

УДК 681.51.011

С. Е. Абрамкин, С. Е. Душин, Д. Д. Сирота
Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Разработка математической модели системы «ПЛАСТ – ГАЗОВАЯ СКВАЖИНА»

Представлены математические модели установившейся и неуставившейся изотермической фильтрации газа. Для случая распределения давления в призабойной зоне пласта вокруг одиночной скважины построена численная модель фильтрации газа, аппроксимирующая граничную задачу неявной четырехточечной схемой методом прогонки, при допущениях постоянства плотности и вязкости газа, проницаемости и упругоэластичности породы. Представленная модель позволяет рассчитывать и прогнозировать изменение распределения давления в области вокруг скважины. Для полученной численной модели разработан алгоритм компьютерной модели. С помощью компьютерной модели рассчитано распределение давления для скважины, которая дренирует изначально невозмущенный пласт в течение 30 суток. Приведены графики распределения поля давлений при использовании компьютерной модели. В моделировании приняты граничные условия 1-го и 2-го рода для контура питания и забоя скважины соответственно. Полученные результаты могут быть применены для разработки систем управления газодобывающими объектами с целью рационального использования пластовой энергии и повышения коэффициента извлечения газа.

Модель неуставившейся фильтрации газа, численная модель фильтрации газа, компьютерная модель фильтрации газа, распределение давления в однородном газовом пласте

Основной целью моделирования пластовых систем является предсказание состояния и анализ возможности управления фильтрацией для увеличения эффективности газоотдачи. В традиционных курсах по теории разработки месторождений чаще всего рассматриваются осредненные объекты, например балансные модели, не позволяющие учесть изменения пластовых параметров во времени и пространстве (стационарные модели). При создании динамических моделей можно исследовать пласт более детально за счет разбиения его на блоки и применения к каждому из них уравнений фильтрации (метод конечных элементов [1]), что позволяет моделировать нестационарные процессы в пласте. В связи с этим возникает необходимость разработки математических и компьютерных моделей процессов фильтрации в пласте, а также программного обеспечения численного моделирования. Таким образом, основные задачи данной работы сводятся к построению:

- непрерывной математической модели (ММ) пласта, представленной дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП);
- численной модели пласта в виде конечно-разностных уравнений;
- компьютерной модели пласта.

Математическая модель установившейся фильтрации. Установившаяся фильтрация характеризуется тем, что в каждой фиксированной точке пространства, где происходит движение флюида, все гидродинамические величины не зависят от времени. Математические модели изотермической однофазной фильтрации в изотропной пористой среде учитывают закон сохранения массы, закон сохранения импульса (в виде закона фильтрации Дарси) и определяющие уравнения в виде зависимости плотности, пористости, проницаемости, вязкости от давления [2]:

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

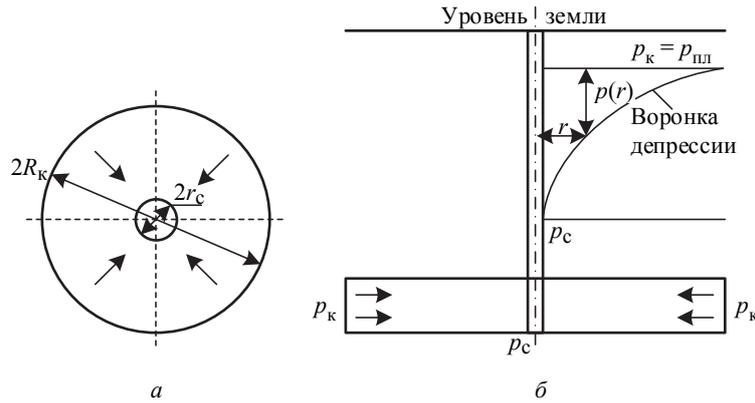


Рис. 1

$$w = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \right), \quad (2)$$

$$\rho = \text{const}, \quad k = \text{const}, \quad \mu = \text{const},$$

где p – давление; k – проницаемость; μ – вязкость; ρ – плотность газа; w – скорость фильтрации. В таком случае, при подстановке уравнения движения (2) в уравнение неразрывности (1) получается уравнение установившейся фильтрации:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0.$$

Модель одномерной установившейся фильтрации в цилиндрической системе координат. Пусть в круговом пласте радиуса R_k с давлением $p_{пл}$ расположена скважина радиуса r_c , на забое которой поддерживается постоянное давление p_c (рис. 1: *a* – вид сверху; *б* – вид сбоку). На боковой поверхности границы пласта также поддерживается постоянное давление p_k и через нее происходит приток флюида, равный дебиту скважины; r – расстояние от оси скважины. Фильтрация считается установившейся.

При плоскорадиальной симметрии скважины в предположении, что параметры плотности газа, пористости породы, проницаемости и вязкости постоянны [3], система уравнений принимает вид

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dp}{dr} \right) = 0; \quad w = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr},$$

где r – расстояние от оси скважины до точки измерения.

Распределение давления в пласте определяется следующей формулой [2]:

$$p(r) = p_k - \frac{Q\mu}{2\pi kh} \ln \frac{R_k}{r},$$

где p_k – давление на контуре питания, Па; Q – дебит скважины, м³/ч; R_k – радиус контура питания; h – толщина продуктивного пласта, м.

Модель неустановившейся фильтрации упругой жидкости и газа в упругом пласте. Для процессов, происходящих в нефтяных и газовых пластах, зависимость различных параметров от времени существенна. Такие процессы называются неустановившимися (нестационарными). Задачи неустановившихся движений жидкости и газа в пласте решаются методами математической физики. Для неустановившихся процессов характерно перераспределение пластового давления, изменение во времени скоростей фильтрации, дебитов скважин и т. п. Количественные характеристики неустановившихся процессов зависят от упругих свойств пластов и насыщающих их жидкостей. Основной формой пластовой энергии, обеспечивающей приток жидкости к скважинам на рассматриваемых режимах, является энергия упругой деформации жидкостей и твердого скелета пласта. Математическая модель неустановившейся фильтрации газа в деформируемой пористой среде при допущениях, что проницаемость и вязкость постоянны, формируется подстановкой закона Дарси в уравнение неразрывности радиального потока [4]. Тогда уравнение неразрывности радиального потока газа:

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial r} + \frac{1}{r} \rho w = -m \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right),$$

где m – пористость; t – время.

В результате ММ неустановившейся фильтрации газа имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} \right)_{\kappa} = \frac{\partial p}{\partial t}, \quad \kappa = \frac{k}{\mu(\beta_{\pi} + m\beta_{\Gamma})}, \quad (3)$$

$$\beta_{\pi} = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial m}{\partial p}, \quad \beta_{\Gamma} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p},$$

где κ – коэффициент пьезопроводности; β_p, β_r – коэффициенты сжимаемости породы и газа соответственно; V – объем породы-коллектора.

Уравнение (3) – основное уравнение теории упругого режима фильтрации. По предложению Н. В. Щелкачева [3] оно названо уравнением пьезопроводности. Уравнение пьезопроводности относится к уравнениям типа теплопроводности. Коэффициент κ характеризует скорость перераспределения пластового давления при неустановившейся фильтрации упругой жидкости в упругой пористой среде.

Построение численной модели фильтрации газа. При решении ДУЧП весьма часто используется метод конечных разностей (МКР). Идея МКР решения краевых задач заключается в том, что вместо производных в дифференциальном уравнении используются их конечно-разностные аппроксимации. При использовании МКР для задач моделирования пластовых систем геометрию пласта представляют совокупностью узлов. Аппроксимируя частные производные дифференциального уравнения конечными разностями, получают систему линейных алгебраических уравнений для определения давления как локальной характеристики в каждом узле сетки. Полученная система является незамкнутой; для ее замыкания используют разностные представления граничных условий.

Начальные и граничные условия запишутся следующим образом [5]:

$$\begin{aligned} t=0: \quad p &= p_0, \quad 0 \leq r \leq R_K; \\ r=0: \quad -\kappa \frac{\partial p}{\partial r} &= q, \quad t > 0; \\ r=R: \quad p &= p_K, \end{aligned}$$

где p_0 – пластовое давление в начальный момент времени (на момент расчета); R_K – радиус контура питания; p_K – давление на контуре питания; q – расход газа в работающей скважине.

Для решения сформулированной краевой задачи воспользуемся МКР на основе неявной четырехточечной схемы, так как неявные схемы обладают повышенными свойствами устойчивости по сравнению с явными, хотя и уступают им в быстродействии. В результате аппроксимации частных производных соответствующими конечными разностями получается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\tau} &= \frac{\kappa}{r_i h^2} \times \\ &\times \left[r_{i+1/2} p_{i+1}^{n+1} - (r_{i-1/2} + r_{i+1/2}) p_i^{n+1} + r_{i-1/2} p_{i-1}^{n+1} \right], \\ i &= 2, \dots, N-1, \quad n = 0, 1, \dots, M, \\ r=0: \quad -\kappa \frac{\partial p}{\partial r} &= q, \quad t > 0, \\ r=R: \quad p &= p_K, \\ r_i &= (i-1)h, \quad i = 1, \dots, N, \\ r_1 = 0, \dots, r_N &= R, \quad h = \frac{R}{N-1}, \quad h > 0, \end{aligned}$$

$$t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots, M, \quad t_0 = 0, \dots, t_M = t_{\text{кон}}, \quad \tau > 0,$$

где τ – шаг интегрирования по временной координате; h – шаг по пространственной координате; $t_{\text{кон}}$ – конечное время моделирования, сут.

Полученную систему можно записать компактнее, если ввести обозначения:

$$\begin{aligned} A_i &= \kappa \frac{1}{h^2} \frac{r_{i+1/2}}{r_i}, \quad B_i = \kappa \frac{1}{h^2} \frac{r_{i-1/2} + r_{i+1/2}}{r_i} + \frac{1}{\tau}, \\ C_i &= \frac{\kappa}{h^2} \frac{r_{i-1/2}}{r_i}, \quad F_i = -\frac{1}{\tau} p_i^n. \end{aligned}$$

Вводятся прогоночные коэффициенты, которые находятся по формулам:

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}.$$

Тогда неизвестное поле давления определяется выражением

$$p_i^{i+1} = \alpha_i p_{i+1}^{n+1} + \beta_i.$$

Воспользуемся левым граничным условием для определения начальных прогоночных коэффициентов α_1 и β_1 . Для этого положим, что

$$-\kappa \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{r=0} = q; \quad -\kappa \frac{p_2 - p_1}{h} = q; \quad p_1 = p_2 + \frac{hq}{\kappa}.$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_1 = \frac{2\kappa\tau}{h^2 + 2\kappa\tau}; \quad \beta_1 = \frac{h^2}{h^2 + 2\kappa\tau} p_1^n + \frac{2\kappa\tau h q}{h^2 + 2\kappa\tau}.$$

На другой границе давление известно $p|_{r=R} = p_K$.

Построение компьютерной модели. Моделирование производилось со следующими исходными данными. Радиус скважины $r_c = 0.17$ м.

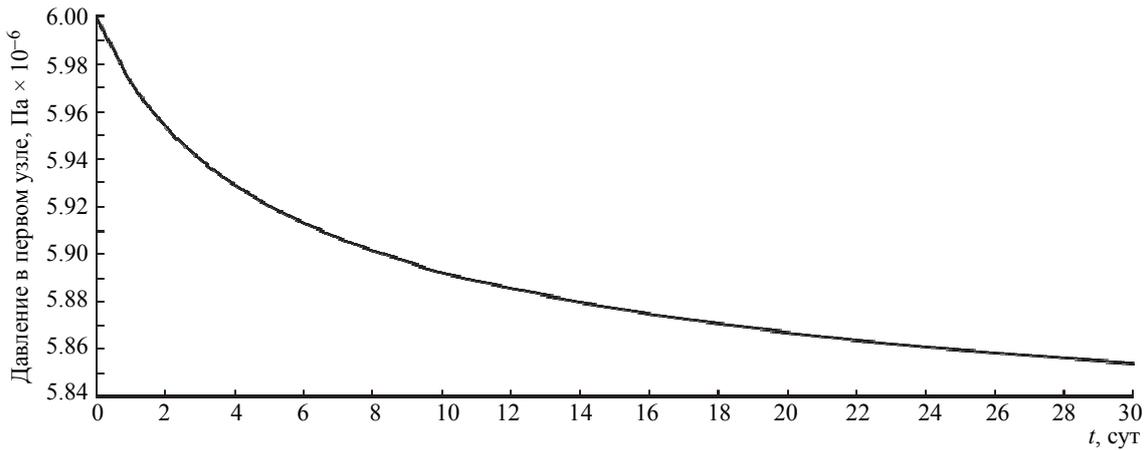


Рис. 2

Начальное давление в пласте p_0 составляет 6 000 000 Па, радиус контура питания $R = 150$ м, коэффициент пьезопроводности $\kappa = 5.2$. Скважина вскрывает пласт полностью, при этом пласт считается однородным. Скважина пускается в работу с расходом $q = 15\,000$ м³/ч. Количество пространственных узлов $N = 75$. Конечное время $t_{\text{кон}} = 30$ сут. На рис. 2 представлено изменение давления в первом узле пространственной сетки (забой скважины) с течением времени.

Результаты моделирования процессов в виде распределения давления вокруг скважины на конечное время расчета (спустя 30 сут эксплуатации) представлены в таблице.

№ узла	Координата узла, м	Давление в узле, Па
1	0.0000	5 854 113.83
2	2.0270	5 904 580.65
3	4.0541	5 921 394.64
4	6.0811	5 931 472.92
5	8.1081	5 938 660.77
10	18.2432	5 958 864.76
20	38.5135	5 976 822.92
40	79.0541	5 991 620.02
60	119.5946	5 997 586.27
75	150.0000	6 000 000.00

Алгоритм расчета поля давления, положенный в основу компьютерной модели, приведен в виде схемы на рис. 3.

На рис. 4 приведен график изменения давления от центра скважины до контура питания на конечное время расчета.

Согласно результатам моделирования, спустя месяц эксплуатации скважины при расходе 15 000 м³/ч забойное давление снизится до значения 5 854 113.83 Па (при начальном 6 000 000 Па). На рис. 5 показано изменение забойного давления в 3D-формате на конечное время расчета.

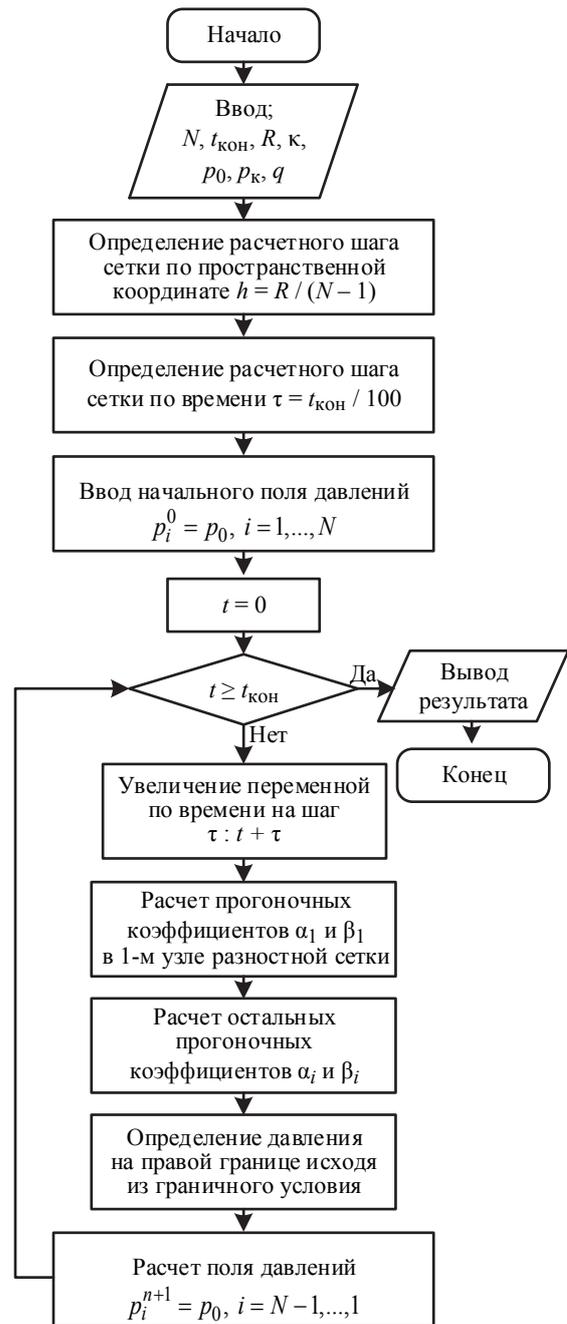


Рис. 3

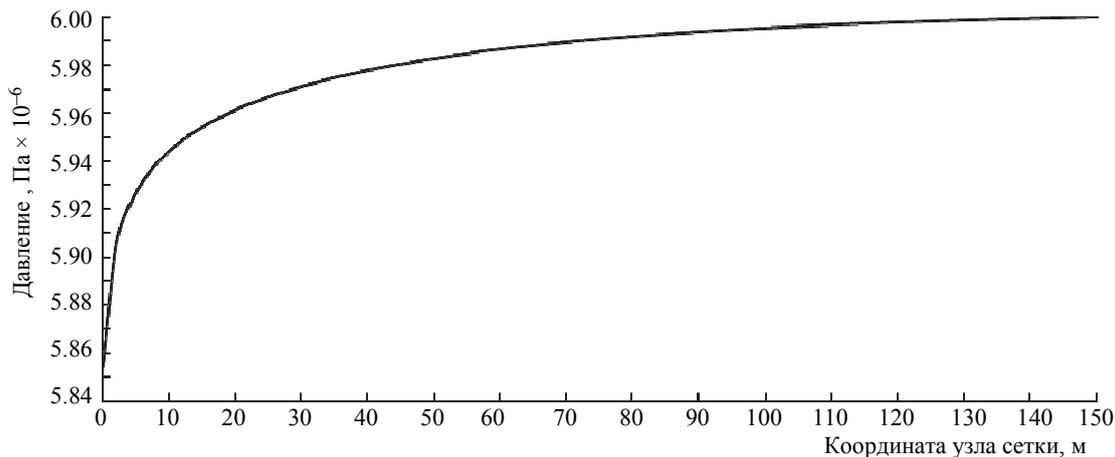


Рис. 4

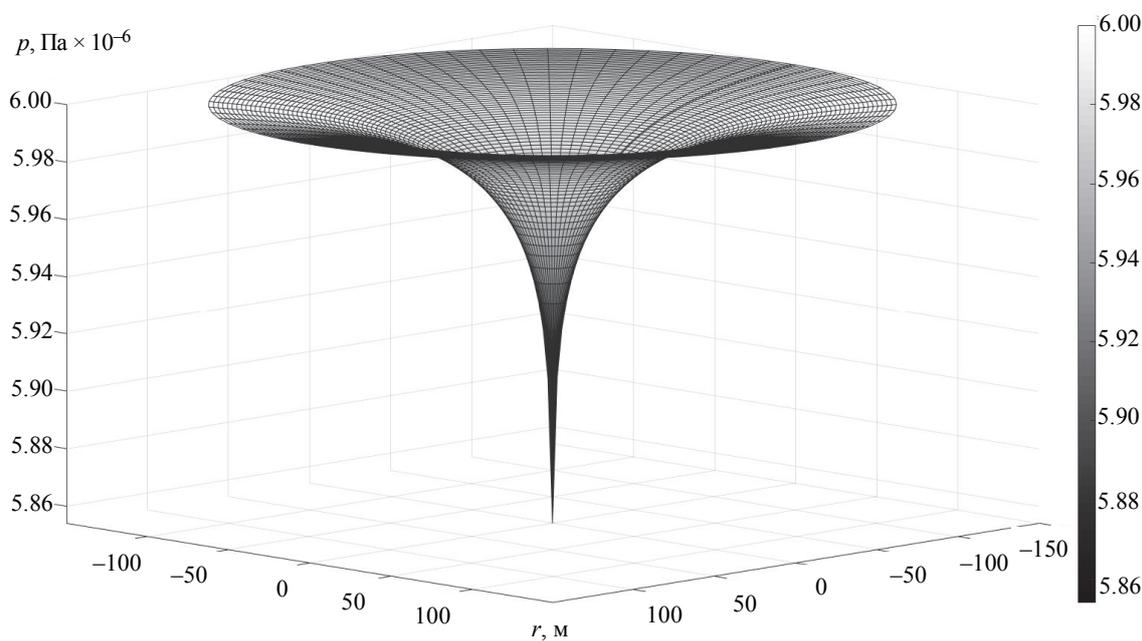


Рис. 5

Разработанная компьютерная модель пласта при заданных значениях определенных параметров, входящих в выражение для коэффициента пьезопроводности, и требуемом расходе газа на выходе из скважины дает возможность прогнозировать поведение поля давления в однородном

пласте. На основе получаемой информации с помощью модели можно не только наблюдать формирование поля давлений в области вокруг скважин, но и управлять разработкой залежи в целом, подбирая оптимальный режим эксплуатации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов Г. В., Шеремет М. А. Разностные методы решения задач теплопроводности. Томск: Изд-во ТПУ, 2007. 172 с.
2. Куштанова Г. Г. Подземная гидромеханика. Казань: Изд-во Казан. (Приволж.) федер. ун-та, 2010. 67 с.
3. Алишаев М. Г. Моделирование и расчет в прикладной механике и добыче нефти. Махачкала: Изд-во АЛЕФ, 2015. 288 с.
4. Маргулов Р. Д., Тагиев В. Г. Организация управления газодобывающим предприятием. М.: Недра, 1981. 239 с.
5. Пономарева И. Н., Мордвинов В. А. Подземная гидромеханика. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. 103 с.

S. E. Abramkin, S. E. Dushin, D. D. Sirota
Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

DEVELOPMENT OF THE MATHEMATICAL MODEL OF A «RESERVOIR-GAS WELL» SYSTEM

Presents mathematical models of steady and unsteady isothermal gas filtration. For the case of pressure distribution in the bottomhole formation zone around a single well, a numerical model of gas filtration is constructed that approximates the boundary value problem by an implicit four-point scheme using a propulsion method, under the assumption of consistency of gas density and viscosity, permeability and elastic capacity of the rock. The presented model allows to calculate and predict the change in pressure distribution in the area around the well. For the numerical model obtained, an algorithm for the computer model has been developed. Using a computer model, the pressure distribution for the well, which drains the initially undisturbed formation within 30 days, is calculated. Graphs of the distribution of the pressure field, obtained when using a computer model, are given. In the simulation, boundary conditions of the first and second kind are adopted for the feed and bottom hole contours, respectively. The results obtained can be applied to the development of control systems for gas production facilities aimed at rational use of the reservoir energy and increasing the gas recovery factor.

Model of unsteady gas filtration, numerical model of gas filtration, computer model of gas filtration, distribution of pressure in a homogeneous gas reservoir

УДК 004.056.3

П. Д. Осмоловский, С. А. Романенко
Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Реализация электронной подписи в подсистеме обеспечения эксплуатации и сервисного обслуживания ГАС «ВЫБОРЫ»

Описывается предложение по реализации модуля электронной подписи в подсистеме обеспечения эксплуатации и сервисного обслуживания ГАС «Выборы». Внедрение модуля позволит освободить участников взаимодействия от необходимости получать бумажные оригиналы документов для начала работы с данными. Результатом анализа архитектуры и требований подсистемы стала разработанная функциональная схема, которая легла в основу представленного решения. В статье формализованы процессы, которые планируется оптимизировать за счет использования технологии электронной подписи. Отталкиваясь от законодательных требований и проанализированных материалов, авторы аргументированно принимают решение о реализации модуля «ЭП ПОЭСО» в виде библиотеки скриптов для специализированного криптографического плагина, который доступен в браузере пользователей. Данное решение подробно описывается с использованием диаграмм, отображающих изменения процессов взаимодействия между участниками подсистемы и поясняющих структурное взаимодействие компонентов автоматизированных рабочих мест пользователей после внедрения модуля «ЭП ПОЭСО».

Электронная подпись, распределенная информационная система, электронный юридически значимый документооборот

В последнее время все чаще возникает потребность в обеспечении верификации данных, обмен которыми производится в рамках распределенных автоматизированных систем с элементами электронного документооборота. В таких системах первоисточником актуальной и достоверной информации являются бумажные доку-

менты, на основании которых вносятся изменения в данные, хранящиеся в электронном виде. С расширением количества объектов эксплуатации, автоматизируемых процессов, единиц учета растет и объем бумажных документов, своевременный централизованный сбор которых становится сдерживающим фактором эффективности