УДК 519.622.2

С. В. Горяинов, Ш. С. Фахми
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Проектирование генераторов сигнала на основе динамических систем с детерминированным хаосом

Рассматривается проектирование генераторов сигналов на основе систем с детерминированным хаосом. Приводятся характерные особенности систем с детерминированным хаосом при моделировании и построений обратного во времени решения. Описывается понятие реверсивности и алгоритм вычисления ошибки реверсивности. Приводится методология построения реверс-диаграмм для произвольной математической системы. Приводятся результаты исследования обратимости композиционного метода численного интегрирования четвертого порядка точности на основе метода Верле при моделировании модели системы с мемристивным элементом. Демонстрируется эффективность предложенного инструментария при поиске параметров нелинейной динамической системы, при которых она сохраняет хаотический режим работы. Описаны преимущества использования предложенного инструментария при проектировании генераторов сигнала. Сделаны выводы о применимости предложенного подхода к проектированию генераторов сигналов при решении задач различных классов.

Генератор сигнала, системы с детерминированным хаосом, обратимость во времени, реверсивность, методы численного интегрирования, компьютерный эксперимент

Генераторы сигнала используются при проектировании широкого спектра приборов – гидролокаторов, радиоприемников, телевизионных приемников, мобильных телефонов и др. Основной задачей подобных устройств является точная и безопасная передача информации от передатчика к приемнику. С целью повышения качественных характеристик генераторов часто используются широкополосные сигналы.

Их применение позволяет повысить устойчивость сигнала к естественному шуму среды и перекрестным помехам (наложение сигналов, ошибочное принятие сигнала от другого источника). С точки зрения безопасности широкополосные сигналы менее различимы в среде и сложнее поддаются расшифровке за счет сложной формы несущего сигнала.

Наибольшее распространение в настоящее время получил подход линейной частотной модуляции сигнала, который, однако, имеет свои недостатки. Как указано в [1], затраты коммерческих фирм, необходимые для обеспечения бесперебойной работы большого числа гидролокаторов, построенных по единому принципу, оказываются больше, чем затраты на обеспечение поочередной работы нескольких групп гидролокаторов.

В данной статье рассматривается альтернативный подход к проектированию генераторов сигнала: использование в качестве несущего сигнала реверсивного решения нелинейной системы с детерминированным хаосом.

Сложность реализации подобного подхода связана с тем, что любой дискретный оператор вносит искажения в порождаемую модель [2], [3]. Реверсивность дискретной модели зависит как от того, была ли реверсивна исходная система, так и от симметрии использованного оператора. Симметричность метода приобретает особую значимость при построении на его основе вычислительных схем, использующих отрицательные значения шага моделирования, например композиционных алгоритмов [4], [5].

Другим важным аспектом при работе с системами с детерминированным хаосом является их сильная зависимость он начальных условий: незначительное изменение начальных параметров моделирования может привести не только к смене вида продуцируемого сигнала, что служит преимуществом с точки зрения рассматриваемой задачи, но и к возникновению затухания или периодического (квазипериодического) режима, представляющих собой нежелательные состояния.

Таким образом, цель статьи состоит в исследовании поведения систем с детерминированным хаосом при различных вариациях условий моделирования, а также разработке автоматизированного инструментария, упрощающего проектирование генераторов на основе систем с детерминированным хаосом.

Реверсивность модели. Под реверсивностью (обратимостью во времени) модели понимается ее возможность вернуться в предыдущие состояния при использовании отрицательного шага интегрирования. Понятие реверсивности тесно связано с сохранением многих свойств моделируемой системы, например ее полной энергии в случае гамильтоновых систем.

Свойством обратимости во времени обладают большинство гамильтоновых систем, а также некоторые системы с детерминированным хаосом вне особых состояний, – таких, как бифуркации и сингулярности [6].

Первым этапом исследования нелинейной системы с детерминированным хаосом становится получение значений параметров, при которых она сохраняет стабильное поведение, а также детектирование особых состояний, проявившихся на заданном интервале времени.

Для определения ошибки обратимости во времени используется следующий алгоритм:

1. Определяются значения начальных условий $x_0(t_0)$, параметров системы, допустимой ошибки tol.

2. Осуществляется моделирование на интервале времени t с шагом h, сохраняются значения $x(t_i)$, возникающие в ходе моделирования.

3. Осуществляется моделирование из последней точки с шагом $-h$ на заданный интервал, сохраняются значения $x_{\text{new}}(t_i)$, полученные в ходе обратного моделирования.

4. Последовательно вычисляется ошибка $e_i = |x(t_i) - x_{\text{new}}(t_i)|$.

5. Если e на этапе расчета становится больше tol, то реверсивность системы считается нарушенной и отсчет времени обратимости останавливается.

6. Если при дальнейшем расчете e_i становится меньше tol, предыдущий момент времени помечается как пик погрешности, а расчет времени реверсивности продолжается.

При визуализации результатов исследования обратимости системы во времени используются реверс-диаграммы, демонстрирующие ошибки обратимости, полученные при различных комбинациях параметров, в двумерной диаграмме. На вертикальной и горизонтальной осях фиксируются значения исследуемых параметров системы; для отображения времени, в течение которого удалось сохранить обратимость решения, используется цветовая шкала: так, белые зоны соответствуют комбинациям параметров, при которых обратимое решение получено не было, черные – параметрам, при которых обратимое решение присутствует на всем заданном интервале времени.

Для исследования характера протекающих процессов была разработана диаграмма пиков погрешности реверсивности. Аналогично реверс-диаграммам белые зоны графика соответствуют значениям параметров, при которых не было обнаружено пиков погрешности, что соответствует затухающему или периодическому режимам моделируемой системы, черные – значениям параметров, при которых количество пиков было максимально.

Исследуемая динамическая система. В работе исследуется нелинейная динамическая система, описывающая модель цепи с использованием мемристора, представленная в [7], нормальная форма Коши которой имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2; \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{1}{3}\left[x_1 + \left(0.5x_3^4 - 1.5x_3^2 - \beta\right)x_2\right]; \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -x_2 - \alpha x_3 + x_2^2 x_3, \end{cases} \qquad (*)$$

где x_1, x_2, и x_3 – переменные состояния системы; α и β – параметры нелинейности.

Эволюция системы (*) во времени представлена на рис. 1, где используются параметры моделирования: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $\alpha = 0.9$, $\beta = 3$; шаг интегрирования $h = 0.001$ с; время моделирования $t = 18$ с.

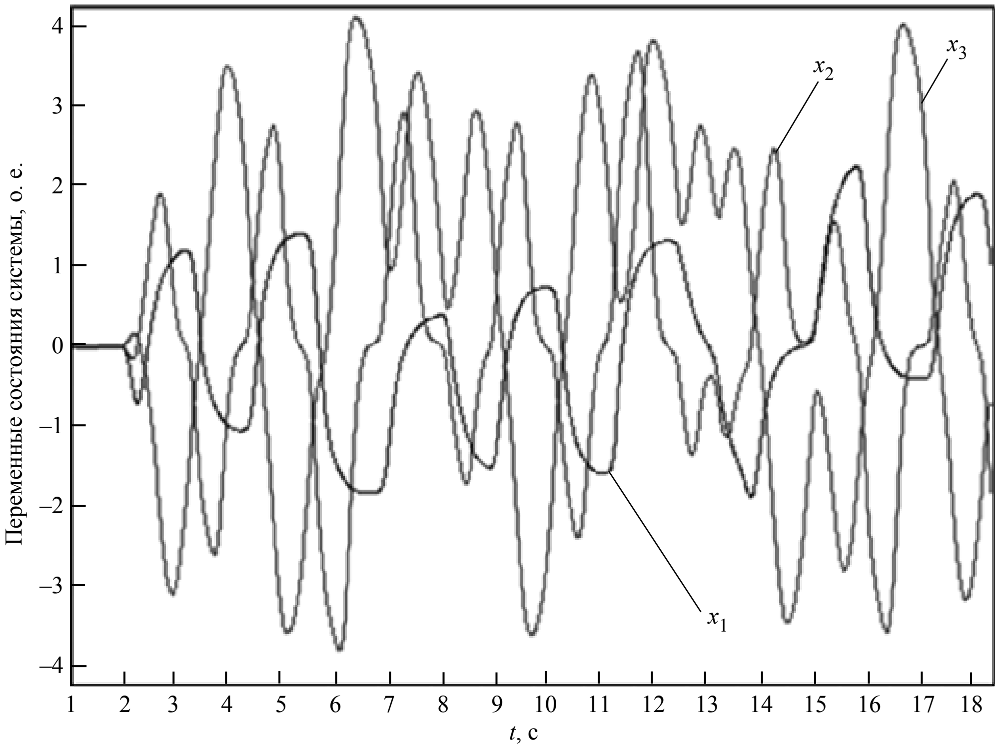

Рис. 1

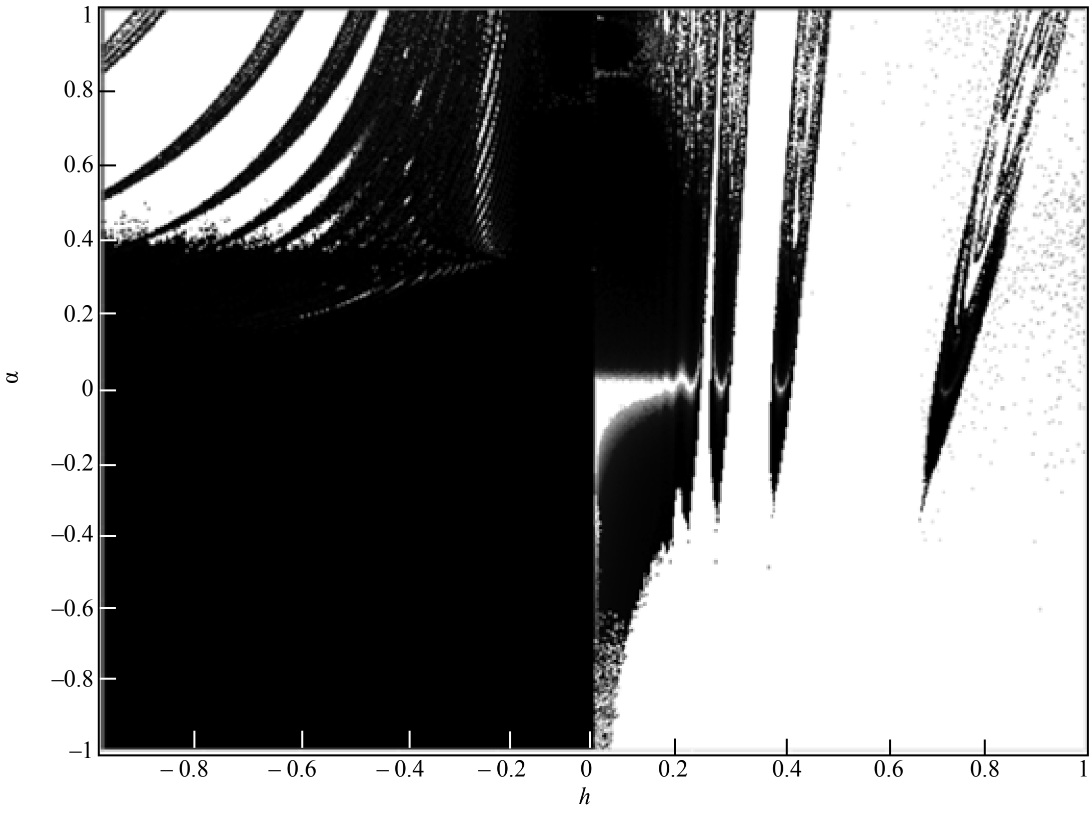

Рис. 2

Выбранная математическая модель описывает систему с детерминированным хаосом, основная сложность моделирования которой обусловлена наличием нескольких нелинейностей в функции правой части. Авторы [7] не приводят никаких сведений о симметричности или реверсивности исходной системы.

Экспериментальные исследования. Для оценки реверсивности системы (*) использовались следующие параметры моделирования: $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $\beta = 3$, $t = 10$. Для построе-

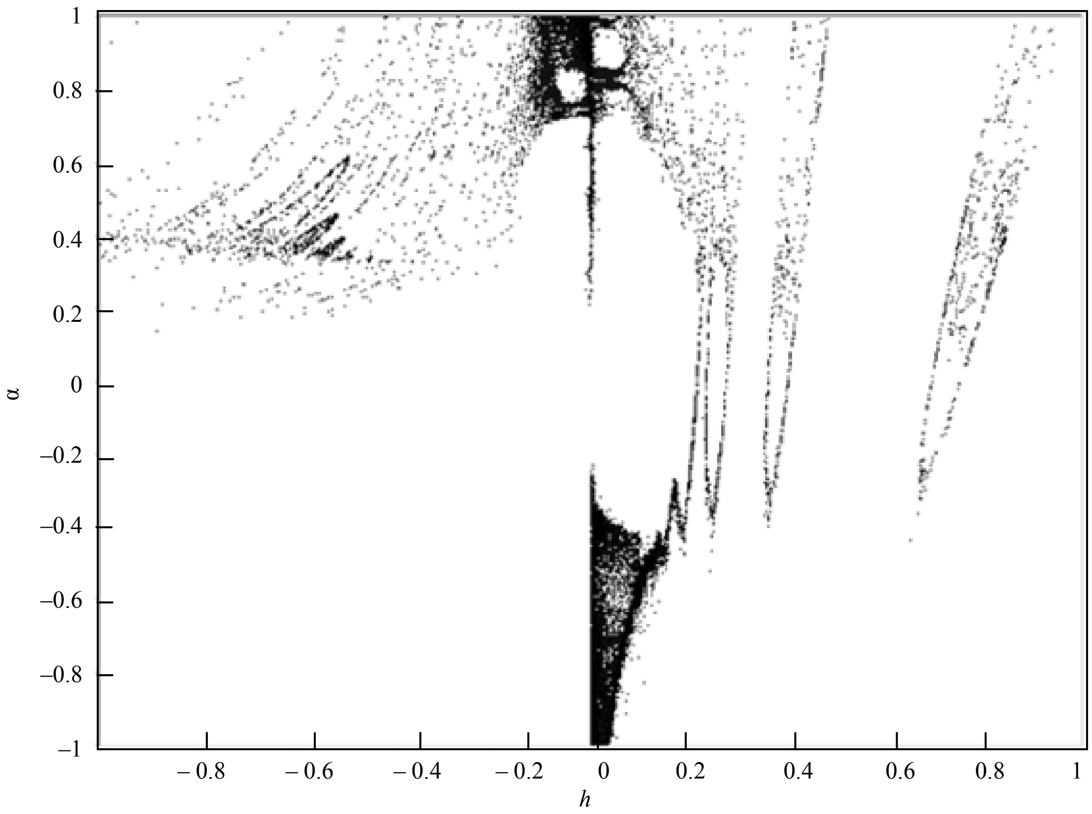

Рис. 3

ния диаграммы, приведенной на рис. 2, рассматривалась вариация параметров α и h в диапазонах [–1;1], в качестве метода интегрирования использовался симметричный полуявный метод Верле.

Полученная диаграмма позволяет получить значения параметров системы, при которых она сохраняет стабильное поведение, однако не позволяет получить информацию о характере протекающих в ней процессов. Для определения режима работы системы было предложено учитывать количество пиков в погрешности реверсивности. На рис. 3 приведена диаграмма пиков для указанных параметров моделирования.

На приведенной диаграмме светлым зонам соответствуют значения параметров, при которых не было обнаружено пиков в ошибке реверсивности. При сравнении диаграмм реверсивности и пиков можно обратить внимание на то, что при отрицательных значениях шага h и параметра α система успешно возвращается в предшествующие состояния, но в ошибке не возникает пиков; на основе этого можно сделать предположение о возникновении сходящегося или гармонического решения. Для проверки этого тезиса рассмотрим поведение системы при параметрах h = –0.5, α = –0.5 (рис. 4) и h = 0.03, α = 0.85 (рис. 5).

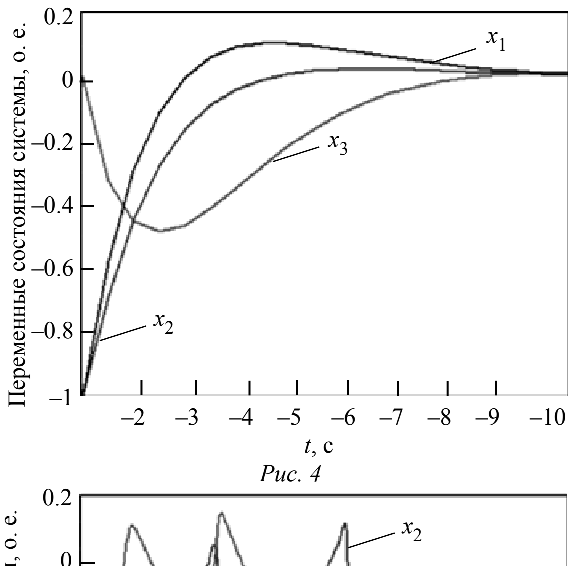

Рис. 4

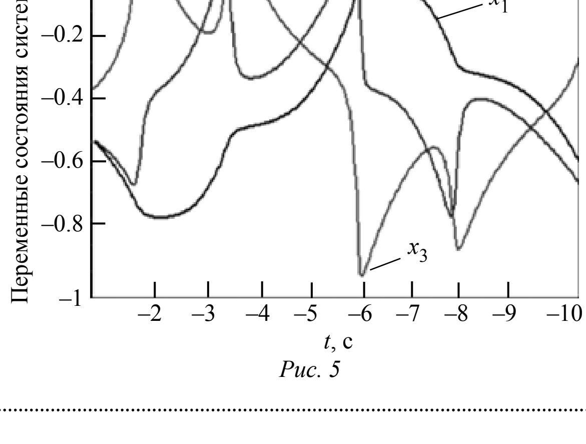

Рис. 5

Согласно ожиданиям, при указанных параметрах было получено сходящееся (рис. 4) и хаотическое (рис. 5) поведение системы.

В данной работе был рассмотрен новый подход к оценке свойств дискретных моделей. Показано, как на основе реверс-диаграмм можно сделать качественные выводы о поведении моделируемой системы, а также о влиянии обратимости опорного метода на свойства вычислительной схемы.

Разработанный инструментарий позволяет существенным образом снизить временные и вычислительные затраты при проектировании генераторов сигнала, основанных на системах с детерминированным хаосом, позволяя в автоматизированном порядке находить значения параметров моделирования, при которых система сохраняет не только обратимость во времени, но и хаотический режим работы.

Использование обратного решения системы с детерминированным хаосом может значительно повысить безопасность за счет того, что форма обратного решения системы в большей мере зависит от выбранного метода интегрирования – так, обратное решение, существующее для одного метода, может отсутствовать при моделировании системы при помощи другого.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Elboth T., Shen H., Khan J. Advances in seismic interference noise attenuation // 79th Annual Intern. Conf. and Exhibition. EAGE extended abstracts. Paris, 2017. URL: https://www.researchgate.net/publication/317549484_Advances_in_Seismic_Interference_Noise_Attenuation (дата обращения 12.12.2020).

2. Geometric numerical integration / E. Hairer, M. Hochbruck, A. Iserles, C. Lubich // Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag, 2006. Vol. 31 of Springer Series in Computational Mathematics.

3. Goryainov S. V., Krasilnikov A. V. Six-body problem solution using symplectic integrators // 2016 IEEE NW Russia Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conf. (EIConRusNW), Saint Petersburg, Russia, 2016. P. 116–119.

4. Kahan W., Li R.-C. Composition constants for raising the orders of unconventional schemes for ordinary differential equations // Mathematics of Computation. 1997. Vol. 66, № 219. P. 1089–1099.

5. Yoshida H. Construction of higher order symplectic integrators // Phys. Let. a. 1990. Vol. 150, № 5. P. 262–268.

6. Karimov A. I., Karimov T. I., Butusov D. N. Time-reversibility in chaotic problems numerical solution // 2016 IEEE NW Russia Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering Conf. (EIConRusNW). Saint Petersburg, Russia, 2016. P. 225–230.

7. McCullough M. H., Muthuswamy B., Iu H. H. C. Chaotic behaviour in a three element memristor based circuit using fourth order polynomial and PWL nonlinearity // Proc. of Intern. symp. on Circuits and Systems (ISCAS) 2013, 19–23 May 2013 Baijing China. URL: https://www.researchgate.net/publication/285767179_Memristor_based_circuit_chaos (дата обращения 24.12.2020).

S. V. Goryainov, Sh. S. Fahmi
Saint Petersburg Electrotechnical University

DESIGN OF SIGNAL GENERATORS BASED ON DYNAMIC SYSTEMS WITH DETERMINISTIC CHAOS

We consider the design of signal generators based on systems with deterministic chaos. The characteristic features of systems with deterministic chaos in the modeling and construction of the time-inverse solution are given. The concept of reversibility and the algorithm for calculating the reversibility error are described. A methodology for constructing reverse diagrams for an arbitrary mathematical system is presented. The results of the study of the reversibility of the composite method of numerical integration of the fourth order of accuracy based on the Wehrle method in modeling a model of a system with a memristive element are presented. The efficiency of the proposed tools is demonstrated when searching for the parameters of a nonlinear dynamical system in which it maintains a chaotic mode of operation. The advantages of using the proposed tools in the design of signal generators are described. Conclusions are drawn about the applicability of the proposed approach to the design of signal generators for solving various classes of problems.

Signal generator, systems with deterministic chaos, time reversibility, reversibility, numerical integration methods, computer experiment