

**Методология и проблематика экспертного оценивания.
Часть 2. Обработка несогласованных матриц парных сравнений
с применением векторной модели экспертной компетентности***

Е. А. Бурков[✉], П. И. Падерно

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

[✉] eaburkov@gmail.com

Аннотация. Проведен анализ задачи оценивания экспертом значений весовых коэффициентов, отражающих сравнительную важность атрибутов объекта экспертизы. Отличительная особенность задачи заключается в том, что эксперт имеет неоднородную компетентность по набору сравниваемых атрибутов, что требует использования векторной модели экспертной компетентности. Экспертное мнение представлено в виде матрицы парных сравнений, сформированной по итогам сравнительного анализа набора атрибутов объекта экспертизы путем их попарного сравнения с применением шкалы отношений, используемой в методе Саати. Предложен ряд способов получения вектора средневзвешенной сравнительной важности атрибутов, ориентированных на возможность последующего комплексирования мнений различных экспертов как внутри одной группы, так и между различными группами. Предложенные способы позволяют повысить внутреннюю согласованность матрицы парных сравнений и базируются на операции ее идеализации, порождающей набор идеальных обратно симметричных матриц, и методах адамаровой и аддитивной свертки носителей экспертной информации.

Ключевые слова: векторная компетентность, идеальная матрица, комплексирование, метод анализа иерархий, парные сравнения, собственный вектор, согласованность, экспертные оценки

Для цитирования: Бурков Е. А., Падерно П. И. Методология и проблематика экспертного оценивания. Часть 2. Обработка несогласованных матриц парных сравнений с применением векторной модели экспертной компетентности // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2026. Т. 19, № 4. С. 88–97. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-4-88-97.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

**Methodology and Problems of Expert Assessment.
Part 2. Processing Inconsistent Pairwise Comparison Matrices
Using the Vector Model of Expert Competence**

E. A. Burkov[✉], P. I. Paderno

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

[✉] eaburkov@gmail.com

Abstract. The analysis of the problem of an expert's assessment of the values of weighting coefficients reflecting the comparative importance of the attributes of the object of expertise is carried out. A distinctive feature of the task is that the expert has heterogeneous competence in the set of attributes being compared, which requires the use of a vector model of expert competence. The expert opinion is presented in the form of a pairwise comparison matrix, constructed as a result of a comparative analysis of the set of attributes of the object

* Продолжение. Начало в Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ», № 2. 2026.

of expertise by comparing them in pairs using a scale of relations, used in the Saaty method. A number of ways are proposed to obtain a vector of the weighted average comparative importance of attributes, focused on the possibility of subsequent integration of the opinions of various experts both within one group and between different groups. The proposed methods make it possible to increase the internal consistency of the pairwise comparison matrix and are based on the operation of its idealization, which generates a set of ideal inversely symmetric matrices, and methods of Hadamard and additive convolution of expert information carriers.

Keywords: vector competence, ideal matrix, aggregation, analytical hierarchy process, pair comparisons, eigenvector, consistency, expert assessments

For citation: Burkov E. A., Paderno P. I. Methodology and Problems of Expert Assessment. Part 2. Processing Inconsistent Pairwise Comparison Matrices Using the Vector Model of Expert Competence // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2026. Vol. 19, no. 4. P. 88–97. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-4-88-97.

Conflict of interests. The authors declare no conflicts of interests.

Введение. В области системного анализа и принятия решений одной из ключевых стала задача многокритериального выбора, которую можно представить в виде упорядочивания по предпочтительности множества альтернатив. Возможность полной формализации или, иначе говоря, строгой математической постановки подобной задачи определяется предметной областью, характером сравниваемых альтернатив и конечной целью требуемого выбора.

Основными причинами или факторами, препятствующими формализации задачи многокритериального выбора, принято считать (помимо самой многокритериальности), например неоднозначность или нечеткость критериев (целевых функций, если использовать терминологию исследования операций) и неполноту входных данных [1]–[3]. Наличие указанных факторов вынуждает отказаться от построения строгой математической модели и использовать для решения задачи многокритериального выбора альтернативные подходы, в частности применять экспертные методы, базирующиеся на знаниях и опыте специалистов, компетентных в области постановки задачи.

Несмотря на немалое количество как достаточно современных [4], [5], так и выдержавших испытание временем [6]–[8] фундаментальных исследований, посвященных вопросам и проблемам подготовки и проведения различных экспертиз, а также процедурам и способам получения и обработки экспертной информации, контроль и анализ индивидуальных особенностей самих экспертов не так часто попадает в поле зрения исследователей. Это обусловлено целым рядом предпосылок: сложностью этого вопроса; отсутствием объективных и надежных методов его решения; необходимостью проведения экспертизы внутри экспертизы, чтобы оценить самих экспертов, и т. п.

Тем не менее, в рамках методологии экспертного оценивания существует подход, который предлагает рассматривать в качестве индивидуальных особенностей экспертов различие в их уровне квалификации или компетентности, что может быть формально отражено в виде скалярных показателей, присваиваемых экспертам по итогам некоторой оценочной процедуры и отражающих уровень их профессиональных знаний и опыта в определенной области. Более сложный подход предлагает при проведении многофакторной комплексной экспертизы считать компетентность каждого эксперта неоднородной и зависимой от конкретных факторов или аспектов предметной области. Например, если в качестве объекта экспертизы (ОЭ) выступает разрабатываемая информационно-управляющая система, в роли факторов могут выступать отдельные особенности разрабатываемой системы в различных условиях или режимах ее будущей эксплуатации. В этом случае показатели экспертной компетентности будут иметь векторную или даже матричную, но никак не скалярную форму, что существенно усложняет не только саму модель экспертной компетентности хотя бы в плане численной идентификации ее компонентов, но и использование этой модели на этапе комплексирования мнений отдельных экспертов или сепаратных экспертных групп.

Даже предполагая возможность применения некоторой методики самооценки компетентности [9] для выполнения численной идентификации компонентов векторной или матричной модели компетентности эксперта, проводящего анализ и сравнение отдельных свойств ОЭ, следует отметить, что формализованный метод обработки матрицы парных сравнений (МПС) с последующим построением комплексной оценки ОЭ конкретным экспертом (т. е. метод сворачивания или усреднения полученных от эксперта частных

оценок отдельных атрибутов ОЭ с использованием коэффициентов компетентности эксперта по этим атрибутам), который учитывал бы результаты самооценки экспертной компетентности, авторам данной работы не известен. Кроме того, наличие информации о неоднородной компетентности эксперта открывает возможность использования этой информации при анализе внутренней согласованности его оценок, выставленных ОЭ по различным атрибутам, однако пока еще не был предложен метод проверки согласованности МПС, реализующий эту концепцию. Таким образом, можно считать целесообразной разработку методов, которые бы позволили решать указанные задачи, возникающие в процессе обработки экспертных оценок.

Постановка задачи экспертного анализа. Рассмотрим экспертизу, основная цель которой заключается в численной идентификации сравнительной важности атрибутов ОЭ, т. е. требуется определить значения весовых коэффициентов, отражающих относительную важность отдельных атрибутов (свойств, характеристик и пр.) ОЭ. Для решения данной задачи целесообразно использовать метод анализа иерархий (метод Саати) [10]–[12], который, во-первых, позволяет переводить из вербальной формы в числовую суждения эксперта о степени предпочтительности по важности одного перед другим атрибутов ОЭ; во-вторых, представлять набор подобных экспертных суждений обо всех возможных парах атрибутов ОЭ в виде квадратной обратно симметричной МПС:

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{n \times n}, \quad \forall i, j: \quad (1)$$
$$a_{ij} > 0, \quad a_{ji} = 1/a_{ij}, \quad a_{ii} = 1,$$

элементы a_{ij} которой отражают количественное предпочтение важности i -го атрибута объекта относительно j -го атрибута; в-третьих, предлагает строгий алгоритм численной идентификации коэффициентов сравнительной важности атрибутов ОЭ в результате специальной обработки МПС. Также метод Саати включает в себя процедуру проверки внутренней согласованности МПС, однако и данный метод, и другие известные подходы к анализу внутренней непротиворечивости суждений эксперта, представленных в форме МПС, в лучшем случае позволяют выявить наличие серьезных внутренних противоречий в его суждениях, но не выявить точную локализацию противоречий в МПС (иначе говоря, не позволяют определить наиболее конфликтующие друг с другом суждения эксперта) или целенаправленно устранить эти противоречия.

Хотя цель экспертизы, заключающаяся в численной идентификации сравнительной важности атрибутов ОЭ, потребует обработки и комплексирования мнений группы экспертов, в рамках данной работы все внимание будет уделено обработке МПС, отражающих мнение конкретного эксперта¹. Предположим, перед экспертом была поставлена задача сравнительного анализа атрибутов (свойств, аспектов и т. д.) C_1, C_2, \dots, C_n некоторого ОЭ. Эксперт формирует по итогу этого анализа набор суждений² о степени превосходства атрибутов друг над другом по уровню значимости для каждой возможной пары атрибутов, причем все суждения представлены в вербально-числовой шкале, используемой в методе Саати. Кроме того, полагая, что по всем атрибутам ОЭ эксперт имеет различный уровень их понимания и соответствующих знаний об ОЭ, от эксперта требуется провести дифференцированную численную самооценку своей компетентности, используя для этого методику, предложенную ему организаторами экспертизы³.

В результате опроса эксперта будет получена⁴ МПС (1), содержащая в скомпонованном виде все суждения эксперта о предпочтительности атрибутов ОЭ, и вектор экспертной компетентности $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in [0; 1]$, $i = \overline{1, n}$, элементы которого представляют собой коэффициенты компетентности эксперта по каждому из атрибутов ОЭ. Эти матрица и вектор поступают в распоряжение аналитика, отвечающего за обработку и анализ экспертной информации. В рамках рассматриваемой экспертизы основная задача аналитика состоит в численной идентификации коэф-

¹ Задача комплексирования мнений экспертной группы будет рассмотрена в следующей части статьи.

² Предполагается, что набор суждений эксперта обладает свойством порядковой транзитивности, т. е. эксперт имеет некоторое внутреннее и на порядковом уровне корректное представление о частичном упорядочивании множества анализируемых атрибутов ОЭ. При этом представление эксперта о предпочтительности атрибутов по критерию важности в процессе анализа может меняться, но не в очень широких пределах.

³ Либо же оценка компетентности эксперта проводится самими организаторами экспертизы.

⁴ Возможно, после предварительной обработки информации, полученной от эксперта, призванной привести ее к виду, требуемому для ее дальнейшей обработки. Такая предварительная обработка, в частности, может включать в себя перевод вербальных суждений эксперта в численный вид и формирование из них МПС, а также приведение частных оценок экспертной компетентности к единичной шкале.

фициентов сравнительной важности атрибутов ОЭ. При решении этой задачи аналитик должен использовать информацию о компетентности эксперта, в частности, на этапе предварительной проверки внутренней согласованности суждений эксперта (в основу такой проверки может быть положен критерий согласованности МПС, используемый в методе Саати). В зависимости от результата проверки аналитик понимает, что полученная от эксперта МПС либо является как минимум удовлетворительно согласованной⁵, либо имеет неудовлетворительный уровень внутренней согласованности.

В первом случае от аналитика требуется только выполнить корректную обработку МПС, чтобы получить на выходе требуемый вектор сравнительной важности атрибутов ОЭ. Во втором случае задача аналитика осложняется тем, что экспертная информация слишком противоречива, чтобы алгоритм метода Саати позволил получить достоверный результат при вычислении искомого вектора. Следовательно, сначала нужно каким-то образом повысить внутреннюю согласованность МПС, полученной от эксперта, и лишь затем выводить из нее вектор сравнительной важности атрибутов ОЭ.

Для повышения внутренней согласованности МПС требуется провести ее корректировку (изменение отдельных элементов) таким образом, чтобы данная матрица в требуемой степени удовлетворяла свойству численной транзитивности⁶. Самый очевидный вариант проведения такой корректировки – повторное обращение к эксперту, с тем чтобы он устранил противоречия в своих суждениях. К сожалению, эксперт не всегда хочет и может повторно выполнять свою работу, и для таких ситуаций необходима такая процедура корректировки МПС, которая обеспечила бы сглаживание внутренних противоречий, имеющихся в МПС, и при этом не требовала бы повторного опроса эксперта. Поэтому подобная процедура корректировки МПС будет далее предложена, но предварительно следует ввести некоторые понятия и определения.

Идеально согласованные МПС и методика их получения. В соответствии с [13], МПС \mathbf{A} идеально согласованна, если для всех ее элемен-

тов соблюдается свойство численной транзитивности, т. е. $\forall i, j, s = \overline{1, n}: a_{ij} = a_{is}a_{sj}$.

Идеализацией⁷ МПС \mathbf{A} по k -й строке называется операция $I_k^{\leftrightarrow}(\mathbf{A})$, которая пересчитывает элементы матрицы \mathbf{A} следующим образом: элементы k -й строки и k -го столбца матрицы остаются неизменными, а все остальные элементы пересчитываются по формуле $\tilde{a}_{kij} = a_{kj}/a_{ki}$, т. е. в результате идеализации матрицы \mathbf{A} по k -й строке будет получена матрица $\tilde{\mathbf{A}}_k = I_k^{\leftrightarrow}(\mathbf{A}) = \{ \tilde{a}_{kij} = a_{kj}/a_{ki} \}_{n \times n}$, которая идеально согласована, так как для всех ее элементов справедливо свойство численной транзитивности: $\forall k, i, j, s: \tilde{a}_{kij} = \tilde{a}_{kis} \tilde{a}_{ksj}$.

В [13] и [14] предложен использующий скалярную модель экспертной компетентности подход к решению задачи повышения внутренней согласованности МПС \mathbf{A} , построенной на основе взаимно противоречивых суждений эксперта. В рамках этого подхода сначала проводится многократная операция идеализации матрицы \mathbf{A} по каждой ее строке, в результате чего порождается набор идеально согласованных матриц $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n$ с соответствующими элементами $\tilde{\mathbf{A}}_k = \{ \tilde{a}_{kij} = a_{kj}/a_{ki} \}$, $k = \overline{1, n}$. Далее проводится комплексирование всех порожденных матриц по принципу, аналогичному принципу расчета среднего геометрического, путем их поэлементного (по Адамару) произведения и поэлементного же возведения в степень:

$$\mathbf{A}^* = (\tilde{\mathbf{A}}_1 \otimes \tilde{\mathbf{A}}_2 \otimes \dots \otimes \tilde{\mathbf{A}}_n)^{\otimes 1/n} = \{ a_{ij}^* \}_{n \times n},$$

$$\forall i, j, s: a_{ij}^* > 0, a_{ji}^* = 1/a_{ij}^*, a_{ii}^* = 1, a_{ij}^* = a_{is}^* \cdot a_{sj}^*.$$

Полученная матрица \mathbf{A}^* идеально согласована и при этом идентична исходной матрице \mathbf{A} с точки зрения отражения мнения эксперта о сравнительной важности альтернатив (атрибутов ОЭ), т. е. матрица \mathbf{A}^* представляет собой исправлен-

⁵ Это означает, что в МПС, отражающей мнение эксперта, отсутствуют явные противоречия, вызванные нарушениями свойства численной транзитивности, и данная матрица по своим свойствам достаточно близка к идеально согласованной, чтобы метод Саати дал корректный результат при ее обработке. Формальным признаком этой ситуации в методе Саати служит значение отношения согласованности МПС, не превышающее 0.2 [10]–[12].

⁶ Определение этого свойства будет приведено далее.

⁷ Более подробно свойство численной транзитивности и операция идеализации МПС рассмотрены в [13]. Можно сказать, что операция идеализации порождает новую МПС, используя в качестве эталона одну из строк исходной МПС, полученной от эксперта. Таким образом, порожденная матрица, с одной стороны, отражает мнение эксперта (хоть и не в полном объеме), а с другой – свободна от каких-либо внутренних противоречий в силу способа ее получения.

ную МПС эксперта, в которой сглажены все имеющиеся противоречия между его суждениями.

Тот факт, что матрицы \mathbf{A} и \mathbf{A}^* отражают одно и то же экспертное мнение о сравнительной важности альтернатив, можно представить в виде следующего утверждения: главные собственные векторы (ГСВ) матриц \mathbf{A} и \mathbf{A}^* , полученные с помощью алгоритма обработки МПС, используемого в методе Саати, равны между собой как исходно, так и после нормирования каждого из них по сумме элементов. Примеры, приведенные в [14], эмпирически подтверждают это утверждение, но его можно доказать и формально, что и будет сделано далее.

Для проведения доказательства введем следующие обозначения:

$$- H_k(\mathbf{A}) = \prod_{j=1}^n a_{kj} \quad - \text{произведение всех элементов } k\text{-й строки матрицы } \mathbf{A},$$

ментов k -й строки матрицы \mathbf{A} ,

$$- G_k(\mathbf{A}) = \prod_{j=1}^n a_{jk} \quad - \text{произведение всех элементов } k\text{-го столбца матрицы } \mathbf{A}.$$

Из свойства обратной симметричности матрицы \mathbf{A} следует, что $G_k(\mathbf{A}) = 1/H_k(\mathbf{A})$.

Рассмотрим элемент $\tilde{a}_{kij} = a_{kj}/a_{ki}$ идеальной матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_k$ и найдем его аналог в матрице \mathbf{A}^* :

$$a_{ij}^* = \left(\prod_{k=1}^n a_{kj}/a_{ki} \right)^{\otimes 1/n} = (G_j(\mathbf{A})/G_i(\mathbf{A}))^{1/n} = (H_i(\mathbf{A})/H_j(\mathbf{A}))^{1/n}.$$

Теперь рассмотрим произведение всех элементов i -й строки матрицы \mathbf{A}^* :

$$H_i(\mathbf{A}^*) = \prod_{j=1}^n a_{ij}^* = \prod_{j=1}^n (H_i(\mathbf{A})/H_j(\mathbf{A}))^{1/n} = H_i(\mathbf{A}) \prod_{j=1}^n (1/H_j(\mathbf{A}))^{1/n} = \frac{H_i(\mathbf{A})}{\left(\prod_{j=1}^n H_j(\mathbf{A}) \right)^{1/n}},$$

$$\forall i, j: a_{ji} = 1/a_{ij}, \quad a_{ii} = 1 \Rightarrow \prod_{j=1}^n H_j(\mathbf{A}) =$$

$$= \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n a_{ij} = 1 \Rightarrow H_i(\mathbf{A}^*) = H_i(\mathbf{A}).$$

Получение коэффициентов сравнительной важности альтернатив по методу Саати состоит в вычислении ГСВ полученной от эксперта МПС, поэтому рассмотрим ГСВ матриц \mathbf{A} и \mathbf{A}^* :

$$\mathbf{w}(\mathbf{A}) = (w_1, w_2, \dots, w_n),$$

$$w_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n H_i(\mathbf{A})},$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{A}^*) = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*),$$

$$w_i^* = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}^*} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n H_i(\mathbf{A}^*)},$$

$$H_i(\mathbf{A}^*) = H_i(\mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{w}(\mathbf{A}) = \mathbf{w}(\mathbf{A}^*).$$

Таким образом, можно считать доказанным, что матрицы \mathbf{A} и \mathbf{A}^* идентичны с точки зрения отражения мнения эксперта, так как получаемые после их обработки по методу Саати коэффициенты сравнительной важности альтернатив одинаковы для обеих матриц⁸.

Далее рассмотрим возможные способы решения задачи определения средневзвешенной⁹ сравнительной важности атрибутов ОЭ на основе специальной обработки МПС. Рассмотренные способы различаются степенью внутренней согласованности входной МПС и алгоритмом комплексирования (свертки) экспертной информации¹⁰.

Способ 1. Обработка согласованной МПС посредством аддитивной свертки НГСВ. В результате обработки МПС \mathbf{A} по алгоритму метода Саати находим сначала ГСВ этой матрицы

$$\mathbf{w}(\mathbf{A}) = (w_1, w_2, \dots, w_n), \quad w_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}},$$

а затем и ее нормированный главный собственный вектор (НГСВ)

$$\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{A}) = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \dots, \hat{w}_n),$$

$$\hat{w}_i = w_i / \sum_{j=1}^n w_j, \quad \sum_{i=1}^n \hat{w}_i = 1, \quad (2)$$

⁸ Равенство этих коэффициентов после нормирования ГСВ по сумме очевидным образом следует из уже доказанного равенства ГСВ исходной МПС и матрицы, полученной в результате комплексирования идеально согласованных матриц, порожденных исходной матрицей.

⁹ В качестве весовых коэффициентов используются элементы вектора экспертной компетентности \mathbf{a} .

¹⁰ Первый способ предназначен для обработки удовлетворительно согласованных МПС, прочие – для обработки неудовлетворительно согласованных МПС.

элементы которого численно отражают мнение эксперта о сравнительной важности атрибутов C_1, C_2, \dots, C_n ОЭ.

Далее используем вектор (2) и вектор экспертной компетентности α , чтобы найти вектор средневзвешенной сравнительной важности атрибутов ОЭ

$$\mathbf{z}(\mathbf{A}) = (z_1, z_2, \dots, z_n),$$

$$z_i = \alpha_i \hat{w}_i / \sum_{j=1}^n \alpha_j \hat{w}_j, \sum_{i=1}^n z_i = 1. \quad (3)$$

Данный вектор потребуется впоследствии для решения задачи комплексирования мнений экспертов, образующих экспертную группу. Для тех атрибутов ОЭ, которым соответствуют приблизительно равные и близкие к нулю или единице элементы вектора α , элементы вектора (3) тоже будут практически одинаковы, что в дальнейшем при комплексировании мнений нескольких различных экспертов может создать определенные трудности. Поэтому в подобном случае целесообразно указывать не только сам вектор (3), но и сумму элементов вектора α

$$\alpha_3 = \sum_{i=1}^n \alpha_i,$$

которую можно считать обобщенной скалярной оценкой компетентности эксперта¹¹.

Способ 2. Обработка несогласованной МПС посредством адямаровой свертки идеально согласованных матриц. Последовательно проведем операцию идеализации матрицы \mathbf{A} по каждой из ее строк, получив в результате набор идеально согласованных матриц $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n$. Затем комплекслируем весь набор полученных МПС с учетом соответствующих коэффициентов компетентности эксперта по каждому из атрибутов ОЭ, т. е. считая, что вклад каждой матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_k$ в результат комплексирования пропорционален коэффициенту компетентности эксперта α_k по тому атрибуту ОЭ, который соответствует k -й строке исходной матрицы \mathbf{A} , использованной при ее идеализации для получения идеально согласованной матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_k$:

$$\mathbf{A}^* = \bigotimes_{i=1}^n \alpha_i \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \tilde{\mathbf{A}}_i^{\otimes \alpha_i}} =$$

$$= \left(\tilde{\mathbf{A}}_1^{\otimes \alpha_1} \otimes \tilde{\mathbf{A}}_2^{\otimes \alpha_2} \otimes \dots \otimes \tilde{\mathbf{A}}_n^{\otimes \alpha_n} \right)^{\otimes 1 / \sum_{i=1}^n \alpha_i} = \{a_{ij}^*\}_{n \times n}. \quad (4)$$

¹¹ Это замечание справедливо и для других рассмотренных далее способов, базирующихся на аддитивной свертке.

МПС (4) всегда будет идеально согласованной, так как представляет результат комплексирования только идеально согласованных матриц.

Далее найдем ГСВ матрицы (4), а также ее НГСВ, который в данном случае и представляет собой вектор средневзвешенной сравнительной важности атрибутов ОЭ:

$$\mathbf{w}^* = \mathbf{w}(\mathbf{A}^*) = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_n^*),$$

$$w_i^* = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}^*},$$

$$\hat{\mathbf{w}}^* = \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{A}^*) = (\hat{w}_1^*, \hat{w}_2^*, \dots, \hat{w}_n^*),$$

$$\hat{w}_i^* = w_i^* / \sum_{j=1}^n w_j^*, \sum_{i=1}^n \hat{w}_i^* = 1.$$

Способ 3. Обработка несогласованной МПС адямаровой сверткой ГСВ идеально согласованных матриц. Последовательно проведем операцию идеализации матрицы \mathbf{A} по каждой из ее строк и найдем ГСВ каждой из полученных матриц $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n$:

$$\mathbf{w}(\tilde{\mathbf{A}}_k) = (w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{kn}), \quad w_{ki} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}}. \quad (5)$$

Теперь требуется найти вектор средневзвешенной сравнительной важности атрибутов ОЭ $\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{A})$ комплексированием¹² всех уже имеющихся ГСВ матриц $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n$, считая, что вклад вектора $\mathbf{w}(\tilde{\mathbf{A}}_k)$ в результат комплексирования пропорционален коэффициенту компетентности эксперта α_k по тому атрибуту ОЭ, который соответствует k -й строке исходной матрицы \mathbf{A} , использованной при ее идеализации для получения идеально согласованной матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_k$:

$$\mathbf{g}(\mathbf{A}) = (g_1, g_2, \dots, g_n) = \bigotimes_{i=1}^n \alpha_i \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \mathbf{w}(\tilde{\mathbf{A}}_i)^{\otimes \alpha_i}} =$$

$$= \left(\mathbf{w}(\tilde{\mathbf{A}}_1)^{\otimes \alpha_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{w}(\tilde{\mathbf{A}}_n)^{\otimes \alpha_n} \right)^{\otimes 1 / \sum_{i=1}^n \alpha_i},$$

$$g_i = \left(\prod_{k=1}^n w_{ki}^{\alpha_k} \right)^{1 / \sum_{i=1}^n \alpha_i}, \quad i = \overline{1, n},$$

¹² Вектор, получаемый в результате комплексирования, дополнительно нормируется по сумме всех элементов (аналогичное нормирование выполняется также для векторов, получаемых 4-м и 5-м способами).

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{A}) = (\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_n), \hat{g}_i = g_i / \sum_{j=1}^n g_j, \sum_{i=1}^n \hat{g}_i = 1.$$

Способ 4. Обработка несогласованной МПС аддитивной сверткой ГСВ идеально согласованных матриц. Последовательно проведем операцию идеализации матрицы \mathbf{A} по каждой из ее строк и найдем векторы (5) для каждой из матриц $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n$. Далее найдем вектор средневзвешенной сравнительной важности атрибутов ОЭ $\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{A})$ с помощью аддитивной свертки всех имеющихся ГСВ матриц $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n$, считая, что вклад вектора $\mathbf{w}(\tilde{\mathbf{A}}_k)$ в конечный результат пропорционален коэффициенту компетентности эксперта α_k по тому атрибуту ОЭ, который соответствует k -й строке исходной матрицы \mathbf{A} , использованной при ее идеализации для получения идеально согласованной матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_k$:

$$\mathbf{y}(\mathbf{A}) = (y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \mathbf{w}(\tilde{\mathbf{A}}_k)}{\sum_{k=1}^n \alpha_k},$$

$$y_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k w_{ki} / \sum_{k=1}^n \alpha_k, i = \overline{1, n},$$

$$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{A}) = (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_n), \hat{y}_i = y_i / \sum_{j=1}^n y_j, \sum_{i=1}^n \hat{y}_i = 1.$$

Способ 5. Обработка несогласованной МПС путем адамаровой свертки НГСВ идеально согласованных матриц. Последовательно проведем операцию идеализации матрицы \mathbf{A} по каждой из ее строк, затем для каждой из полученных матриц $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n$ найдем соответствующие ГСВ и НГСВ:

$$\mathbf{w}(\tilde{\mathbf{A}}_k) = (w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{kn}),$$

$$w_{ki} = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n \tilde{a}_{ij}},$$

$$\hat{\mathbf{w}}(\tilde{\mathbf{A}}_k) = (\hat{w}_{k1}, \hat{w}_{k2}, \dots, \hat{w}_{kn}),$$

$$\hat{w}_{ki} = w_{ki} / \sum_{j=1}^n w_{kj}, \sum_{i=1}^n \hat{w}_{ki} = 1.$$

Затем найдем вектор средневзвешенной сравнительной важности атрибутов ОЭ с помощью комплексирования всех имеющихся НГСВ матриц $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n$, считая, что вклад вектора

$\hat{\mathbf{w}}(\tilde{\mathbf{A}}_k)$ в результат комплексирования пропорционален коэффициенту компетентности эксперта α_k по тому атрибуту ОЭ, который соответствует k -й строке исходной матрицы \mathbf{A} , использованной при ее идеализации для получения идеально согласованной матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_k$:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \hat{\mathbf{w}}(\tilde{\mathbf{A}}_k)}{\sum_{k=1}^n \alpha_k},$$

$$u_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k \hat{w}_{ki} / \sum_{k=1}^n \alpha_k, i = \overline{1, n},$$

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{A}) = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_n), \hat{u}_i = u_i / \sum_{j=1}^n u_j, \sum_{i=1}^n \hat{u}_i = 1.$$

Способ 6. Обработка несогласованной МПС аддитивной сверткой НГСВ идеально согласованных матриц. Последовательно проведем операцию идеализации матрицы \mathbf{A} по каждой из ее строк и найдем векторы (6) для полученных матриц $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n$. Далее найдем вектор¹³ средневзвешенной сравнительной важности атрибутов ОЭ $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{A})$ с помощью аддитивной свертки всех имеющихся НГСВ матриц $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{A}}_n$, считая, что вклад вектора $\hat{\mathbf{w}}(\tilde{\mathbf{A}}_k)$ в конечный результат пропорционален коэффициенту компетентности эксперта α_k по тому атрибуту ОЭ, который соответствует k -й строке исходной матрицы \mathbf{A} , использованной при ее идеализации для получения идеально согласованной матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_k$:

$$\mathbf{v}(\mathbf{A}) = (v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \hat{\mathbf{w}}(\tilde{\mathbf{A}}_k)}{\sum_{k=1}^n \alpha_k},$$

$$v_i = \sum_{k=1}^n \alpha_k \hat{w}_{ki} / \sum_{k=1}^n \alpha_k, i = \overline{1, n}.$$

Пример обработки МПС всеми способами.

Для наглядности рассмотрим пример обработки составленной экспертом МПС по итогам сравнительного анализа некоторых четырех альтернатив или атрибутов ОЭ (например, четырех показателей качества информационно-управляющей системы), считая, что его компетентность нам известна:

¹³ Несложно увидеть, что этот вектор по способу своего получения нормированный, т. е. сумма его элементов всегда равна единице.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & 1/3 \\ 1/8 & 1 & 3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (0.9 \ 0.7 \ 0.5 \ 0.3).$$

Используя проверку согласованности заданной матрицы \mathbf{A} по методу Саати, можно убедиться, что данная матрица имеет неудовлетворительный уровень внутренней согласованности, так как отношение согласованности составляет 0.25, т. е. не очень значительно, но все-таки превосходит пороговое значение, равное 0.2.

Результаты применения¹⁴ способа 1:

$$\mathbf{w}(\mathbf{A}) = (1.68 \ 0.55 \ 0.44 \ 2.45),$$

$$\hat{\mathbf{w}}(\mathbf{A}) = (0.33 \ 0.11 \ 0.08 \ 0.48),$$

$$\mathbf{z}(\mathbf{A}) = (0.53 \ 0.13 \ 0.08 \ 0.26).$$

Результаты применения способа 2, а также идеальные матрицы $\tilde{\mathbf{A}}_1, \tilde{\mathbf{A}}_2, \tilde{\mathbf{A}}_3, \tilde{\mathbf{A}}_4$ и матрица \mathbf{A}^* :

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 & 1/3 \\ 1/8 & 1 & 3/8 & 1/24 \\ 1/3 & 8/3 & 1 & 1/9 \\ 3 & 24 & 9 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1.68 \\ 0.21 \\ 0.56 \\ 5.05 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0.22 \\ 0.03 \\ 0.08 \\ 0.67 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 24 & 2 \\ 1/8 & 1 & 3 & 1/4 \\ 1/24 & 1/3 & 1 & 1/12 \\ 1/2 & 4 & 12 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 4.43 \\ 0.55 \\ 0.18 \\ 2.21 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.08 \\ 0.02 \\ 0.30 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1.32 \\ 1.32 \\ 0.44 \\ 1.32 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.1 \\ 0.3 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{A}}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & 1 & 1/3 \\ 3/4 & 1 & 3/4 & 1/4 \\ 1 & 4/3 & 1 & 1/3 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0.82 \\ 0.61 \\ 0.82 \\ 2.45 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 0.17 \\ 0.13 \\ 0.17 \\ 0.53 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 2.23 & 3.06 & 0.67 \\ 0.45 & 1 & 1.38 & 0.30 \\ 0.33 & 0.73 & 1 & 0.22 \\ 1.50 & 3.34 & 4.49 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{A}^*) = \begin{pmatrix} 1.82 \\ 0.66 \\ 0.48 \\ 2.19 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{w}}(\mathbf{A}^*) = \begin{pmatrix} 0.30 \\ 0.14 \\ 0.10 \\ 0.46 \end{pmatrix}.$$

Результаты применения способа 3:

$$\mathbf{g}(\mathbf{A}) = (1.94 \ 0.47 \ 0.40 \ 2.74),$$

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathbf{A}) = (0.35 \ 0.08 \ 0.07 \ 0.50).$$

Результаты применения способа 4:

$$\mathbf{y}(\mathbf{A}) = (2.30 \ 0.59 \ 0.46 \ 3.12),$$

$$\hat{\mathbf{y}}(\mathbf{A}) = (0.36 \ 0.09 \ 0.07 \ 0.48).$$

Результаты применения способа 5:

$$\mathbf{u}(\mathbf{A}) = (0.31 \ 0.07 \ 0.06 \ 0.44),$$

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{A}) = (0.35 \ 0.08 \ 0.07 \ 0.50).$$

Результаты применения способа 6:

$$\mathbf{v}(\mathbf{A}) = (0.34 \ 0.11 \ 0.08 \ 0.47).$$

Заключение. Как можно заметить, рассмотренные способы хоть и базируются на схожих концептуальных принципах комплексирования, но выдают численные результаты, несколько отличные друг от друга¹⁵, что обусловлено различными алгоритмами обработки. В данной статье вопрос о том, какой из приведенных способов можно считать наиболее адекватным решаемой задаче, не ставится. Способы приведены как альтернативные варианты реализации на вычислительном уровне концептуального подхода к обработке МПС, призванного обеспечить, во-первых, использование векторной модели экспертной компетентности, во-вторых, возможность корректировки несогласо-

¹⁴ Результаты применения способа 1 приведены исключительно для целостности примера, поскольку этот способ ориентирован на обработку удовлетворительно согласованных МПС, а рассматриваемая матрица к таковым не относится.

¹⁵ Способы 3 и 5 всегда будут давать одинаковый конечный результат.

ванных МПС без повторного опроса эксперта, а с использованием операции идеализации МПС и последующим комплексированием исправленных носителей экспертной информации.

Представленные результаты будут использованы в следующей части при рассмотрении под-

ходов к решению задачи экспертного оценивания, заключающейся в комплексировании мнений группы экспертов с применением векторной модели компетентности и использованием операции идеализации МПС.

Список литературы

1. Ларичев О. И. Объективные модели и субъективные решения. М.: Наука, 1987. 143 с.
2. Ларичев О. И. Вербальный анализ решений. М.: Наука, 2006. 181 с.
3. Уткин Л. В. Анализ риска и принятие решений при неполной информации. СПб.: Наука, 2007. 404 с.
4. Коробов В. Б. Теория и практика экспертных методов / под ред. Б. И. Кочурова. М.: НИЦ ИНФРА-М, 2021. 281 с.
5. Гузий А. Г., Лушкин А. М., Майорова Ю. А. Теория и практика экспертного анализа состояний сложных динамических систем. М.: ИД Академии Жуковского, 2015. 127 с.
6. Сидельников Ю. В. Системный анализ технологии экспертного прогнозирования. М.: Изд-во МАИ-Принт, 2007. 348 с.
7. Литвак Б. Г. Экспертные оценки и принятие решений. М.: ПП «Патент», 1996. 271 с.
8. Бешелев С. Д., Гурвич Ф. Г. Математико-статистические методы экспертных оценок. М.: Статистика, 1974. 159 с.
9. Бурков Е. А., Падерно П. И. Методы группового экспертного оценивания / под общ. ред. проф. П. И. Падерно. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2025. 166 с.
10. Саати Т. Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети / пер. с англ. д. т. н., проф. О. Н. Андрейчиковой. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 360 с.
11. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь, 1993. 320 с.
12. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем / пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь, 1991. 224 с.
13. Методология и проблематика экспертного оценивания. Часть 1. Способы повышения внутренней согласованности матрицы парных сравнений / Е. А. Бурков, П. И. Падерно, В. В. Розен, Е. А. Толкачева, Д. А. Черкасова // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2026. Т. 19, № 2. С. 40–50. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-2-40-50.

Информация об авторах

Бурков Евгений Александрович – канд. техн. наук, доцент кафедры информационных систем и кафедры алгоритмической математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: eaburkov@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-8788-6470>

Падерно Павел Иосифович – д-р техн. наук, профессор кафедры информационных систем СПбГЭТУ «ЛЭТИ». Заслуженный деятель науки РФ.

E-mail: pipaderno@list.ru

<https://orcid.org/0000-0001-9032-5084>

References

1. Larichev O. I. Obektivnye modeli i subektivnye reshenija. M.: Nauka, 1987. 143 s. (In Russ.).
2. Larichev O. I. Verbalnyj analiz reshenij. M.: Nauka, 2006. 181 s. (In Russ.).
3. Utkin L. V. Analiz riska i prinjatje reshenij pri nepolnoj informacii. SPb.: Nauka, 2007. 404 s. (In Russ.).
4. Korobov V. B. Teorija i praktika ekspertnyh metodov / pod red. B. I. Kochurova. M.: NIC INFRA-M, 2021. 281 s. (In Russ.).
5. Guzij A. G., Lushkin A. M., Majorova JU. A. Teorija i praktika ekspertnogo analiza sostojanij slozhnyh dinamičeskih sistem. M.: ID Akademii Zhukovskogo, 2015. 127 s. (In Russ.).
6. Sidelnikov JU. V. Sistemnyj analiz tehnologij ekspertnogo prognozirovanija. M.: Izd-vo MAI-Print, 2007. 348 s. (In Russ.).
7. Litvak B. G. Ekspertnye ocenki i prinjatje reshenij. M.: PP «Patent», 1996. 271 s. (In Russ.).
8. Beshelev S. D., Gurvich F. G. Matematiko-statističeskie metody ekspertnyh ocenok. M.: Statistika, 1974. 159 s. (In Russ.).
9. Burkov E. A, Paderno P. I. Metody gruppovogo ekspertnogo ocenivanija / pod obshh. red. prof. P. I. Paderno. SPb.: Izd-vo SPbGETU «LETI», 2025. 166 s. (In Russ.).
10. Saati T. L. Prinjatje reshenij pri zavisimostjah i obratnyh svjazjah: Analitičeskie seti / per. s angl. d. t. n., prof. O. N. Andrejchikovej. M.: Izd-vo LKI, 2008. 360 s. (In Russ.).

11. Saati T. Prinjatje reshenij. Metod analiza ierarhij / per. s angl. R. G. Vachnadze. M.: Radio i svjaz, 1993. 320 s. (In Russ.).

12. Saati T., Kerns K. Analiticheskoe planirovanie. Organizacija sistem / per. s angl. R. G. Vachnadze. M.: Radio i svjaz, 1991. 224 s. (In Russ.).

13. Metodologija i problematika ekspertnogo ocenivaniya. CHast 1. Sposoby povyshenija vnutrennej soglasovannosti matricy parnyh sravnenij / E. A. Burkov, P. I. Paderno, V. V. Rozen, E. A. Tolkacheva, D. A. Cherkasova // Izv. SPbGETU «LETI». 2026. Т. 19, № 2. S. 40–50. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-2-40-50. (In Russ.).

Information about the authors

Evgeniy A. Burkov – Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Department of Information Systems and Department of Algorithmic Mathematics, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: eaburkov@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-8788-6470>

Pavel I. Paderno – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Department of Information Systems, Saint Petersburg Electrotechnical University. Honored Worker of Science of the Russian Federation.

E-mail: pipaderno@list.ru

<https://orcid.org/0000-0001-9032-5084>

Статья поступила в редакцию 22.01.2026; принята к публикации после рецензирования 03.03.2026; опубликована онлайн 27.04.2026.

Submitted 22.01.2026; accepted 03.03.2026; published online 27.04.2026.
