_e \approx \frac{kT_e}{e} \mu_i; \\ \frac{\mu_e D_i + \mu_i D_e}{\mu_i + \alpha\mu_e} &\approx \frac{1}{\alpha} D_a; \\ \mu_e \mu_i E_z \frac{\beta + \alpha\mu_i B}{\mu_i + \alpha\mu_e} &\approx \mu_e \mu_i E_z B. \end{aligned} \quad (7)$$

С учетом (7) выражения для  $v_x$  и  $v_y$  могут быть представлены в упрощенном виде:

$$v_x = -\frac{D_a}{n} \frac{\partial n}{\partial x} - \mu_e \mu_i E_z B; \quad v_y = -\frac{D_a}{n} \frac{\partial n}{\partial y}. \quad (8)$$

Рассмотрим два механизма рекомбинации носителей заряда в плазме газового разряда: на стенках трубки и в объеме. Если рекомбинация происходит на стенках трубки, то, руководствуясь главными постулатами концепции положительного столба (ПС) [7] тлеющего разряда [8], можно сказать, что должна соблюдаться неизменность количества ЗЧ. Иными словами ионы, покидающие ПС и попадающие на внутреннюю поверхность трубки, должны компенсироваться ионами, произведенными в процессе ионизации атомов газа. Выражение, описывающее неизменность количества ЗЧ, вытекает из закона сохранения, имеющего следующую форму:

$$\operatorname{div}(nv) = z_i n, \quad (9)$$

где  $z_i$  – частота ударной ионизации. Как уже упоминалось, плазменный поток гомогенен в ориентации, параллельной оси  $z$ , и разнороден в перпендикулярной ориентации. Таким образом, (9) можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{\partial(nv_x)}{\partial x} + \frac{\partial(nv_y)}{\partial y} = z_i n. \quad (10)$$

Подставляя (8) в (10) и обозначая  $b = \mu_e \mu_i E_z B$ , получим уравнение

$$D_a \left( \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} \right) + b \frac{\partial n}{\partial x} + z_i n = 0. \quad (11)$$

При отсутствии МП ( $b = 0$ ) имеем уравнение Бесселя; преобразуя его в цилиндрическую систему координат, получаем известное соотношение

$$n(r) = n(0) J_0 \left( r \sqrt{\frac{z_i}{D_a}} \right),$$

где  $r$  – радиальная координата.

При наличии индукции МП решение (11) необходимо искать в следующем виде:

$$n(x, y) = N(x, y) F(x).$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial x} &= \frac{\partial N}{\partial x} F + N \frac{dF}{dx}; \\ \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} F + 2 \frac{\partial N}{\partial x} \frac{dF}{dx} + N \frac{d^2 F}{dx^2}; \quad \frac{\partial^2 n}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} F. \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (11), запишем следующее равенство:

$$\begin{aligned} D_a \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} F + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} F \right) + \left( 2D_a \frac{dF}{dx} + bF \right) \frac{\partial N}{\partial x} + \\ + N \left( D_a \frac{d^2 F}{dx^2} + b \frac{dF}{dx} + z_i F \right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В принципе,  $F(x)$  в предыдущих выражениях – это функция произвольного вида. Для проведения дальнейших расчетов будем считать, что для  $F(x)$  должно быть справедливым следующее условие:

$$2D_a \frac{dF}{dx} + bF = 0.$$

Решением данного уравнения служит

$$F(x) = F_0 \exp \left( -\frac{b}{2D_a} x \right). \quad (13)$$

Подставив это решение в (12), можно найти  $N(x, y)$ . Для всех значений  $F(x) \neq 0$ , тогда после деления на  $F(x)$  получим уравнение

$$D_a \left( \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) + \left( z_i - \frac{b^2}{4D_a} \right) N = 0.$$

Обозначим  $z'_i = z_i - (b^2/4D_a)$  и перепишем уравнение в другой форме:

$$D_a \Delta N + z'_i N = 0.$$

Перейдем в цилиндрическую систему координат, введя ось координат  $r$

$$D_a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial N}{\partial r} \right) + z_i' N = 0;$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{z_i'}{D_a} N = 0. \quad (14)$$

Решением (14), представляющего собой уравнение Бесселя, является

$$N(r) = N_0 J_0 \left( r \sqrt{\frac{z_i'}{D_a}} \right) = N_0 J_0 \left( r \sqrt{\frac{z_i}{D_a} - \frac{b^2}{4D_a^2}} \right), \quad (15)$$

где  $N_0$  – концентрации ЗЧ в центре разрядной трубки.

Рассматривая (13) и (15) совместно, можно найти решение (11), являющееся зависимостью концентрации ЗЧ в ПС электрического разряда, расположенного в поперечном МП:

$$n(r) = n(0) \exp \left( -\frac{b}{2D_a} r \cos \varphi \right) J_0 \left( r \sqrt{\frac{z_i}{D_a} - \frac{b^2}{4D_a^2}} \right),$$

где  $\varphi$  – угловая координата.

Задавая граничное условие  $n(R) = 0$  (поверхность разрядной трубки изготовлена из диэлектрического материала, потоки ЗЧ обоих знаков сбалансированы), где  $R$  – радиус разрядной трубки, получим

$$R \sqrt{\frac{z_i}{D_a} - \frac{b^2}{4D_a^2}} = 2.405.$$

Отсюда

$$n(r) = n(0) \exp \left( -\frac{b}{2D_a} r \cos \varphi \right) J_0 \left( 2.405 \frac{r}{R} \right), \quad (16)$$

где  $b = \mu_e \mu_i EB$ .

Кривые неизменной концентрации ЗЧ в поперечной секции разрядной трубки показаны на рис. 1. Из него видно, что влияние поперечного МП приводит к уплотнению газоразрядной плазмы в локальной области рядом с поверхностью трубки. При этом узловая зона претерпевает сдвиг с исходной позиции в месте пересечения осей на определенную дистанцию в сторону диэлектрической стенки.

Распределение ЗЧ по оси  $x$ , в направлении которой произошел сдвиг плазмы, при воздействии разных по силе МП приведено на рис. 2 ( $B_0 < B_1 < B_2$ ). При отсутствии МП наблюдается распределение  $n(x)$  симметричной формы. При наличии

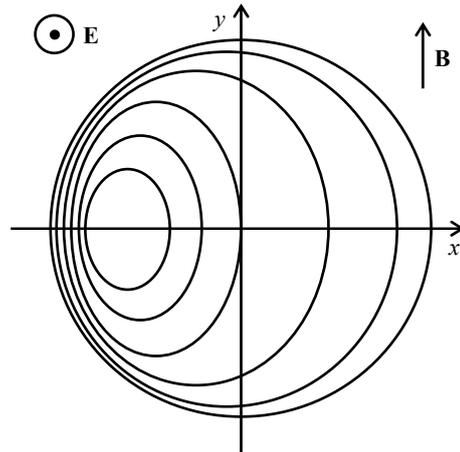


Рис. 1

МП наибольшее значение  $n$  смещается от центра к стенке, при этом направление дрейфа определяется ориентацией ЭП и МП. По условию баланса частиц в ПС электрического разряда площадь под кривыми должна остаться постоянной.

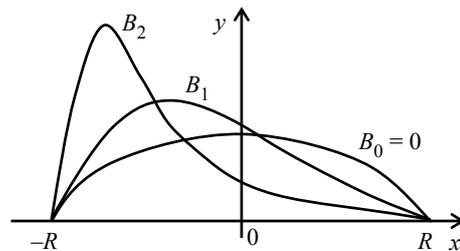


Рис. 2

Режим объемной рекомбинации (ОР) характерен для случая, когда уровень давления рабочего газа составляет не менее 10 торр. В процессе ОР электроны, появившиеся в узловой зоне системы, не способны долететь до поверхности трубки. Данное явление вызывает компрессионную деформацию ПС. Выражение, описывающее равновесное состояние для концентраций ЗЧ, в рассматриваемой ситуации принимает следующую форму:

$$\text{div}(nV) = z_i n - \alpha_{\text{рек}} n^2, \quad (17)$$

где  $\alpha_{\text{рек}}$  – коэффициент ОР.

Если рассматриваемая система не подвергается влиянию внешних сил, то для поиска решения выражения (17) можно воспользоваться величиной  $\vartheta = (\alpha_{\text{рек}}/z_i)n(0)$ . Когда  $\vartheta < 1$ , решением уравнения служит степенной ряд, а распределение ЗЧ по радиусу фактически имеет вид  $J_0(2.405(r/R))$ , т. е. как и в ситуации, когда влияние ОР не рассматривалось. Когда  $\vartheta > 1$ , решение уравнения не может быть получено, но можно

утверждать, что с точки зрения физики распределение ЗЧ будет «П-образным» в большей части сечения ПС электрического разряда (особенно при  $\vartheta \gg 1$ ),  $n(r) \approx z_i/\alpha_{\text{рек}} = \text{const}$ . Только вблизи стенок в области толщиной порядка  $\sqrt{z_i/D_a}$  концентрация носителей заряда меняется от  $z_i/\alpha_{\text{рек}}$  до нуля.

Оценим  $\vartheta$  для молекулярного лазера на газе  $\text{CO}_2$  со следующими параметрами:  $p = 8 \dots 13$  торр;  $n_e = 10^{16} \dots 10^{18} \text{ м}^{-3}$ ;  $z_i = 1 \text{ м}^{-1}$ ;  $\alpha_{\text{рек}} = 10^{-14} \dots 10^{-15} \text{ м}^3/\text{с}$ . Тогда  $\vartheta \approx 10$ . Таким образом, в грубом приближении распределение ЗЧ по радиусу достаточно близко к  $J_0(2.405(r/R))$ , т. е. можно не учитывать эффект ОР.

Очевидно, что под воздействием поперечного МП на ПС электрического разряда, протекающего в ГЛ, распределение ЗЧ по радиусу определяется выражением (16). Оно может использоваться для примерного расчета характеристик газовых лазеров, если давление рабочей смеси ненамного больше 10 торр.

На основе проведенного анализа распределения ЗЧ, можем определить отклонение  $x_m$ , при котором плотность частиц имеет наибольшее значение. Концентрация ЗЧ из выражения (16) может быть записана как

$$n_x = n_0(B) \exp\left(-\frac{b}{2D_a} x\right) J_0\left(2.405 \frac{x}{R}\right),$$

где  $n_0(B)$  – концентрация ЗЧ при  $r = 0$ . Для определенного значения индукции МП можно считать, что  $n_0(B) = \text{const}$ . Наибольшее значение  $n_x$  достигается в случае положительного экстремума функции

$$f(x) = \exp\left(-\frac{b x}{2D_a}\right) J_0\left(2.405 \frac{x}{R}\right).$$

Вместо выражения  $J_0(2.405(r/R))$  без существенной потери точности может использоваться запись вида  $1 - (x^2/R^2)$ . Рассматривая  $f(x)$ , можно сказать, что наибольшее значение достигается при

$$x = x_m = \frac{2D_a}{b} - \sqrt{\frac{4D_a^2}{b^2} + R^2}.$$

Величина  $x_m$  имеет отрицательный знак (см. рис. 1, 2), так как плазма электрического разряда смещается в сторону отрицательной части оси  $x$ .

Проведем расчет  $x_m$  для разряда в газе  $\text{CO}_2$  ( $\mu_{e0} = 30 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{торр})$ ,  $\mu_{i0} = 0.07 \text{ м}^2/(\text{В} \cdot \text{с} \cdot \text{торр})$ ,  $E = 1.7 \cdot 10^4 \text{ В/м}$ ,  $T_e = 3 \cdot 10^4 \text{ К}$ ,  $R = 10^{-2} \text{ м}$ ). Зависимость  $x_m = f(B)$  при различных давлениях газа приведена на рис. 3 (1 –  $p = 10$  торр; 2 – 18 торр).

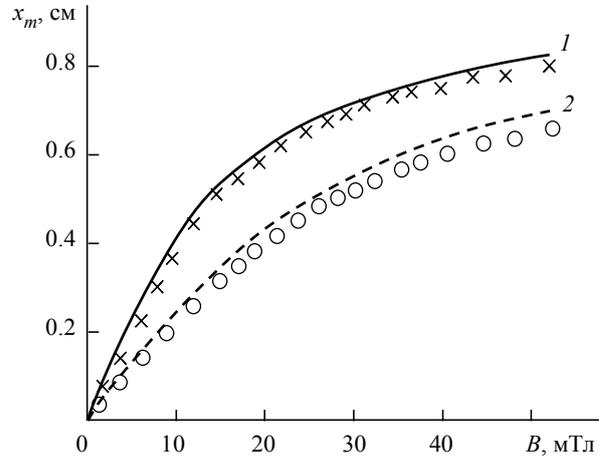


Рис. 3

Рисунок демонстрирует, что с увеличением давления газовой смеси при неизменном сдвиге плазмы требуемое для смещения МП возрастает. Перепишем  $x_m$  в ином виде:

$$x_m = -\frac{R^2}{\frac{2D_a}{b} - \sqrt{\frac{4D_a^2}{b^2} + R^2}}.$$

Исходя из  $D_a = (kT_e/e) \mu_i$ ,  $b = \mu_e \mu_i EB$ , получим

$$x_m = -\frac{R^2}{\frac{2kT_e}{e\mu_e EB} - \sqrt{\left(\frac{2kT_e}{e\mu_e EB}\right)^2 + R^2}}.$$

Проведем экспериментальную проверку адекватности рассмотренной физико-математической модели. Принципиальная блок-схема установки для экспериментального изучения смещения максимума концентрации ЗЧ в плазме под воздействием внешнего МП представлена на рис. 4 (1 – разрядная трубка; 2 – вакуумная система; 3 – световод; 4 – схема усиления сигнала; 5 – осциллограф). Предполагается, что зона с наибольшим значением концентрации ЗЧ характеризуется самой высокой яркостью свечения за счет того, что в ней наблюдаются процессы активного возбуждения как атомов и молекул, так и ионов газовой смеси.

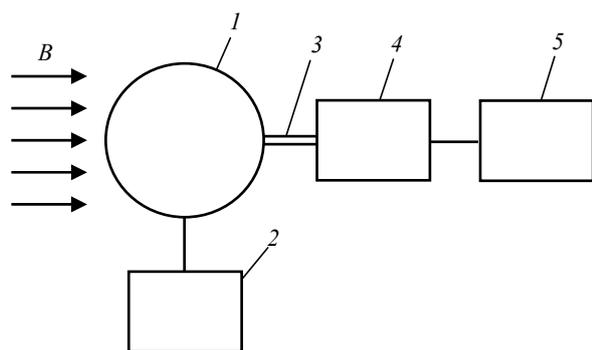


Рис. 4

Газоразрядный лазер располагается в поперечном МП и подключается к вакуумной установке, дающей возможность как откачивать из трубки, так и напускать в нее газовую смесь с заданным давлением [9], [10]. Для измерения распределения яркости свечения разряда использовался световод. Один его конец с помощью подвижки перемещался по вертикальной линии

трубки, другой был соединен со схемой усиления сигнала. Усиленный сигнал подается на измерительное устройство. При  $B = 0$  оптоволоконно направляется на узловую зону системы, соответствующую наибольшему сигналу на выходе измерительного устройства. При изменении индукции МП область, характеризующаяся самым ярким свечением, начинает перемещаться по вертикальной оси. Сдвигая оптоволоконно вверх или вниз до момента, когда на выходе измерительного устройства фиксируется наибольшее значение сигнала, можно зафиксировать позицию, определяющую сдвиг максимума плотности ЗЧ с исходной точки. Полученные в результате экспериментов функции сдвига наибольшего значения концентрации ЗЧ при изменении индукции МП для различных давлений приведены на рис. 3 ( $x - p = 10$  торр;  $o - 18$  торр). Расхождение результатов расчета и измерения составляет менее 5 %.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Вводный том из 4 кн. / под ред. В. Е. Фортова. М.: Наука, 2000.
2. Физика плазмы: в 2 т. Т. 1: Основы физики плазмы / под ред. А. А. Галева и Р. Судана. М.: Энергоатомиздат, 1983.
3. Райзер Ю. П. Физика газового разряда. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2009.
4. Шаймарданов Р. Лазер  $\text{CO}_2$ : гибкое, надежное и испытанное средство // Фотоника. 2011. Т. 29, № 5. С. 16–19.
5. Айрапетян В. С., Ушаков О. К. Физика лазеров. Новосибирск: Изд-во СГГА, 2012.
6. Кудрявцева Н. А., Пантелеев А. В. Моделирование динамики двухкомпонентной плазмы с учетом столкновений между заряженными частицами в случае плоского зонда // Вестн. МАИ. Прикладная математика, механика, физика. 2009. Т. 16, № 2. С. 114–120.
7. Ульянов Д. К., Ульянов К. Н. Диффузионный положительный столб электрического разряда в поперечном магнитном поле // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37, № 5. С. 15–23.
8. Кудрявцев А. А. Физика тлеющего разряда. СПб.: Лань, 2010.
9. Марцынюков С. А., Кострин Д. К. Моделирование, разработка и исследование электромагнитной системы для управления мощностью лазера на углекислом газе // Изв. вузов России. Радиоэлектроника. 2014. № 1. С. 50–54.
10. Хирургический  $\text{CO}_2$ -лазер с электромагнитной системой управления мощностью / С. А. Марцынюков, Д. К. Кострин, В. В. Черниговский, А. А. Лисенков // Медицинская техника. 2018. № 2. С. 4–6.

S. A. Martsinukov, D. K. Kostrin  
Saint Petersburg Electrotechnical University

## PHYSICAL AND MATHEMATICAL MODEL OF THE DISTRIBUTION OF CHARGED PLASMA PARTICLES OF A POSITIVE GAS DISCHARGE COLUMN IN A TRANSVERSE MAGNETIC FIELD

*If the active medium of a gas-discharge laser is placed in a transverse magnetic field, the electron distribution of the low-temperature plasma will change, which leads to a change in the output characteristic of the laser. This paper presents an analysis of the distribution of charged particles in the radial direction under the influence of a transverse magnetic field. Calculations in accordance with the physical and mathematical model show that the influence of the transverse magnetic field leads to the compression of the plasma to one side of the tube, the central region of the plasma is shifted from the center of coordinates by a certain distance. An experimental verification of the adequacy of the considered physical and mathematical model was carried out by placing the laser discharge tube in a transverse magnetic field. The use of a vacuum system makes it possible to fill the laser volume with different gases at different pressures in the tube. It is assumed that the region of the maximum concentration of charged particles corresponds to the highest brightness of the glow discharge region, where the gas is most intensively excited. The discrepancy between the calculation results for the considered model and the experimental data is less than 5 %.*

**Gas-discharge laser, low-temperature plasma, transverse magnetic field, charged particles, positive column, physical and mathematical model**