УДК 519.816

О. В. Басков, В. А. Смирнова
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

О применении аксиоматического подхода к сужению множества Парето

Рассматриваются задачи принятия решений, в которых допустимые варианты характеризуются несколькими числовыми критериями, а предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР), выражаются с помощью бинарного отношения предпочтения. При определенных разумных предположениях, описывающих рациональное поведение ЛПР, было доказано, что выбираемые варианты должны быть Парето-оптимальными. Однако в практических задачах множество Парето, как правило, оказывается достаточно широким, так что непосредственный выбор из него затруднителен. Аксиоматический подход к сужению множества Парето призван упростить ЛПР выбор из первоначального множества Парето путем его сужения за счет учета индивидуальных предпочтений. В данной статье анализируется, насколько возможно сузить множество Парето. Показано, что если с помощью учета информации о предпочтениях ЛПР удается сузить множество Парето до единственного варианта, то этот вариант обязательно может быть найден и методом максимизации линейной свертки критериев. Поскольку это условие достаточно сильное, в практических приложениях от аксиоматического подхода не следует ожидать сужения до единственного варианта – окончательный выбор будет оставаться за лицом, принимающим решение.

Многокритериальная оптимизация, сужение множества Парето, аксиоматический подход

Задачи выбора встречаются во многих прикладных областях. Если каждый вариант удается оценить с помощью одного критерия, то полученная задача отыскания экстремума числовой функции оказывается достаточно хорошо изученной. Однако на практике часто возникает потребность оптимизировать сразу несколько показателей, отражающих противоречивые свойства, так что не существует варианта решения, на котором сразу все критерии достигают экстремума. Один из первых подходов к решению таких задач заключался в скаляризации – замене нескольких заданных критериев их линейной комбинацией, коэффициенты которой отражали бы «важность» критериев [1]. Однако выбор коэффициентов сам по себе – проблема нетривиальная, и, кроме того, при таком подходе далеко не все варианты могут оказаться выбранными [2]. Другими словами, использование скаляризации заведомо отбрасывает некоторые варианты решения, которые при других подходах могли бы считаться оптимальными [3]. Желание не производить выбор вместо лица, принимающего решение (ЛПР), было одним из мотивов разработки так называемого аксиоматического подхода [4]. В нем вместо предложения какого-либо конкретного способа выбора ставится задача ограничения круга поиска оптимальных вариантов. При этом требуется выполнение аксиом, постулирующих «разумное» поведение ЛПР, – таких, как транзитивность предпочтений. С помощью этих аксиом удается доказать, что некоторые варианты не могут считаться оптимальными, каким бы ни был способ их окончательного выбора. Однако при минимальных предположениях, когда принимается принцип Эджворта–Парето, отбрасываются лишь варианты, не оптимальные по Парето, и оставшихся, как правило, все еще слишком много для того, чтобы произвести окончательный выбор. Поэтому при определенных дополнительных требованиях лицу, принимающему решение, предоставляется возможность сообщить некоторую информацию о своих предпочтениях с целью дальнейшего отбрасывания заведомо не выбираемых вариантов. В данной статье исследуется вопрос о возможности сужения таким образом множества возможных вариантов до единственного оптимального решения.

Пусть X – множество объектов произвольной природы, представляющих варианты, из которых предстоит выбирать. Пусть каждый вариант x оценивается по нескольким числовым критериям $f_1(x)$, ..., $f_m(x)$, которые можно представить в форме векторного критерия $\mathbf{f}: X \to R^m$. Тогда совокупность значений критериев для данного варианта x будет обозначаться $\mathbf{y} = \mathbf{f}(x)$ и называться возможным вектором. Образ множества всех возможных вариантов под действием векторного критерия будем обозначать через Y и называть множеством возможных векторов. Кроме того, введем в рассмотрение отношение предпочтения $\succ_X$: будем говорить, что $x' \succ_X x''$, если, выбирая из двух вариантов x' и x'', ЛПР выберет первый вариант и не выберет второй. Это отношение естественным образом индуцирует отношение предпочтения $\succ_Y$ на множестве возможных векторов: $x' \succ_X x'' \Leftrightarrow \mathbf{f}(x') \succ_Y \mathbf{f}(x'')$. Будем считать, что среди возможных вариантов нет таких, для которых оценки по всем критериям совпадают. Задача многокритериального выбора заключается в отыскании множества выбираемых решений $C(X)$. При этом предполагается выполнение следующих аксиом.

Аксиома 1 (исключения доминируемых вариантов). Если $x' \succ_X x''$, то $x'' \notin C(X)$.

Другими словами, если некоторый вариант не выбирается из пары, то его не следует выбирать и из всего множества допустимых вариантов.

Аксиома 2 (о продолжении). Существует иррефлексивное транзитивное бинарное отношение $\succ$ на пространстве R^m, сужение которого на множество возможных векторов совпадает с отношением предпочтения $\succ_Y$.

Эта аксиома накладывает требования иррефлексивности и транзитивности на отношение предпочтения ЛПР. Кроме того, она позволяет предъявлять ЛПР для сравнения не только возможные, но и гипотетические варианты с произвольными значениями критериев.

Аксиома 3 (о согласованности). Если $f_i(x') \geq f_i(x'')$ по всем критериям i = 1, …, m, причем хотя бы одно из этих неравенств выполняется как строгое, то $x' \succ x''$.

Другими словами, предполагается, что ЛПР заинтересовано в максимизации всех критериев. Если какой-то критерий f требуется минимизировать, то его следует заменить на противоположный $-f$.

Аксиома 4 (об инвариантности). Если $\mathbf{y}' \succ \mathbf{y}''$, то для любого числа $\alpha > 0$ и вектора $\mathbf{c} \in R^m$ должно быть выполнено $\alpha\mathbf{y}' + \mathbf{c} \succ \alpha\mathbf{y}'' + \mathbf{c}$.

Эта аксиома накладывает самое жесткое ограничение на отношение предпочтения ЛПР. С ее помощью можно переносить результаты сравнения пары векторов на другие пары, отличающиеся схожим образом.

При выполнении первых трех аксиом справедлив принцип Эджворта–Парето, в соответствии с которым все выбираемые варианты должны быть Парето-оптимальными:

$$C(X) \subseteq P_{\mathbf{f}}(X),$$

где множество Парето-оптимальных вариантов, также называемое множеством Парето, определяется формулой

$$P_{\mathbf{f}}(X) = \{x \in X : \forall x' \in X \, \exists i : f_i(x) > f_i(x')\}.$$

Таким образом, множество Парето-оптимальных вариантов представляет собой оценку сверху для множества выбираемых вариантов. Однако на практике множество Парето $P_{\mathbf{f}}(X)$ часто оказывается достаточно широким, и выбирать непосредственно из него оказывается затруднительно. В связи с этим разрабатываются различные подходы к сужению множества Парето, один из которых связан с применением так называемых квантов информации об отношении предпочтения.

Будем говорить, что вектор $\mathbf{u} \in R^m$ задает квант информации об отношении предпочтения, если у этого вектора есть хотя бы одна строго положительная и хотя бы одна строго отрицательная компоненты и $\mathbf{u} \succ \mathbf{0}$.

На практике кванты информации возникают, например, при сравнении пары оптимальных по Парето вариантов x', x''. Поскольку они оба принадлежат $P_{\mathbf{f}}(X)$, для некоторых индексов i, j будут верны неравенства $f_i(x') > f_i(x'')$, $f_j(x') < f_j(x'')$, а тогда в векторе $\mathbf{u} = \mathbf{f}(x') - \mathbf{f}(x'')$ будут как минимум одна положительная и одна отрицательная компоненты. И если теперь ЛПР скажет, что предпочитает один из этих двух вариантов, например $x' \succ_X x''$, то $\mathbf{f}(x') \succ_Y \mathbf{f}(x'')$, и по аксиоме инвариантности мы сможем написать $\mathbf{u} \succ \mathbf{0}$.

Содержательно отрицательные компоненты кванта информации описывают максимальные размеры уступок по соответствующим критериям, на которые ЛПР готово пойти ради увеличения критериев, соответствующих положительным компонентам кванта, а величины положительных компонент говорят о минимальном желаемом увеличении соответствующих критериев.

Если задан квант информации об отношении предпочтения, следующая теорема позволяет построить более узкую оценку сверху для множества выбираемых вариантов, чем исходное множество Парето.

Теорема 1 [4]. Пусть выполнены аксиомы 1–4, и пусть задан квант с помощью вектора **u**. Тогда для любого множества выбираемых вариантов

$$C(X) \subseteq P_{\mathbf{g}}(X) \subseteq P_{\mathbf{f}}(X),$$

где **g** – новый векторный критерий, компоненты которого суть

$$g_i = f_i \text{ для } i : u_i \geq 0;$$
$$g_{ij} = u_i f_j - u_j f_i \text{ для } i, j : u_j < 0 < u_i.$$

В соответствии с этой теоремой квант информации может быть использован для перестройки векторного критерия, и множество Парето-оптимальных векторов относительно нового векторного критерия даст более точную оценку сверху на множество выбираемых вариантов. Если эта оценка все еще слишком широка для непосредственного выбора, следует продолжить опрашивать ЛПР с целью выявления новых квантов информации

Для иллюстрации использования последней теоремы рассмотрим множество возможных вариантов $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и двумерный векторный критерий $\mathbf{f}$ такой, что

$$\mathbf{f}(x_1) = (0; 5);$$
$$\mathbf{f}(x_2) = (3; 3);$$
$$\mathbf{f}(x_3) = (4; 0).$$

Очевидно, что все имеющиеся варианты оптимальны по Парето.

Зададим теперь квант информации с помощью вектора $\mathbf{u} = (1; -1)$. Поскольку в нем первая компонента положительна, первый критерий сохраняется:

$$g_1 = f_1.$$

Далее, второй новый критерий g_2 получается линейной комбинацией критериев **f**, соответствующих компонентам кванта разных знаков. В данном примере

$$g_2 = u_1 f_2 - u_2 f_1 = f_1 + f_2.$$

Пересчитав множество возможных векторов уже с использованием нового векторного критерия, получим

$$\mathbf{g}(x_1) = (0; 5);$$
$$\mathbf{g}(x_2) = (3; 6);$$
$$\mathbf{g}(x_3) = (4; 4).$$

Так как $(3; 6) \succ (0; 5)$, вариант x_1 теперь доминируется вариантом x_2, так что по первой аксиоме он не должен выбираться. Таким образом, множество Парето относительно нового векторного критерия $P_{\mathbf{g}}(X) = \{x_2, x_3\}$ оказывается у́же по сравнению с исходным множеством Парето относительно векторного критерия **f**. Однако в этом множестве все еще более одного варианта.

Данный пример наглядно иллюстрирует методологию применения аксиоматического подхода. С помощью опроса ЛПР выявляются кванты информации о его предпочтениях, позволяющие сравнить между собой Парето-оптимальные варианты, которые без дополнительной информации были бы несравнимыми. Эта дополнительная информация позволяет построить новый векторный критерий, множество Парето относительно которого будет учитывать предоставленную информацию и потому окажется более узким. Данный процесс можно продолжать до тех пор, пока множество Парето-оптимальных вариантов не сузится настолько, что ЛПР сможет произвести непосредственный выбор из остающихся альтернатив.

Перейдем теперь к описанию алгоритма учета нескольких квантов информации. Пусть задано k квантов $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$. Обозначим орты пространства R^m через $\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m$. Введем в рассмотрение коническую оболочку, т. е. совокупность всех линейных ненулевых неотрицательных комбинаций, ортов и квантов:

$$M = \operatorname{cone}\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k\}.$$

При выполнении аксиом 1–4 отношение предпочтения $\succ$ оказывается конусным, т. е. существует такой конус K, что

$$\mathbf{y}' \succ \mathbf{y}'' \Leftrightarrow \mathbf{y}' - \mathbf{y}'' \in K.$$

При этом K должен быть острым, выпуклым и содержащим все орты пространства R^m. Далее, по определению квантов информации $\mathbf{u}_i \succ \mathbf{0}$, так что $\mathbf{u}_i \in K$, а тогда и $M \subseteq K$. Введем в рассмотрение двойственные конусы M^* и K^*. Для них выполняется встречное включение $K^* \subseteq M^*$. Поскольку конус M был конечнопорожденным, двойственный к нему конус M^* также может быть представлен в виде конической оболочки некоторых векторов $\mathbf{h}_1, ..., \mathbf{h}_p$. Тогда если $\mathbf{h}_i(\mathbf{y}' - \mathbf{y}'') \geq 0$ для всех индексов i, то $\mathbf{y}' - \mathbf{y}'' \in M^{**} = M \subseteq K$ и $\mathbf{y}' \succ \mathbf{y}''$. В этом состоит следующая теорема.

Теорема 2 [5]. Пусть выполнены аксиомы 1–4 и задан набор квантов $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$. Тогда

$$C(X) \subseteq P_{\mathbf{g}}(X) \subseteq P_{\mathbf{f}}(X),$$

где $\mathbf{g}$ – векторный критерий с компонентами

$$g_i = \mathbf{h}_i \mathbf{f},$$

равными скалярным произведениям образующих конуса M^* на векторный критерий $\mathbf{f}$.

Следует особо подчеркнуть, что в силу остроты конуса M двойственный к нему конус будет иметь непустую внутренность, так что ранг его образующих равен m. Если из этих образующих составить матрицу H, то новый векторный критерий $\mathbf{g} = H\mathbf{f}$, причем $\operatorname{rank} H = m$.

Рассмотрим вопрос о предельной возможности сужения множества Парето. Если целью ЛПР является выбор единственного варианта, то в идеале последовательным учетом квантов хотелось бы добиться сужения множества Парето-оптимальных векторов до этого выбираемого варианта. Однако, как показывает следующий пример, это далеко не всегда возможно.

Пусть $m = 2$. В качестве множества возможных векторов возьмем $Y = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$, где

$$\mathbf{y}_1 = (0; 3);$$
$$\mathbf{y}_2 = (1; 1);$$
$$\mathbf{y}_3 = (3; 0).$$

Очевидно, что все три вектора – оптимальные по Парето. Оказывается, что, какими бы ни были кванты информации, невозможно построить векторный критерий $\mathbf{g}$ так, чтобы $P_{\mathbf{g}}(Y) = \{\mathbf{y}_2\}$. Действительно, если бы это удалось, это означало бы, что $(1; 1) \succ (0; 3)$ и $(1; 1) \succ (3; 0)$. Но в таком случае по аксиоме инвариантности

$$(1; 1) - (0; 3) = (1; -2) \succ \mathbf{0};$$
$$(1; 1) - (3; 0) = (-2; 1) \succ \mathbf{0},$$

откуда и

$$(1; -2) + (-2; 1) = (-1; -1) \succ \mathbf{0},$$

что противоречит аксиоме согласованности. Таким образом, далеко не всегда есть возможность сузить оценку сверху для множества выбираемых вариантов непосредственно до самого этого множества.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие возможности сужения оценки для множества выбираемых вариантов до множества из единственного элемента.

Теорема 3. Для того чтобы существовал конечный набор квантов информации, учет которых приводил бы к векторному критерию $\mathbf{g}$, для которого множество Парето-оптимальных вариантов $P_{\mathbf{g}}(X)$ состоит из единственного варианта x^*, необходимо и достаточно, чтобы существовал набор m линейных сверток критериев $\gamma_{i1} f_1 + ... + \gamma_{im} f_m$ с положительными коэффициентами γ_{ij}, матрица из которых имеет ранг m достигающих максимума на X в единственной точке x^*.

Доказательство. *Необходимость.* Известно, что всякая точка максимума линейной свертки критериев с положительными коэффициентами является Парето-оптимальной. Поскольку множество $P_{\mathbf{g}}(X)$ состоит из единственной точки, указанная свертка имеет единственный максимум на множестве возможных вариантов. При учете квантов информации компоненты векторного критерия $\mathbf{g}$ строятся как линейные комбинации компонент исходного векторного критерия $\mathbf{f}$ с неотрицательными коэффициентами. Поэтому указанная свертка критериев $\mathbf{g}$ одновременно является и искомой линейной сверткой критериев $\mathbf{f}$. В силу произвольности выбора коэффициентов свертки $\mathbf{g}$ можно построить m требуемых линейных сверток. Необходимость доказана.

Геометрически в качестве вектора коэффициентов линейной свертки можно взять любой вектор, принадлежащий конусу K^*. Тогда условие

$$\gamma_1 f_1(x^*) + ... + \gamma_m f_m(x^*) \geq \gamma_1 f_1(x) + ... + \gamma_m f_m(x)$$

равносильно

$$\gamma_1 \left[f_1(x^*) - f_1(x) \right] + ... + \gamma_m \left[f_m(x^*) - f_m(x) \right] \geq 0.$$

Это выполняется для любого вектора $(\gamma_1, ..., \gamma_m) \in K^*$ в случае, если $\mathbf{f}(x^*) - \mathbf{f}(x) \in K$, т. е. $x^* \succ_X x$.

Эти геометрические представления помогут обосновать *достаточность*. В качестве искомых квантов информации следует взять образующие пересечения всех полупространств, задаваемых неравенствами $\gamma_{i1}y_1 + ... + \gamma_{im}y_m \geq 0$. Указанное пересечение представляет собой острый конус в силу условия на ранг матрицы γ_{ij}. Кроме того, этот конус содержит все орты пространства R^m. Обозначим его через M. Тогда учет таких квантов приведет к пересчету векторного критерия $\mathbf{f}$ с помощью матрицы H, составленной из образующих двойственного конуса M^*, которыми по построению оказываются векторы $(\gamma_{i1}, ..., \gamma_{im})$ и только они. Таким образом, $g_i = \gamma_{i1}f_1 + ... + \gamma_{im}f_m$. Поскольку указанные линейные свертки достигают максимума в единственной точке x^*, для всех $x \in X$ будет выполнено $\mathbf{g}(x^*) \geq \mathbf{g}(x)$. Поэтому $P_{\mathbf{g}}(X) = \{x^*\}$, что и требовалось.

Доказанная теорема свидетельствует о том, что ожидать от аксиоматического подхода сужения множества Парето до единственной точки, вообще говоря, не следует. Хотя каждая точка максимума линейной свертки критериев с положительными коэффициентами Парето-оптимальная, обратное неверно: с помощью максимизации такой свертки можно получить далеко не всякое Парето-оптимальное решение. В качестве примера можно снова привести множество

$$Y = \{(3; 0),\ (1; 1),\ (0; 3)\},$$

для которого точка (1; 1) не является точкой максимума ни одной линейной свертки критериев с положительными коэффициентами. В указанном свете условие теоремы о существовании сразу нескольких сверток, достигающих максимума на данном решении, кажется особенно жестким. В общем случае этого ожидать не приходится. Поэтому при применении аксиоматического подхода к сужению множества Парето стоит рассчитывать лишь на то, что произведенного сужения окажется достаточно для последующего непосредственного выбора, или же необходимо комбинировать этот подход с другими приемами решения задач многокритериального выбора (см. [4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Miettinen K. Nonlinear Multiobjective Optimization. Kluwer Academic Publishers, 1999.

2. Ногин В. Д. Проблема сужения множества Парето: подходы к решению // Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. № 1. С. 98–112.

3. Ногин В. Д. Линейная свертка в многокритериальной оптимизации // Искусственный интеллект и принятие решений. 2014. № 4. С. 73–82.

4. Noghin V. D. Reduction of the Pareto set: an axiomatic approach. Springer, 2018.

5. Ногин В. Д., Басков О. В. Сужение множества Парето на основе учета произвольного конечного набора числовой информации об отношении предпочтения // Докл. АН. 2011. Т. 438, № 4. С. 1–4.

O. V. Baskov, V. A. Smirnova
Saint Petersburg Electrotechnical University

ON APPLICATION OF AXIOMATIC APPROACH TO PARETO SET REDUCTION

Decision making problems where possible choices are evaluated by several numeric criteria and preferences of the decision maker are described by a binary relation are considered. Under certain rational assumptions, characterizing reasonable behaviour of the decision maker, it was proven that the selected choices must be Pareto optimal. However, in most cases the Pareto set is too wide for the decision maker to determine the final choice directly. Axiomatic approach to Pareto set reduction aims at simplifying the task of selecting the final choice from the Pareto set by narrowing it with the use of the decision maker's individual preferences. The extent to which the Pareto set can be reduced is studied. It is shown that if accounting for the decision maker's preferences makes it possible to narrow the Pareto set to a single choice, then there must exist a linear combination of the criteria that attains maximum at that choice. As this condition is quite strong, in practice one should not expect that the axiomatic approach would narrow the Pareto set down to a single choice. The final choice should always be made by the decision maker.

Multicriteria optimization, Pareto set reduction, axiomatic approach