

Волны Лява в упругом слое с микрошероховатой границей на упругом полупространстве

К. Е. Аббакумов✉, И. Г. Сидоренко

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

✉ keabbakumov@etu.ru

Аннотация. С целью создания научно-технических предпосылок эффективного решения обратных задач дефектоскопии и структурометрии разработаны физические модели упругого слоя и его границы с упругим полупространством при нарушении акустического контакта, и проанализированы их характеристики при выполнении граничных условий в приближении «линейного скольжения». Рассмотрены условия распространения волн Лява в области границы твердых сред при нарушенном акустическом контакте. Получены дисперсионные уравнения для определения фазовой скорости волны Лява. Приведены примеры численных решений полученных дисперсионных уравнений для значений параметров моделей, актуальных для сферы структурометрии, дефектоскопии и акустических измерений в промышленности.

Ключевые слова: неоднородный упругий слой, упругое полупространство, нарушенный акустический контакт, линейное скольжение, волны Лява, дисперсионное уравнение

Для цитирования: Аббакумов К. Е., Сидоренко И. Г. Волны Лява в упругом слое с микрошероховатой границей на упругом полупространстве // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2026. Т. 19, № 4. С. 50–62. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-4-50-62.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

Waves Lyava in an Elastic Layer with a Microroughened Border on an Elastic Half-Space

K. E. Abbakumov✉, I. G. Sidorenko

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

✉ keabbakumov@etu.ru

Abstract. For the purpose of creating scientific and technical prerequisites for the effective solution of inverse problems in defectoscopy and structurometry, physical models of an elastic layer and its boundary with an elastic half-space have been developed, considering acoustic contact disruption. Their characteristics have been analyzed under boundary conditions within the «linear slip» approximation. Conditions for the propagation of Lyava waves in the region of the boundary of solid media with disturbed acoustic contact are considered. Dispersion equations for determining phase velocity of the Lyava wave are obtained. Examples of numerical solutions of obtained dispersion equations for values of parameters of models relevant for structurometry, flaw detection and acoustic measurements in industry are given.

Keywords: inhomogeneous elastic layer, elastic half-space, disturbed acoustic contact, linear sliding, Lyava waves, dispersion equation.

For citation: Abbakumov K. E., Sidorenko I. G. Waves Lyava in an Elastic Layer with a Microroughened Border on an Elastic Half-Space // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2026. Vol. 19, no. 4. P. 50–62. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-4-50-62.

Conflict of interests. The authors declare no conflicts of interests.

Введение. В современных условиях научно-технического прогресса продолжают интенсивные работы по разработке новых видов средств неразрушающего контроля и их усовершенствованию, связанных с развитием новых видов технологий изготовления конструкционных материалов и изделий из них, например аддитивных технологий. К таким технологиям и средствам контроля можно отнести устройства, использующие волны Лява, характеристики которых могут позволить получать дополнительную информацию о свойствах контролируемых объектов, что определяет актуальность настоящей статьи применительно к задачам ультразвуковой дефектоскопии и структурометрии [1]–[3]. По этим причинам рассмотрение моделей технологических несплошностей предлагается дополнить вспомогательными видами неоднородностей, согласованными с технологическими приемами создания композитов и других конструкционных материалов.

В настоящей статье рассматриваются структурные неоднородности слоистых типов, влияющие на волновые процессы в области плоскостной, микрошероховатой границы раздела между упругим слоем и упругим полупространством, связь между которыми отличается от условий «жесткого» контакта и описывается в приближении «линейного скольжения» [4]–[6]. Это условие на границе раздела твердых сред заменяет условие непрерывности перемещений.

В [7] получено дисперсионное уравнение для определения фазовых скоростей волн Лява, и сформулированы условия их образования в зависимости от параметров упругого слоя и полупространства. Представляет интерес проведение до-

полнительного анализа условий образования волн Лява в зависимости от параметров неоднородностей и параметров модели «линейного скольжения». Это особенно важно в тех случаях, когда учет неоднородностей делает возможным возникновение волн Лява для сочетаний материалов, в которых при отсутствии неоднородностей это было бы невозможно. Решение данных прямых задач может быть использовано также при решении обратных задач, когда по характеристикам отраженных и преломленных упругих волн определяются значения физико-механических параметров соприкасающихся материалов.

Рассмотрим, для начала, модель плоскостной среды в виде чередующихся слоев с заданными характеристиками. Система координат и расположение слоя над полупространством показаны на рис. 1, где представлен фрагмент модели такой среды с обозначенными параметрами. Как следует из рисунка, исследуемая среда представляет собой периодическую структуру в виде комбинации слоев материалов с различными свойствами (плотностью ρ и коэффициентами Ламэ λ, μ), соответственно: ρ_1, λ_1, μ_1 – слой толщиной h_1 и ρ_2, λ_2, μ_2 – слой толщиной h_2 ; общая толщина $h = h_1 + h_2$; h_3 – толщина неоднородного слоя в направлении оси z .

Следуя методике [1], [7], можно показать, что в низкочастотном приближении для тонких слоев величина фазовой скорости эффективной продольной волны, распространяющейся вдоль слоев в направлении оси x может быть определена из дисперсионного уравнения:

$$A + B + C - D = 0, \quad (1)$$

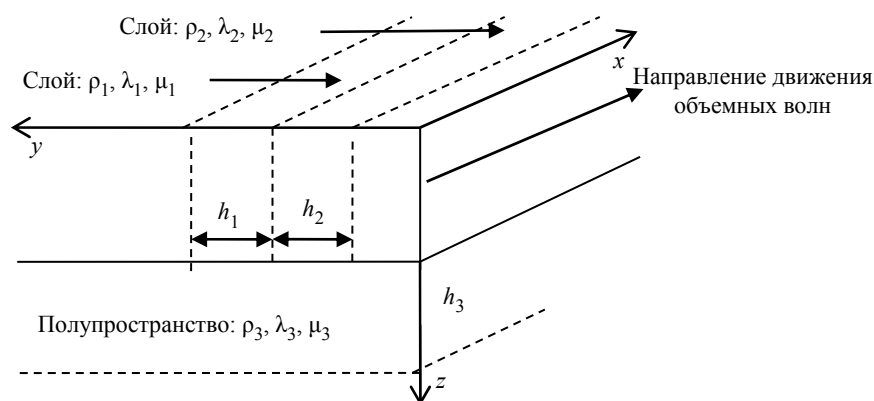


Рис. 1. Система координат и схема движения объемных волн вдоль слоев, образующих плоскостную структуру
Fig. 1. Coordinate system and diagram of the movement of volume waves along the layers that form a flat-layered structure

где

$$\begin{aligned}
 A &= 4(\mu_1 - \mu_2)^2 x_1 x_2, \\
 B &= \rho_1 \omega^2 \left[\rho_1 \omega^2 / k^2 - 4(\mu_1 - \mu_2) \right] x_2 (\beta_1 h_1 / 2), \\
 C &= \rho_2 \omega^2 \left[\rho_2 \omega^2 / k^2 + 4(\mu_1 - \mu_2) \right] x_2 (\beta_2 h_2 / 2), \\
 D &= \left(\rho_2 \rho_1 \omega^2 / k^2 \right) \left[y_1 (\beta_2 h_2 / 2) + y_2 (\beta_1 h_1 / 2) \right]; \\
 x_1 &= k^2 (\beta_1 h_1 / 2) + \alpha_1 \beta_1 (\alpha_1 h_1 / 2), \\
 x_2 &= k^2 (\beta_2 h_2 / 2) + \alpha_2 \beta_2 (\alpha_2 h_2 / 2); \\
 y_1 &= k^2 (\beta_1 h_1 / 2) - \alpha_2 \beta_1 (\alpha_2 h_2 / 2), \\
 y_2 &= k^2 (\beta_2 h_2 / 2) - \alpha_1 \beta_2 (\alpha_1 h_1 / 2); \\
 \alpha_1 &= \sqrt{k_{l1}^2 - k^2}, \quad \alpha_2 = \sqrt{k_{l2}^2 - k^2}, \\
 \beta_2 &= \sqrt{k_{t2}^2 - k^2}; \\
 k_{l1} &= \omega / c_{l1}, \quad k_{l2} = \omega / c_{l2}, \quad k_{t1} = \omega / c_{t1}, \quad k_{t2} = \omega / c_{t2}, \\
 k &= \omega / c_{lxx},
 \end{aligned}$$

ω – круговая (циклическая) частота; c_{l1}, c_{t1} – скорости продольной и поперечной волн в среде 1; c_{l2}, c_{t2} – скорости продольной и поперечной волн в среде 2; k, c_{lxx} – волновое число и фазовая скорость эффективной продольной волны, соответственно.

После преобразований с учетом малости волновых размеров слоев h_1 и h_2 можно показать, что дисперсионное уравнение (1) преобразуется в алгебраическое, решение которого для значений фазовых скоростей продольной волны имеет вид

$$c_{lxx} = \sqrt{\frac{1 + n(1-n) \frac{(\rho_1 c_{t1}^2 - \rho_2 c_{t2}^2) [\rho_1 (c_{l1}^2 - c_{t1}^2) - \rho_2 (c_{l2}^2 - c_{t2}^2)]}{\rho_1 c_{l1}^2 \rho_2 c_{l2}^2}}{[\rho_1 n + \rho_2 (1-n)] \left[\frac{n}{\rho_1 c_{l1}^2} + \frac{1-n}{\rho_2 c_{l2}^2} \right]}}, \quad (2)$$

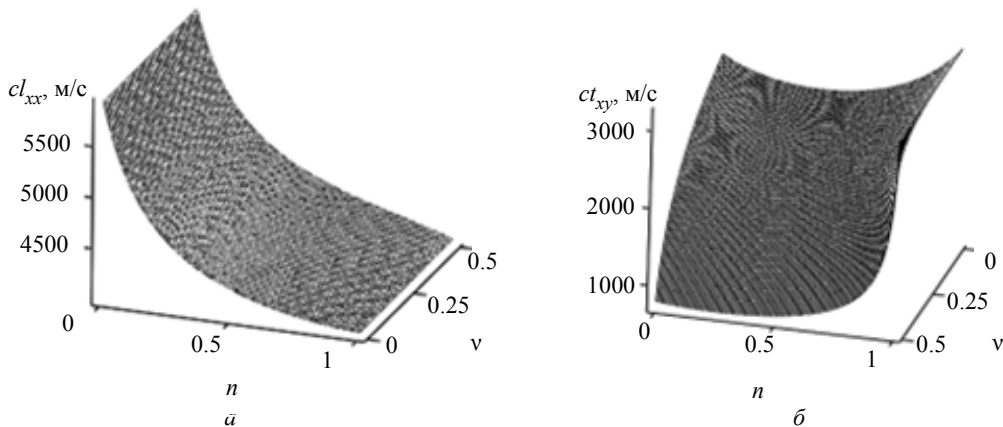


Рис. 2. Зависимости от относительной толщины слоев n и коэффициента Пуассона v эффективных скоростей: a – продольных; b – поперечных волн, поляризованных ортогонально границам слоев

Fig. 2. Dependence on relative thickness of layers n and Poisson's ratio v : effective velocities a – of longitudinal; b – transverse, polarized orthogonally to layer boundaries, wave

где $n = h_1 / (h_1 + h_2)$, $1 - n = h_2 / (h_1 + h_2)$ – относительные толщины слоев.

Проведя аналогичные действия по отношению к поперечной волне с упругим смещением вдоль оси y (в плоскости yx), при тех же допущениях можно найти выражение для фазовой скорости эффективной поперечной волны:

$$c_{t_{xy}} = \sqrt{\frac{n \rho_1 c_{t1}^2 + (1-n) \rho_2 c_{t2}^2}{\rho_1 n + \rho_2 (1-n)}}. \quad (3)$$

В случае направления вектора смещения поперечной волны вдоль оси z (в плоскости xz) формула (3) может быть преобразована к виду

$$c_{t_{xz}} = \frac{1}{\sqrt{(n \rho_1 + (1-n) \rho_2) \left(\frac{n}{\rho_1 c_{t1}^2} + \frac{1-n}{\rho_2 c_{t2}^2} \right)}}. \quad (4)$$

В качестве примера проводились вычисления по формулам (2), (3) для материалов слоев 1 и 2 соответственно: $\rho_1 = 2500$ кг/м³, $c_{l1} = 4000$ м/с, $c_{t1} = 1600$ м/с (плотный металлургический шлак); $\rho_2 = 7800$ кг/м³, $c_{l2} = 5920$ м/с, $c_{t2} = 3230$ м/с (углеродистая сталь), [8]; частота ультразвука – 1 МГц, пространственный период в направлении оси y слоистой структуры – $h_1 + h_2 = 1$ мм. На рис. 2 представлены зависимости фазовых скоростей продольных и поперечных, поляризованных в плоскости xu , волн в зависимости от относи-

тельной толщины слоев n и коэффициента Пуассона ν материала слоя 1. Как следует из графиков с увеличением относительной толщины слоя 2 (с большими значениями скоростей объемных волн во всем диапазоне изменения коэффициента Пуассона) происходит рост скоростей эффективных волн, что согласуется с физическими представлениями. В предельных случаях, когда относительная толщина слоев $n \rightarrow 0$ или $n \rightarrow 1$, значения фазовых скоростей стремятся к значениям скоростей упругих волн в невозмущенной среде.

Важным условием существования волн Лява [7] служит условие нахождения значения фазовой скорости этой волны $cL_{l,e}$ между значениями фазовых скоростей поперечных волн в материале слоя и полупространства:

$$c_{t1} \leq cL_{l,e} \leq c_{t2}. \quad (5)$$

Под величиной $cL_{l,e}$ в (5) следует понимать значение фазовой скорости эффективной (поперечной волны Лява) в бинарной двухслойной композиции; с вектором смещения, направленным вдоль оси y и движущейся в направлении оси x .

Переходя к рассмотрению волны Лява, для упрощения преобразований ограничимся случаем длинных волн и тонких слоев. Можно показать, что в этом случае трансцендентное дисперсионное уравнение, полученное по аналогии с [7], преобразуется в алгебраическое, а выражение для фазовой скорости волны Лява приобретает вид

$$cL_{l,e} = \frac{c_{t2}}{1 + \frac{(2\pi f h_3)^2 \rho_1^2}{2\rho_2^2 c_{t2}^2} \left(1 - \frac{c_{t,xy}^2}{c_{t2}^2}\right)}. \quad (6)$$

На рис. 3 представлены результаты вычисления фазовой скорости волны Лява по формуле (6).

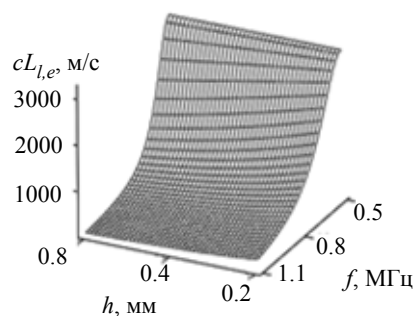


Рис. 3. Зависимости фазовых скоростей волн Лява от параметров волнового процесса:

от частоты ультразвука в диапазоне 0.5...1.1 МГц и от толщины слоя в диапазоне 0.2...0.8 мм

Fig. 3. Dependence of phase velocities of Lyava waves on wave process parameters: from ultrasound frequency in the range of 0.5...1.1 MHz and from layer thickness in the range of 0.2...0.8 mm

Схема другого случая формирования плоскостойкой среды при движении объемных волн ортогонально границам структуры представлена на рис. 4.

Можно показать, следуя рекомендациям [1], что в низкочастотном приближении при малой толщине слоев дисперсионное уравнение для определения фазовой скорости эффективной продольной волны, примет вид

$$1 - \frac{[k_{le}(h_1 + h_2)]^2}{2} = \left[1 - \frac{(k_{l1}h_1)^2}{2}\right] \left[1 - \frac{(k_{l2}h_2)^2}{2}\right] - \frac{1 + \left(\frac{\rho_2 c_{l2}}{\rho_1 c_{l1}}\right)^2}{\rho_2 c_{l2} \rho_1 c_{l1}} (k_{l1}h_1)(k_{l2}h_2), \quad (7)$$

где k_{le} – волновое число эффективной продольной волны с фазовой скоростью $c_{l,e,xx}$ на частоте $\omega = 2\pi f$.

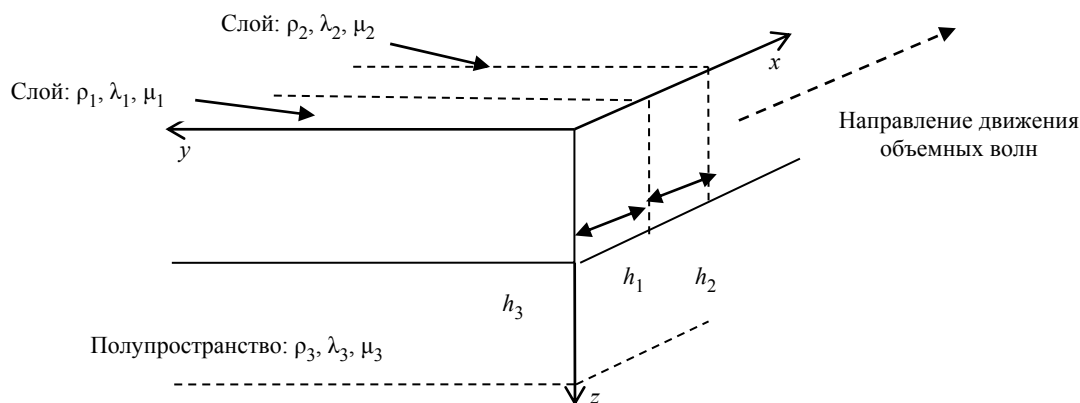


Рис. 4. Система координат и схема движения объемных волн вдоль слоев структуры

Fig. 4. Coordinate system and diagram of the movement of volume waves along the layers structure

После упрощения выражения (7) приводится к виду, удобному для вычисления фазовых скоростей продольных и поперечных волн, распространяющихся ортогонально по отношению к слоям:

$$cl_{t,e,xx} = \frac{1}{\sqrt{(\rho_1 n + (1-n)\rho_2) \left(\frac{n}{\rho_1 c_{l1}^2} + \frac{1-n}{\rho_2 c_{l2}^2} \right)}}. \quad (8)$$

Действуя по аналогии, можно показать, следуя рекомендациям [7], что в низкочастотном приближении при малой толщине слоев дисперсионное уравнение для определения фазовой скорости эффективной поперечной волны примет вид, соответствующий формуле (7) с подходящей заменой:

$$k_{l,e} \rightarrow k_{t,e} \text{ и } c_{l1} \rightarrow c_{t1}, \quad c_{l2} \rightarrow c_{t2} \quad k_{l2} \rightarrow k_{t2}, \\ k_{l1} \rightarrow k_{t1}.$$

После этого можно получить выражение для эффективной скорости поперечной волны, сходное с (4).

В качестве примера были проведены вычисления по формуле (8) значений фазовых скоростей эффективных продольной cl_{te} и поперечной волны ct_{te} , распространяющейся ортогонально слоям. Графики зависимости представлены на рис. 5. В качестве параметров для вычислений выбраны: относительная толщина слоев в пределах 0...1 и коэффициент Пуассона в пределах 0...0.5. Из (8) видно, что при относительной толщине слоя $n \rightarrow 0$ значение фазовой скорости эффективной продольной волны не превышает значения скорости объемной продольной волны, что согласуется с такими же данными для поперечной волны $ct_{t,e,xx}$ и физическими ограничениями. Полученные зависимости использовались для опреде-

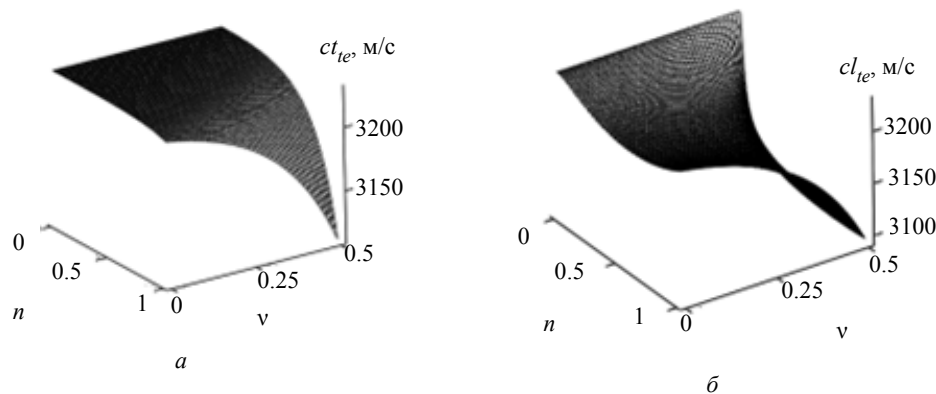


Рис. 5. Зависимости фазовой скорости эффективной поперечной волны (а) и эффективной волны Лява (б) при распространении ортогонально слоям от относительной толщины слоев n и коэффициента Пуассона v ; $f = 0.5$ МГц, $h_3 = 1$ мм

Fig. 5. Dependences of the phase velocity of the effective shear wave (а), and of the effective Lyava wave (б), when propagating orthogonally to the layers, on the relative thickness of the layers n and the Poisson ratio v ; $f = 0.5$ MHz, $h_3 = 1$ mm

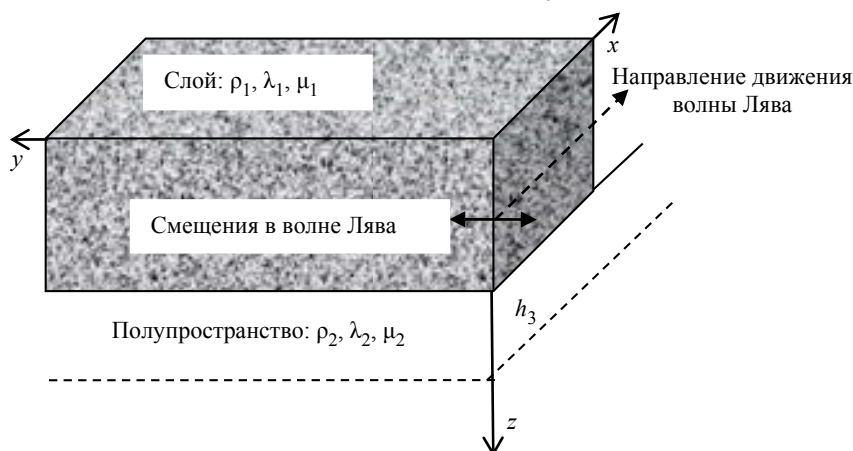


Рис. 6. Система координат и схема образования и распространения волны Лява в слое консолидированной среды на упругом полупространстве

Fig. 6. Coordinate system and diagram of formation and propagation of the Lyava wave in the consolidated medium layer on the elastic half-space

ления значений фазовой скорости волны Лява, формирующейся в данных условиях. Подстановка значений по формулам (4), (8) в формулу (6) позволяла осуществить такие вычисления, результаты которых представлены на рис. 5, б.

Важная разновидность неоднородных сред – случай консолидированных сред, в которых составляющие микрочастицы находятся в состоянии плотного соприкосновения друг с другом, образуя составной массив, физико-механические характеристики которого могут значительно отличаться от вещества в исходном монолитном состоянии [9].

Подобные среды первоначально изучались применительно к задачам геоакустики. Однако данные фрактографических и металлографических исследований подтверждают правомерность подобной гипотезы и применительно к веществу, заполняющему расслоения в листовом прокате, переходящему в раздробленное состояние под действием усилий при прокатке, рис. 6.

По данным [9] для модели замещения гранул среды упругими сферами при плотной «гексагональной упаковке» значения фазовых скоростей эффективной продольной $cr_{l,e}$ и поперечной $cr_{t,e}$ волн, соответственно, распространяющихся в консолидированной среде, имеют вид:

$$cr_{l,e} = \frac{32\rho\omega^2}{27QDG} (r_{\max}^4 - r_{\min}^4) r_{\max},$$

$$cr_{t,e} = cr_{l,e} \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}},$$

где ρ – плотность монолитной среды; ω – круговая частота; Q – механическая добротность; r_{\max} , r_{\min} – максимальный и минимальный размеры замещающих микросфер; DG – статическая контактная жесткость, определяемая выражением

$$DG = 4\mu a / (1 - \nu),$$

где μ – модуль сдвига, a – радиус контактного пятна на поверхностях замещающих сфер, ν – коэффициент Пуассона [9].

Следует отметить, что при выводе формул (9) особое значение имело распределение гранул вещества по размерам. В данном случае функция плотности вероятности распределения по размерам, по рекомендации [9], имела вид: $f(r) = 1/r^4$, где r – радиус замещающих микросфер. Подстановка формулы для $cr_{t,e}$ из (9) в выражение (6) позволяет получить зависимость фазовой скорости

волны Лява от параметров модели с учетом длинноволнового приближения. Результаты вычисления фазовой скорости волны Лява в заданном приближении представлены на рис. 7.

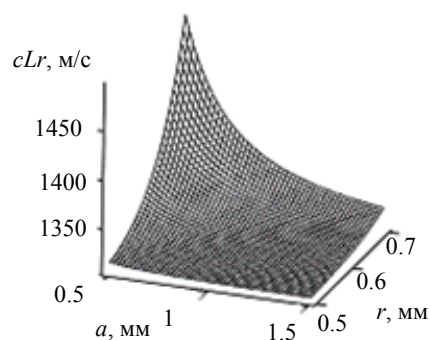


Рис. 7. Зависимости фазовых скоростей волн Лява от параметров волнового процесса: размера контактного пятна a на замещающих сферах в диапазоне 0.5...1.5 мм (a) и от размера замещающих сфер в диапазоне 0.5...0.7 мм (r)

Fig. 7. Dependence of phase velocities of Lyava waves on the parameters of the wave process: on the size of the contact spot on the replacement spheres in the range of 0.5... 1.5 mm (a) and on the size of the replacement spheres in the range of 0.5... 0.7 mm (r)

При вычислениях по (9) значения t и s выбирались как безразмерные натуральные числа. Другой случай формирования слоистой неоднородной среды связан с внедрением в материал слоя дополнительных отражателей (дисков, сфер, цилиндров и т. п.). В [1], [10] приведены данные о дисперсионном уравнении для определения фазовой скорости эффективной продольной волны, распространяющейся вдоль системы цилиндрических полостей, расположение которых представлено на рис. 8.

В общем случае дисперсионное уравнение для рассматриваемого случая имеет вид

$$(1 - \xi)[\xi\phi(x) - \alpha] + (\alpha - \xi)^2\phi(y) = 0, \quad (10)$$

$$\phi(x) = \varepsilon x \frac{J_1(x)Y_0(\varepsilon x) - Y_1(x)J_0(\varepsilon x)}{J_1(x)Y_1(\varepsilon x) - Y_1(x)J_1(\varepsilon x)},$$

$$\phi(y) = \varepsilon y \frac{J_1(y)Y_0(\varepsilon y) - Y_1(y)J_0(\varepsilon y)}{J_1(y)Y_1(\varepsilon y) - Y_1(y)J_1(\varepsilon y)},$$

где символы J_0 , J_1 , Y_0 , Y_1 – функции Бесселя и Неймана нулевого и первого порядков соответственно [10]; $\varepsilon = a_1/b_1$ – степень сплошности; a_1 и b_1 – диаметр цилиндров и расстояние между цилиндрами соответственно;

$$x = k_1 b_1 \sqrt{2\alpha - \xi}; \quad y = k_1 b_1 \sqrt{1 - \xi}; \quad \alpha = \frac{1 - \nu}{1 - 2\nu},$$

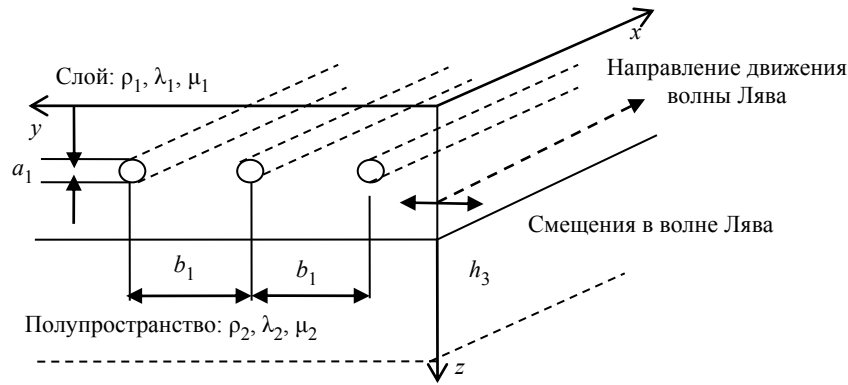


Рис. 8. Система координат и схема образования и распространения волны Лява в слое неоднородной среды с цилиндрическими каналами на упругом полупространстве

Fig. 8. Coordinate system and diagram of formation and propagation of a Lyava wave in a layer of inhomogeneous medium with cylindrical channels on an elastic half-space

где k_l и k_t – волновые числа продольной и поперечной волны, соответственно.

Уравнение (10) имеет положительный вещественный корень, равный отношению $\xi = c_l/c_{le}$, – отношение фазовых скоростей продольных волн в исходной среде и эффективной среде с цилиндрическими каналами. Для упрощения в низкочастотном приближении в (10) следует сохранить в разложении цилиндрических функций только слагаемые с точностью до u^2 (и может принимать значения x и y), можно получить:

$$\phi(u) = \frac{2\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \left[\frac{u^2}{8} \left(\frac{4 \ln(1/\varepsilon)}{1-\varepsilon^2} - 3 + \varepsilon^2 \right) - 1 \right]. \quad (11)$$

Подстановка (11) в (10) позволяет получить выражение для фазовой скорости эффективной продольной волны

$$c_{le} = c_l \frac{1 - \gamma(k_l b_1)^2 / 2}{\sqrt{\frac{1 + \varepsilon^2 / (1 - 2\nu)}{1 + \varepsilon^2 [1 + \nu / (1 - \nu)]}}}, \quad (12)$$

где

$$\gamma = \frac{\frac{4 \ln(1/\varepsilon)}{1 - \varepsilon^2} - 3 + \varepsilon^2}{2} \times \frac{[\varepsilon^2 \nu / (1 - 2\nu)]^2}{\{1 + \varepsilon^2 [1 + \nu / (1 - \nu)]\} [1 + \varepsilon^2 / (1 - 2\nu)]}.$$

Как следует из анализа выражений (12), значение эффективной фазовой скорости в среде с каналами всегда меньше значения фазовой скорости в монолитной упругой среде, а различие этих скоростей возрастает с ростом коэффициента Пуассона и степени сплошности, что физически корректно.

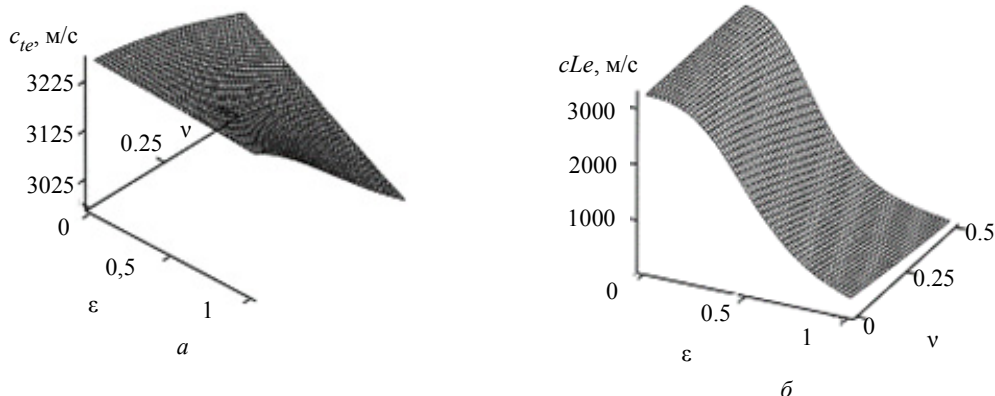


Рис. 9. Зависимости фазовой скорости эффективной поперечной волны (а) и эффективной волны Лява (б) от степени сплошности ε и коэффициента Пуассона ν при распространении в слое с цилиндрическими каналами; $f = 0.5$ МГц, $h_3 = 1$ мм

Fig. 9. Dependence of the phase velocity of effective shear wave versus degree (a) and of the effective wave Lyava on the degree (b) of perforation ε and Poisson's ratio ν , when propagating in a layer with cylindrical channels; $f = 0.5$ MHz, $h_3 = 1$ mm

Проведя аналогичные преобразования для распространяющейся поперечной волны, можно показать, что значение ее фазовой скорости в среде с каналами можно определять по формуле

$$c_{te} = c_{le} \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}. \quad (13)$$

Подстановка выражения (13) в (6) позволяет получить значение фазовой скорости эффективной поперечной волны и волны Лява в слое с цилиндрическими каналами, представленные на рис. 9.

Перейдем к рассмотрению распространения волны Лява при условии нарушенного акустического контакта в приближении «линейного скольжения».

Предполагается, что граница между упругим слоем и упругим полупространством обладает микрошероховатостью, допускающей возникновение проскальзывания в нормальном и тангенциальном направлениях при прохождении через границу упругих волн различных свойств и поляризаций. Уравнения движения для волн Лява запишутся так же, как и для классического случая жесткого контакта [7].

Система координат для постановки соответствующей задачи представлена на рис. 12.

В [11] реализованы попытки формализованного описания явлений, связанных нарушениями качества акустического контакта по аналогии с [4]–[6].

Выражения для тангенциальной KT и нормальной KN жесткостей, характеризующих, соответственно, передачу тангенциальных и нормальных составляющих упругих смещений, согласно [11], имеют вид

$$KT = \frac{\mu_1 \mu_2 c_{l1} c_{l2}}{\mu_1 c_{t1} + \mu_2 c_{t2}} \frac{2\pi(1 - \zeta)}{\omega d^2 \zeta}, \quad (14)$$

$$KN = \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2) c_{l1} c_{l2}}{(\lambda_1 + 2\mu_1) c_{l1} + (\lambda_2 + 2\mu_2) c_{l2}} \frac{2\pi(1 - \zeta)}{\omega d^2 \zeta}, \quad (15)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ – коэффициенты Ламэ; ρ_1, ρ_2 – плотности, $c_{l1}, c_{l2}, c_{t1}, c_{t2}$ – скорости продольной и поперечной волн в граничащих средах (в слоях 1 и 2), как на рис. 1.

В (14), (15) величина ζ – коэффициент перфорации, определяющий степень сплошности вещества у границы по аналогии с [11]. Можно условно положить

$$\zeta = b^2/d^2, \quad (16)$$

где b – средний размер «полости» (участка с отсутствием «акустического» контакта); d – среднее расстояние между соседними микровыступами.

Полученные выражения (14)–(16) – это коэффициенты пропорциональности между малыми разрывами в упругих перемещениях и вызывающими их напряжениями для граничных условий в приближении «линейного скольжения» [11]:

$$\begin{aligned} \sigma_{1xy}|_{z=h_3} &= \sigma_{2xy}|_{z=h_3}; \\ U_{1y}|_{z=h_3} &= U_{2y}|_{z=h_3} + \frac{\sigma_{2xy}|_{z=h_3}}{KT}, \end{aligned}$$

где $\sigma_{1xy}, \sigma_{2xy}$ – компоненты тензора упругих напряжений, а U_{1y}, U_{2y} – компоненты вектора упругих смещений в средах 1 и 2 соответственно.

Как следует из анализа формул (14)–(16), при $\zeta \rightarrow 0$ KN и $KT \rightarrow \infty$, что соответствует сплошному контакту на границе, учитываемому

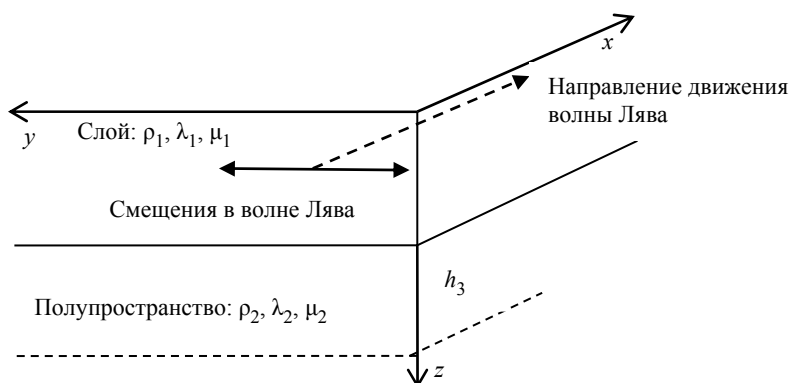


Рис. 10. Система координат для постановки задачи о формировании волны Лява в упругом слое с микрошероховатой границей с упругим полупространством

Fig. 10. Coordinate system for setting the problem of formation of a Lyava wave in an elastic layer with a microroughened boundary with an elastic half-space

классическими граничными условиями. При $\zeta \rightarrow 1$ KN и $KT \rightarrow 0$, что требует формально-го перехода к условиям «свободной» границы.

Следует отметить, что представленная авторами [11] аналитическая модель непосредственно используется на практике при численных оценках значений коэффициентов отражения и прохождения ультразвука на плоской границе раздела твердых сред при нарушениях акустического контакта.

В данной постановке получим дисперсионное уравнение, которое позволяет проанализировать и вычислить фазовую скорость волны Лява:

$$\frac{s_1}{s_2} \left(1 + \frac{1}{KT} \mu_2 s_2 \right) \operatorname{tg}(s_1 h) = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad (17)$$

где $\mu_2 = \rho_2 c_{t2}^2$, $\mu_1 = \rho_1 c_{t1}^2$ – модули сдвига (второй коэффициент Ламэ) материалов полупространства и слоя соответственно; $s_1 = \sqrt{k^2 - k_{t1}^2}$, $s_2 = \sqrt{k^2 - k_{t2}^2}$, k_{t1} и k_{t2} – волновые числа поперечных волн в первой и второй средах соответственно; k – искомое волновое число для волны Лява.

Таким образом, для случая границы с нарушенным акустическим контактом дисперсионное уравнение (17) содержит, по сравнению с уравнением для жесткого контакта, зависящий от частоты множитель $\left(1 + \frac{1}{KT} \mu_2 s_2 \right)$. В результате дисперсионное уравнение становится трансцендентным и может быть решено только численно. Следует также отметить, что при $KT \rightarrow \infty$ полученное уравнение (17) вырождается в уравнение для случая жесткого контакта [7]. Можно показать, что фазовая скорость волны Лява, как и для

случая жесткого контакта, во всем частотном диапазоне изменяется в пределах от скорости сдвиговых волн в слое до скорости сдвиговых волн в полупространстве.

Полученные соотношения можно использовать для проведения вычислений, однако рассмотренная модель, включая выражения (14)–(16), обладает недостатком, так как в ней в явном виде не учитываются реальные параметры шероховатости поверхности слоя, например R_z .

В [11] с учетом предложений [12] этот недостаток был устранен при учете наличия аналитической зависимости между средним расстоянием между микровыступами d и параметрами шероховатости. В частности, при замене микровыступов произвольной формы элементами со сферической поверхностью радиуса R , как показано на рис. 11.

Указанная зависимость имеет вид

$$d = 2\sqrt{2RR_z - (R_z)^2}. \quad (18)$$

Кроме того, для рис. 11 следует учесть, что средний радиус площади контактного пятна $a \approx (2/3)\sqrt{2RR_z}$, откуда $d^2 - b^2 \approx \pi a^2$, [11], [12]. Подстановка этих соотношений в формулы, полученные ранее, позволяет учесть количественно влияние параметров шероховатости на характеристики волн Лява.

По полученным аналитическим выражениям был проведен ряд численных расчетов. На рис. 12 приведен график зависимости тангенциальной контактной жесткости по (14) при заданном значении частоты ультразвука от коэффициента перфорации при заданных значениях среднего расстояния между микровыступами, для системы «металлургический шлак» ($\rho_1 = 2500$ кг/м³; $c_{t1} = 4000$ м/с; $c_{l1} = 1600$ м/с) и «сталь углеродистая» ($\rho_2 = 7800$ кг/м³; $c_{t2} = 5920$ м/с; $c_{l2} = 3230$ м/с, [13]):

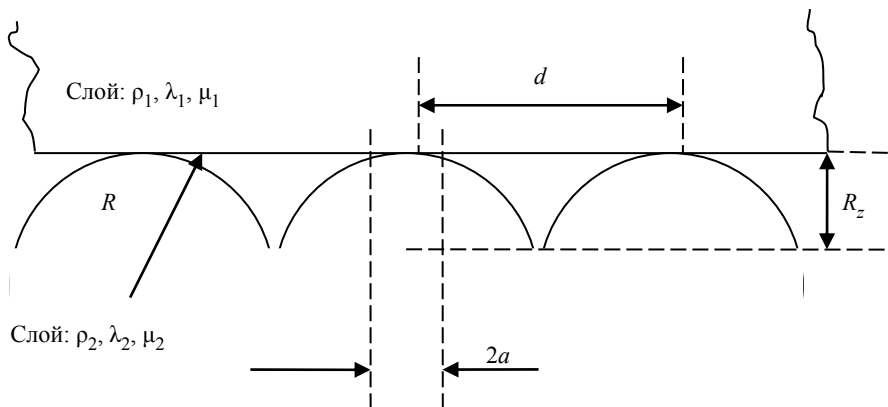


Рис. 11. Схема замещения микровыступов объектами сферической формы для модели шероховатости

Fig. 11. Diagram of replacement of microprotrusions with spherical objects for roughness model

На рис. 13 представлены результаты численного решения дисперсионного уравнения (17) в виде зависимости фазовой скорости волны Лява от коэффициента перфорации при заданных значениях среднего расстояния между микровыступами на частоте 0.5 МГц.

Как и ранее в [7], на графиках представлены результаты вычислений только для «нулевой» моды, а новые волны (моды) будут появляться, как уже отмечалось, на критических частотах.

На рис. 14 представлены зависимости параметра шероховатости R_z от величины среднего расстояния между микровыступами при заданных значениях радиуса замещающей сферы по (18).

В качестве примера на рис. 15 приведены данные вычислений при решении дисперсионного уравнения по (17) по вычислению фазовой скорости волны Лява – c_{Le} в зависимости от параметра шероховатости R_z на границе упругого слоя и упругого полупространства при заданных значениях:

частоты ультразвука $f = 2.0$ МГц и толщины слоя $h_3 = 0.5 \cdot 10^{-3}$ мм. В качестве параметра установлены значения радиуса контактного пятна $a = 1.0, 1.5$ и 2.0 мм.

Видно, что фазовая скорость волны Лява уменьшается, причем скорость волны тем меньше, чем больше коэффициент перфорации и чем больше значение параметра шероховатости (т. е. чем менее жестким является соединение). Как и в [7], на графиках представлены результаты вычислений только для «нулевой» моды, а новые волны (моды) будут появляться, как уже отмечалось, на критических частотах.

Аналогичные зависимости могут быть получены и для других вариантов неоднородных слоев, рассмотренных в настоящей статье, подстановкой соответствующих выражений для контактных жесткостей (15), (16), плотностей и фазовых скоростей поперечных волн в дисперсионное уравнение (17) и его численного решения.

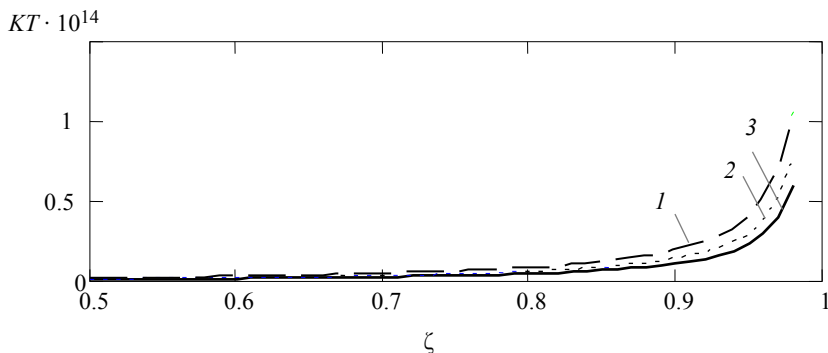


Рис. 12. Зависимости тангенциальной контактной жесткости от коэффициента перфорации при $f = 0.5$ МГц, 1 – $d = 4$ мм; 2 – $d = 3.5$ мм; 3 – $d = 3$ мм
 Fig. 12. Dependence of tangential contact stiffness vs perforation factor; $f = 0.5$ MHz, 1 – $d = 4$ mm; 2 – $d = 3.5$ mm; 3 – $d = 3$ mm

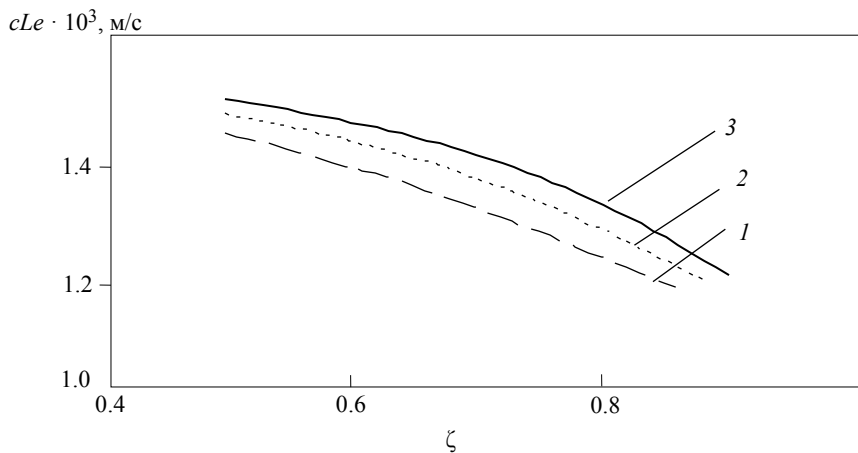


Рис. 13. Зависимости фазовой скорости волны Лява от коэффициента перфорации ζ : $f = 0.5$ МГц; 1 – $d = 4$ мм; 2 – $d = 3.5$ мм; 3 – $d = 3$ мм
 Fig. 13. Dependence of the phase velocity of the Lyava wave on the perforation coefficient ζ : $f = 0.5$ MHz; 1 – $d = 4$ mm; 2 – $d = 3.5$ mm; 3 – $d = 3$ mm

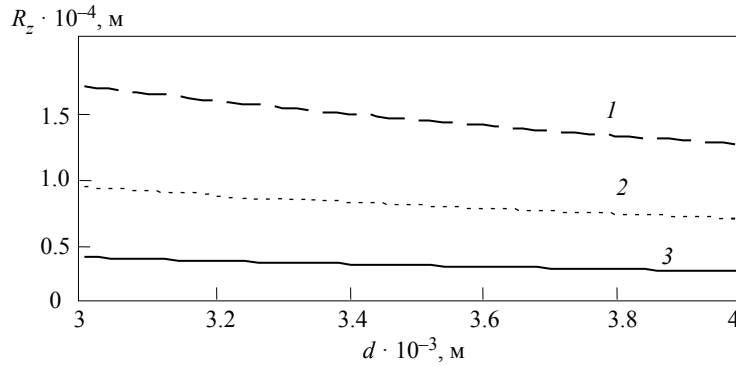


Рис. 14. Зависимости параметра шероховатости от среднего расстояния между микровыступами при заданных размерах радиуса замещающих сфер:
1 – $a = 1$ мм, 2 – $a = 1.5$ мм, 3 – $a = 2$ мм

Fig. 14. Dependence of the roughness parameter on the average distance between the microprotrusions at the given dimensions of the radius of the replacement spheres: 1 – $a = 1$ mm, 2 – $a = 1.5$ mm, 3 – $a = 2$ mm

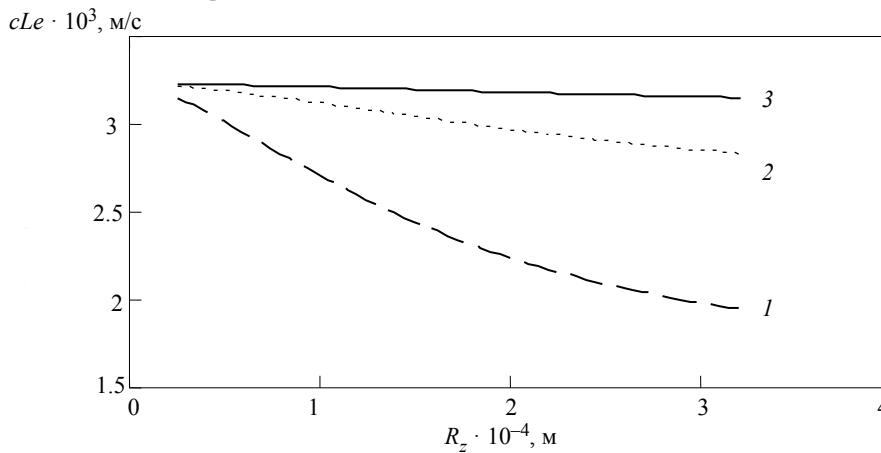


Рис. 15. Зависимости фазовой скорости волны Лява от параметра шероховатости R_z при заданных $f = 2.0$ МГц; $h_3 = 0.5 \cdot 10^{-3}$ м и размерах радиуса замещающих сфер:

1 – $a = 1$ мм, 2 – $a = 1.5$ мм, 3 – $a = 2$ мм

Fig. 15. Dependence of the phase velocity of the Lyava wave on the roughness parameter R_z ; $f = 2.0$ MHz; $h_3 = 0.5 \cdot 10^{-3}$ m at given dimensions of the radius of the replacement spheres:

1 – $a = 1$ mm, 2 – $a = 1.5$ mm, 3 – $a = 2$ mm

Заключение. Разработаны дополнительные модели плоскостойких сред, обладающие сходством реологических элементов с несплошностями технологического происхождения в современных конструкционных металлических и композиционных материалах, имеющие перспективы практического применения в решении задач дефектоскопии и структурометрии.

Для построенной системы моделей получены аналитические выражения, устанавливающие функциональные зависимости фазовых скоростей упругих волн (объемных, поверхностных, нор-

мальных и т. д.) с параметрами структуры учитываемых неоднородностей.

По результатам анализа решений дисперсионных уравнений установлены интервалы изменения значений фазовых скоростей, которые могут быть определены по результатам технических ультразвуковых измерений с точностью, достижимой с помощью современной специальной аппаратуры (толщиномеров, дефектоскопов, структуромеров и т. п.). Это определяет дополнительные перспективы использования разрабатываемых моделей несплошностей перспективных инновационных конструкционных материалов.

Список литературы

1. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 416 с.

2. Потапов А. И., Махов В. Е. Физические основы контроля упругих характеристик анизотропных ком-

позиционных материалов ультразвуковым методом // Дефектоскопия, 2017. № 11. С. 33–49.

3. Экспериментальное исследование возможностей и особенностей ультразвукового контроля деталей, изготовленных по аддитивным технологиям / Н. П. Алешин, В. В. Мурашов, Н. А. Щипаков, И. С. Краснов, Д. С. Ложкова // Дефектоскопия. 2016. № 12. С. 17–24.

4. Schoenberg M. Elastic waves behavior across linear slip interfaces // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. Vol. 68, no. 5. P. 1516–1521.

5. Schoenberg M. Wave propagation in alternating fluid-solid layers // Wave Motion. 1984. Vol. 6. P. 303–320.

6. Schoenberg M., Hsu Ch.-J. Elastic waves through a simulated fractured medium // Geophysics. 1994. Vol. 58, no. 7. P. 964–977.

7. Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах. М.: Наука, 1981. 287 с.

8. Кретов Е. Ф. Ультразвуковой контроль в энергомашиностроении. 4-е изд. СПб.: Изд-во «СВЕН», 2014. 312 с.

9. Быков В. Г. Поглощение упругих волн в тонком слое зернистой среды // Акуст. журн. 1997. Т. 43, № 3. С. 323–328.

10. Лепендин Л. Ф. Акустика. М.: Высш. шк., 1978. С. 446.

11. Аббакумов К. Е. Рассеяние плоских упругих волн на микрошероховатой границе раздела твердых сред // Дефектоскопия. 2017. № 7. С. 3–13.

12. Справочник по триботехнике: в 3 т. Т. 1. Теоретические основы / под общ. ред. М. Хебды, М.: Машиностроение, 1989. 400 с.

13. Аббакумов К. Е., Вагин А. В., Сидоренко И. Г. Акустические характеристики медных сплавов, полученных двойным вакуумным переплавом // Сб. тр. 8-й Междунар. науч.-техн. конф. «Современные методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов». Могилев: Изд-во БРУ, 2022. С. 3–7.

Информация об авторах

Аббакумов Константин Евгеньевич – д-р техн. наук, профессор кафедры электроакустики и ультразвуковой техники, СПбГЭТУ «ЛЭТИ».
E-mail: keabbakumov@etu.ru

Сидоренко Ирина Геннадьевна – ассистент кафедры электроакустики и ультразвуковой техники, СПбГЭТУ «ЛЭТИ».
E-mail: igsidorenko@etu.ru

References

1. Brehovskih L. M., Godin O. A. Akustika sloistyh sred. M.: Nauka, 1989. 416 s. (In Russ.).

2. Potapov A. I., Mahov V. E. Fizicheskie osnovy kontrolja uprugih harakteristik anizotropnyh kompozicionnyh materialov ultrazvukovym metodom // Defektoskopija, 2017. № 11. S. 33–49. (In Russ.).

3. Eksperimentalnoe issledovanie vozmozhnostej i osobennostej ultrazvukovogo kontrolja detalej, izgotovlennyh po additivnym tehnologijam / N. P. Aleshin, V. V. Murashov, N. A. Shchipakov, I. S. Krasnov, D. S. Lozhkova // Defektoskopija. 2016. № 12. S. 17–24.

4. Schoenberg M. Elastic waves behavior across linear slip interfaces // J. Acoust. Soc. Amer. 1980. Vol. 68, no. 5. P. 1516–1521. (In Russ.).

5. Schoenberg M. Wave propagation in alternating fluid-solid layers // Wave Motion. 1984. Vol. 6. P. 303–320.

6. Schoenberg M., Hsu Ch.-J. Elastic waves through a simulated fractured medium // Geophysics. 1994. Vol. 58, no. 7. P. 964–977.

7. Viktorov I. A. Zvukovye poverkhnostnye volny v tverdyh telah. M.: Nauka, 1981. 287 s. (In Russ.).

8. Kretov E. F. Ultrazvukovoj kontrol v ehnergoma-shinostroenii. 4-e izd. SPb.: Izd-vo «SVEN», 2014. 312 s. (In Russ.).

9. Bykov V. G. Pogloshchenie uprugikh voln v tonkom sloe zernistoj sredy // Akust. zhurn. 1997. T. 43, № 3. S. 323–328. (In Russ.).

10. Lependin L. F. Akustika. M. Vyssh. shk., 1978. S. 446. (In Russ.).

11. Abbakumov K. E. Rasseyanie ploskih uprugih voln na mikrosherohovatoj granice razdela tverdyh sred // Defektoskopija. 2017. № 7. S. 3–13. (In Russ.).

12. Spravochnik po tribotehnike: v 3 t. T. 1. Teoreticheskie osnovy / pod obshh. red. M. Hebdy, M.: Mashinostroenie, 1989. 400 s. (In Russ.).

13. Abbakumov K. E., Vagin A. V., Sidorenko I. G. Akusticheskie harakteristiki mednyh spлавov, poluchennyh dvojnym vakuumnym pereplavom // Sb. tr. 8-j Mezhdunar. nauch.-tehn. konf. «Sovremennye metody i pribory kontrolja kachestva i diagnostiki sostojaniya obektov». Mogilev: Izd-vo BRU, 2022. S. 3–7. (In Russ.).

Information about the authors

Konstantin E. Abbakumov – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Department of Electroacoustics and Ultrasound Technology, Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: keabbakumov@etu.ru

Irina G. Sidorenko – Assistant Professor of the Department of Electroacoustics and Ultrasound Technology, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: igsidorenko@etu.ru

Статья поступила в редакцию 22.12.2025; принята к публикации после рецензирования 27.01.2026; опубликована онлайн 27.04.2026.

Submitted 22.12.2025; accepted 27.01.2026; published online 27.04.2026.
