

УДК 304.444

В. Гарате Гонзалес

Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Применение сетей Петри, цепей Маркова и теории массового обслуживания при математическом моделировании дискретных систем

Исследуются сети Петри, цепи Маркова и теория массового обслуживания с целью построения имитационных моделей из концептуальных моделей компьютерных сетевых решений. Сопоставляются слот и задача строительных блоков с соответствующими элементами на изучаемых языках математического моделирования. Было установлено, что сетевые компьютерные решения могут быть охарактеризованы как системы с дискретными событиями, которые обладают хорошо отработанными методами моделирования. Большинство технических систем, телекоммуникационные системы, вычислительные системы и сети описываются в терминах дискретных случайных процессов с использованием вероятностных методов. Широкое применение находят математические модели, отражающие структурно-функциональную организацию исследуемых систем, построенные на основе моделей теории массового обслуживания, анализ которых может проводиться аналитическими, численными и статистическими методами. Примерами случайных процессов могут служить процессы поступления и передачи данных в телекоммуникационной сети, в беспроводной компьютерной сети, процессы выполнения задач и обмена данными с внешними устройствами в вычислительной системе и т. п. Модель обычно включает в себя те аспекты системы, которые представляют интерес или нуждаются в исследовании.

Концептуальная модель, дискретные события, моделирование, симуляция, сетевые компьютерные решения

Бизнес-процессам часто требуется множество приложений, работающих вместе, чтобы выполнять свои услуги. Включение новых услуг в сетевую инфраструктуру компании является сложной задачей. При этом существуют проблемы проектирования, внедрения и администрирования в отношении безопасности при использовании данной технологии.

Разработка интеграционного сетевого решения состоит из этапов проектирования, внедрения, исполнения и мониторинга. Чтобы облегчить понимание структуры и работы интеграционного сетевого решения, создаются концептуальные математические модели, которые представляют его на этапе проектирования [1]. Существует ряд технологий для построения этих моделей на основе системы обмена сообщениями, которые подходят для гетерогенных систем и идеально подходят для сред, требующих гибкости. Эти технологии также позволяют создавать концептуальные модели с высоким уровнем абстракции, используя простой для понимания графический интерфейс. Из технологий с открытым исходным

кодом можно выделить: Spring Integration, Apache Camel, Mule ESB и т. д. Каждая из них предлагает предметно-ориентированный язык (DSL) для разработки концептуальных моделей, в которых более крупные процессы делятся на более мелкие независимые службы (фильтры), обычно десинхронизируемые по каналам.

Реализация решений для построения информационной сети может быть дорогостоящим и длительным процессом, что стимулировало исследования, использующие подходы моделирования для проработки решений. При разработке сетевого информационного решения важно удовлетворить все требования системы, в которую оно будет включено, иначе решение рискует стать уязвимым в вопросах производительности.

Моделирование концептуальных моделей позволяет идентифицировать условия, при которых компьютерное сетевое решение может потерпеть неудачу, еще находясь на этапе проектирования, тем самым снижая риски и затраты, связанные с его построением.

Понятие моделирования относится к точному представлению всех характеристик, присутствующих в реальной системе. Моделирование является важным инструментом проектировщиков, позволяющим при решении очень сложных проблем заменить реальные эксперименты, которые могут быть дорогостоящими. Кроме того, это позволяет лучше понять реальную систему и ее эволюцию во времени.

Основная цель описываемого исследования – сделать шаг вперед в моделировании решений для интеграции корпоративных компьютерных приложений.

Кратко опишем концептуальные модели этого исследования: сети Петри, цепи Маркова и теория массового обслуживания. Каждая из них подходит для конкретных типов задач на основе данного подхода и переменных, которые будут проанализированы.

Сети Петри используются для моделирования систем с дискретными событиями, что позволяет проводить совместный анализ поведения и структуры этих систем, улучшая их понимание. Сети Петри – это графы, образованные двумя типами узлов: места, соединенные дугами, которые представляют переменные состояний системы и представлены кружками; и переходы, которые представляют действия, выполненные системой и представленные прямоугольниками [2].

Сети Петри позволяют описать только логическую структуру систем, поскольку не учитывают время. Однако время важно учитывать при функционировании большинства систем, что требует его рассмотрения в представлении системы.

В кругах, представляющих место в сети Петри, могут быть индикаторы потока, называемые токенами, количество которых варьируется в зависимости от функционирования сети. Когда переход активирован, он использует определенное количество токенов, содержащихся во входных местах, генерируя выходные места. Выполнение сети Петри происходит только посредством запуска переходов лишь в том случае, если количество токенов, потребляемых переходом, равно значению веса, заданному входной дугой. Иногда более одного перехода могут быть готовы к триггеру. Когда это происходит, сеть Петри не определяет, кто будет стрелять первым, другими словами, не существует правила приоритета стрельбы.

Хотя сети Петри широко используются в контексте моделирования и симуляции систем с дискретными событиями, все еще недостаточно ин-

формации об их использовании в компьютерных сетях. Стохастический процесс рассматривается как процесс с определенным уровнем неопределенности, представляющий эволюцию системы случайных величин как функцию времени.

Цепи Маркова представляют собой системное математическое моделирование, описывающее системы как стохастический процесс с дискретными состояниями, характеризуя их своими состояниями и тем, как они чередуются. Обычно время является параметром, дискретным или непрерывным, где будущее состояние в цепи Маркова зависит не от прошлых состояний, а только от текущего состояния [3].

Они используются потому, что помимо простоты позволяют анализировать производительность различных реализаций с помощью методов моделирования. Цепи Маркова в дискретном времени представляют собой стохастические процессы, описывающие действия, заканчивающиеся событиями, которые генерируют переходы состояний. Вероятности переходов из одного состояния в другое образуют матрицу, называемую матрицей переходов. Марковская цепь представлена конечным автоматом, последовательностью случайных величин, которая представляет состояние в данный момент времени.

Выполнение цепей Маркова с дискретным временем – это траектории, вычисление вероятностей которых позволяет анализировать поведение, вероятностную доступность, количественные и качественные свойства.

Цепи Маркова подходят для описываемого исследования, поскольку имеют дело с частными случаями стохастических процессов и используются для дискретных событий, позволяя идентифицировать и анализировать возможные узкие места производительности во время моделирования системы. Процесс инициируется, когда в очереди есть сообщение. Таким образом, при моделировании с дискретными событиями переменные могут быть приравнены в модели, состояния которой меняются в дискретные моменты времени.

События генерируют переходы состояний, представленные матрицей переходов. Такой тип вероятностной модели имеет широкую поддержку в виде программных инструментов, которые помогают в предложении моделировать интеграционные решения с точки зрения формальной проверки модели и анализа производительности.

Теория массового обслуживания – это аналитический метод, который использует математические уравнения для понимания системных проблем и нацелен на определение и оценку показателей, которые выражают производительность или функциональность системы. Система очередей может быть представлена разными моделями, но базовый процесс имеет общие элементы. Процесс начинается с того, что клиенты ищут услугу и приходят случайным образом с течением времени, образуя очередь. В какой-то момент один из клиентов призван обслуживаться в соответствии с правилом, обозначенным в очереди дисциплины. Клиент обслуживается с использованием сервисного механизма и затем покидает систему очередей [4].

Спецификация модели очереди обычно требует, чтобы характеристики производительности были явными. Эти характеристики: процесс прибытия, процесс обслуживания, количество серверов, емкость очереди, размер популяции и дисциплина очереди. С помощью этих данных можно рассчитывать и оценивать результаты для производительности системы на основе таких свойств, как время обслуживания и количество клиентов, обслуживаемых в данный период времени. Получая неадекватные значения, можно сделать систему очередей более эффективной, избегая проблем с производительностью.

Функциональная динамика сетевого решения аналогична динамике, принятой в теории массового обслуживания. Например, клиент может рассматриваться как сообщение, которое может ожидать в очереди (слоте) определенное количество времени для обработки службой (задачей). Поскольку характеристики отдельных компонентов сетевого решения известны, моделирование на основе дискретных событий является хорошей стратегией для получения количественных и качественных показателей системы.

Использование различных математических теорий основано на специфике каждой проблемы. В целом цепи Маркова, а точнее их процессы принятия решений, не рекомендуются для больших систем, так как их сложно построить, несмотря на более широкую применимость. Стохастические сети Петри не обладают явной структурой, как в теории массового обслуживания, но имеют графическую систему обозначений, а модели имеют формальную интерпретацию. Хотя теория массового обслуживания облегчает построение модели, она имеет существенные ограничения, в частности отсутствие формальной интерпретации [5].

Эти теории были выбраны в качестве объектов изучения из-за различных методов и инструментов, которыми они обладают для моделирования дискретных событий. При моделировании системы с дискретными событиями, как и в сетевых решениях, идентификация и связь с переменными производительности и способ их взаимодействия друг с другом и с другими элементами помогают понять систему.

Рис. 1 иллюстрирует: *а* – сети Петри; *б* – цепи Маркова; *в* – теорию массового обслуживания. Предложение по переводу концептуальных моделей сетевых решений в модели сетей Петри, цепей Маркова и теории массового обслуживания возможно благодаря аналогии между их компонентами и сходству с моделью исполнения. Основными элементами концептуальных моделей сети Петри являются токены, места и переходы, которые, соответственно, эквивалентны процессам и шагам в цепях Маркова; клиентам, очередям и услугам в теории очередей.

Цепь Маркова с дискретным временем является концептуальной моделью системы как дискретного множества состояний, где переходы между состояниями происходят в дискретные интервалы времени. В графическом обозначении состояния – это круги, а переходы – стрелки, помеченные соответ-

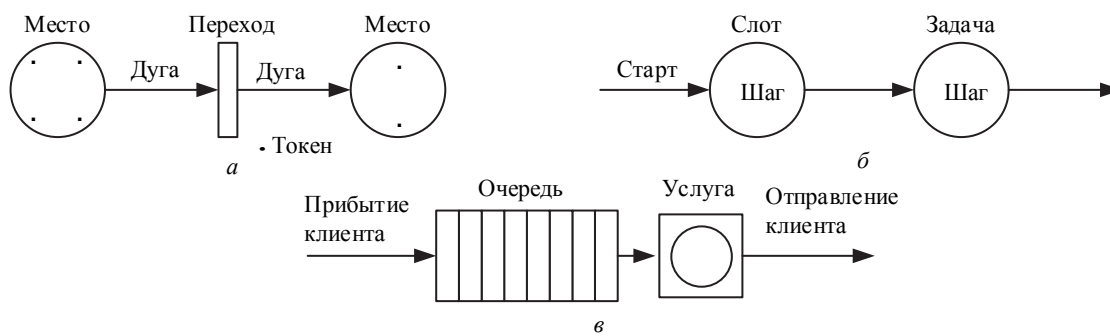


Рис. 1

ствующими им вероятностями. Атомные предложения, используемые для обозначения состояний, получены из множества атомарных предложений. В цепях Маркова этот процесс начинается, когда запросы приходят и ждут в системе.

В теории массового обслуживания клиенты приходят, формируют очередь и ждут обслуживания в заданное время. После обслуживания клиент покидает систему очередью. Услуга предоставляется в соответствии с правилом, называемым дисциплиной очереди, которая может быть, среди прочего: «первым пришел – первым вышел» (FIFO); «последним пришел – первым вышел» (LIFO). В сетях Петри формальное представление для имитационной модели выражается последовательностью $MdS = (S, T, A, TD)$, где S – множество мест, T – множество переходов и A – отображение дуг, которое подразделяется позже на подмножества A_e и A_s – последовательности, представляющие соответственно входные и выходные дуги. Набор TD представляет значения скоростей срабатывания перехода относительно порядка множества T .

Математическое моделирование цепи Маркова с дискретным временем формально описывается как конечное множество состояний (E), начальное состояние E_0 , принадлежащее E , матрица вероятности перехода (Q) $deE \times E \rightarrow [0-1]$, множество атомных предложений (AP) и функция маркировки, что приписывает состояниям множество атомных предложений $L: E \rightarrow 2^{AP}$. Формально, марковский процесс принятия решений представляет собой последовательность $(E, e_{init}, Passos, L)$, где E – конечное множество состояний; $e_{init} \in E$; e_0 – начальное состояние. Шаги $E \rightarrow 2^{Act \times Dist(E)}$ являются функцией вероятности перехода. Act – это множество действий, $Dist(E)$ – множество дискретных распределений вероятностей по E и $L: E \rightarrow 2^{AP}$ – маркировка с атомарными предложениями.

В теории массового обслуживания некоторые случайные величины для оценки поведения имитационной модели получают с помощью простых математических уравнений [6]. Учитывая, что λ – это средняя скорость поступления, а μ – средняя скорость обслуживания, можно определить, например, среднее количество запросов в системе (S_n), среднее время, в течение которого сообщение остается в системе (I_p), средний интервал между поступлениями (A_r), среднее время, потерянное сообщение в слоте (T_q), среднее ко-

личество сообщений в слоте (N_q), среднее время обслуживания (S_t) и среднее количество обработанных запросов (N_3):

- среднее количество запросов в системе $S_n = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$;
- среднее время пребывания запросов в системе $I_p = \frac{1}{\mu - \lambda}$;
- средний интервал между поступлениями $A_r = \frac{1}{\lambda}$;
- среднее время, потерянный запрос в слоте $T_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$;
- среднее количество запросов в слоте $N_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$;
- среднее время обслуживания $S_t = \frac{1}{\mu}$;
- среднее количество обработанных запросов $N_3 = \frac{\lambda}{\mu}$.

При работе с процессом с некоторым уровнем неопределенности и без конкретизации в отношении распределения вероятности поступающих запросов в интеграционном решении необходимо указать одно из ряда вероятностных распределений для этой задачи. Одним из примеров является отрицательное экспоненциальное распределение, в котором вероятность перехода x запуска в этот момент, учитывая его интенсивность λ_i :

$$F_{xi}(x) = 1 - e^{-\lambda_i x}.$$

Рассмотрим пример марковского процесса с дискретным временем.

На рис. 2 показана система, состоящая из двух узлов Y_1 и Y_2 , каждый из которых может находиться в одном из двух состояний: **0** – выключено и **1** – включено. В определенные моменты времени узлы могут включаться или выключаться.

Для однородного марковского процесса с дискретным временем вероятности состояний на момент времени t_k

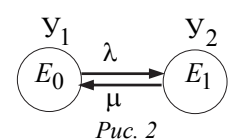


Рис. 2

определяются на основе следующего рекуррентного выражения:

$$p_j(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k-1)q_{ij}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где q_{ij} – матрица вероятности перехода, при $k \rightarrow \infty$ вероятности состояний $p_i(k)$ стремятся к стационарным значениям p_i , не зависящим от момента времени t_k и начальных вероятностей $p_i(0)$. С учетом этого выражение (1) может быть преобразовано к виду

$$p_j = \sum_{i=1}^n p_i q_{ij}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2)$$

а нормировочное условие примет вид

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (3)$$

Уравнения (2) с условием (3) образуют систему линейных алгебраических уравнений для расчета стационарных вероятностей состояний марковского процесса.

Выделим возможные состояния системы:

E_i	E_0	E_1	E_2	E_3	
y_1	0	1	0	1	.
y_2	0	0	1	1	

Состояние E_0 соответствует простою системе, когда оба узла выключены, а состояние E_3 – случаю, когда оба узла включены.

Положим, что заданы вероятности переходов в виде матрицы

E_i	E_0	E_1	E_2	E_3
E_0	0	0.4	0.3	0.3
$Q = E_1$	0.4	0	0.2	0.4
E_2	0.5	0	0	0.5
E_3	0	0.4	0.6	0

начальные вероятности $p_0(0) = 0,7$; $p_1(0) = 0,3$; $p_2(0) = 0$; $p_3(0) = 0$.

Определим вероятности нахождения системы в том или ином состоянии на различные моменты времени.

Согласно выражению (1) вероятности состояний системы:

– на момент времени t_1 :

$$\begin{aligned} p_0(1) &= p_0(0)q_{00} + p_1(0)q_{10} + p_2(0)q_{20} + p_3(0)q_{30} = \\ &= (0.7)(0) + (0.3)(0.4) + (0)(0.5) + (0)(0) = 0.12; \\ p_1(1) &= p_0(0)q_{01} + p_1(0)q_{11} + p_2(0)q_{21} + p_3(0)q_{31} = \\ &= (0.7)(0.4) + (0.3)(0) + (0)(0) + (0)(0.4) = 0.28; \\ p_2(1) &= p_0(0)q_{02} + p_1(0)q_{12} + p_2(0)q_{22} + p_3(0)q_{32} = \\ &= (0.7)(0.3) + (0.3)(0.2) + (0)(0) + (0)(0.6) = 0.27; \\ p_3(1) &= p_0(0)q_{03} + p_1(0)q_{13} + p_2(0)q_{23} + p_3(0)q_{33} = \\ &= (0.7)(0.3) + (0.3)(0.4) + (0)(0.5) + (0)(0) = 0.33; \end{aligned}$$

– на момент времени t_2 :

$$\begin{aligned} p_0(2) &= p_0(1)q_{00} + p_1(1)q_{10} + p_2(1)q_{20} + p_3(1)q_{30} = \\ &= (0.12)(0) + (0.28)(0.4) + (0)(0.5) + (0)(0) = 0.247; \\ p_1(2) &= p_0(1)q_{01} + p_1(1)q_{11} + p_2(1)q_{21} + p_3(1)q_{31} = \\ &= (0.12)(0.4) + (0.28)(0) + (0.27)(0) + \\ &\quad + (0.33)(0.4) = 0.18; \\ p_2(2) &= p_0(1)q_{02} + p_1(1)q_{12} + p_2(1)q_{22} + p_3(1)q_{32} = \\ &= (0.12)(0.3) + (0.28)(0.2) + (0.27)(0) + \\ &\quad + (0.33)(0.6) = 0.29; \\ p_3(2) &= p_0(1)q_{03} + p_1(1)q_{13} + p_2(1)q_{23} + p_3(1)q_{33} = \\ &= (0.12)(0.3) + (0.28)(0.4) + (0.27)(0.5) + \\ &\quad + (0.33)(0) = 0.283. \end{aligned}$$

Аналогично вероятности состояний системы могут быть рассчитаны на моменты времени $t_3, t_4, \dots$.

Нетрудно убедиться, что сумма вероятностей состояний системы на каждый момент времени равна единице: $p_0(k) + p_1(k) + p_2(k) + p_3(k) = 1$ для $k = 1, 2, \dots$.

Вероятности состояний системы для стационарного режима (стационарные вероятности) p_0, p_1, p_2, p_3 могут быть найдены из системы линейных алгебраических уравнений (2) с учетом нормировочного условия (3):

$$\begin{aligned} p_0(1) &= p_0(0)q_{00} + p_1(0)q_{10} + p_2(0)q_{20} + \\ &\quad + p_3(0)q_{30} = 0.4 p_1 + 0.5 p_2; \\ p_1(1) &= p_0(0)q_{01} + p_1(0)q_{11} + p_2(0)q_{21} + \\ &\quad + p_3(0)q_{31} = 0.4 p_0 + 0.4 p_3; \\ p_2(1) &= p_0(0)q_{02} + p_1(0)q_{12} + \\ &\quad + p_2(0)q_{22} + p_3(0)q_{32} = 0.3 p_0 + 0.2 p_1 + 0.6 p_3; \\ p_3(1) &= p_0(0)q_{03} + p_1(0)q_{13} + p_2(0)q_{23} + \\ &\quad + p_3(0)q_{33} = 0.3 p_0 + 0.4 p_1 + 0.5 p_2; \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 &= 1. \end{aligned}$$

Решая систему уравнений, получим значения стационарных вероятностей: $p_0 \approx 0.193$, $p_1 \approx 0.177$, $p_2 \approx 0.243$, $p_3 \approx 0.387$.

Выводы:

– система будет простаивать 19.3 % времени;

– более 80 % времени система будет находиться в рабочем состоянии;

– почти 40 % времени (точнее, 38.7 %) во включенном состоянии будут одновременно находиться оба узла системы;

– среднее число узлов, находящихся одновременно во включенном состоянии, будет равно: $M = p_1 + p_2 + 2p_3 = 1.194$.

В данной статье в качестве объектов исследования представлены 3 подхода: сети Петри, цепи Маркова и теория массового обслуживания. Каждая математическая модель имеет свои преимущества и недостатки, в зависимости от задач, поставленных перед проектировщиком, и требований к системе, он может использовать различные математические модели для разработки конкретной системы.

Выбор метода моделирования зависит от многих факторов, в том числе от целей моделирования, сложности исследуемой системы, требований к номенклатуре исследуемых характеристик, требований к точности получаемых результатов и т. д. При исследовании и проектировании технических систем, таких, как вычислительные системы и сети, наиболее эффективным оказывается использование комбинированного подхода, предполагающего совместное применение аналитических и имитационных методов, что позволяет во многих случаях гарантировать достоверность получаемых результатов. В ходе описанных исследований стало ясно, что компьютерное сетевое решение все еще требует значительных исследований, в основном в области моделирования интеграционных решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lean production system model with Petri nets to support for decision making / A. M. Varela, J. A. R. Ramírez, L. H. H. Gómez, A. M. González, M. Y. J. Reyes // *Ingeniare. Revista Chilena de Ingeniería*. 2015. № 23(2). P. 182–195.

2. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем / пер. с англ. М.: Мир, 1984. 264 с.

3. Brémaud P. Markov chains: gibbs fields, monte carlo simulation, and queues. New York: Springer, 1999. 444 p.

4. Kendall D. G. Stochastic processes occurring in the theory of queues and their analysis by the method of the imbedded Markov chain // *The Annals of Mathematical Statistics*. 1953. № 24(3). P. 338–354.

5. Hillier F. S., Lieberman G. J. Introducción a la investigación de operaciones. México: McGrawHill, 2010.

6. Алиев Т. И. Основы моделирования дискретных систем. СПб.: Изд-во СПбГУ ИТМО, 2009. 363 с.

W. Garate Gonzales

Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

APPROACH OF PETRI NETS, MARKOV CHAINS AND THE QUEUEING THEORY AS LANGUAGES OF MATHEMATICAL MODELING AT THE SIMULATION OF DISCRETE SYSTEMS

Is dedicated to the study of Petri nets, Markov chains and queueing theory in order to build simulation mathematical models from conceptual models of computer network solutions. A slot and a task of building blocks are compared with the corresponding elements in the studied languages of mathematical modeling. It was found that network computer solutions can be characterized as systems with discrete events that have well-established modeling techniques. Most technical systems, telecommunication systems, computing systems and networks, are described in terms of discrete random processes using probabilistic methods. Mathematical models reflecting the structural and functional organization of the systems under study, built on the basis of queueing theory models, are widely used and can be analyzed by analytical, numerical, and statistical mathematical methods. Examples of random processes include data entry and transfer in a telecommunications network, in a wireless computer network, tasks and data exchange processes with external devices in a computing system, etc. The model usually includes those aspects of the system that are of interest or need to be studied.

Conceptual model, discrete events, modeling, simulation, network computer solutions