

## Потенциальные возможности разрешения ультразвуковых сигналов

Р. В. Симонов, В. А. Пахотин<sup>✉</sup>, И. В. Либерман

Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта,  
Калининград, Россия

✉ VPakhotin@kantiana.ru

### Аннотация.

*Цель работы:* Оценка потенциальных возможностей обработки ультразвуковых сигналов с учетом сингулярности корреляционной матрицы на основе преобразованной функции правдоподобия.

*Методы:* Задача разрешения ультразвуковых сигналов решается методом максимального правдоподобия с подстановкой Хелстрема. Вводится относительная дисперсия оценок амплитуд сигналов, на основании которой определяется рабочая область решений. Учитывается сингулярность корреляционной матрицы.

*Результаты:* Рассмотрена задача разрешения ультразвуковых сигналов методом максимального правдоподобия в области, запрещенной критерием Рэлея. Для исключения неоднозначности решения используется преобразованная за счет подстановки Хелстрема функция правдоподобия. Обсуждаются вопросы разрешения на основе аппаратных функций и на основе статистического подхода к вопросам разрешения сигналов. Вводится относительная дисперсия оценок амплитуд, на основе которой устанавливается рабочая область разрешения двух сигналов, определяемая изменением коэффициента корреляции от 0 до 0.9. Анализируется влияние сингулярности корреляционной матрицы на возможность разрешения сигналов. Рассматриваются шумовые сингулярные максимумы, ограничивающие решение задачи обнаружения, а следовательно, и разрешение двух или более сигналов. Предлагается метод оценки разрешения двух сигналов с ограничением, позволяющий решить задачу обнаружения сигналов и их разрешения при наличии сингулярных шумовых максимумов.

**Ключевые слова:** теория оптимального приема, метод максимального правдоподобия, подстановка Хелстрема, область высокого разрешения сигналов, сингулярность корреляционной матрицы

**Для цитирования:** Симонов Р. В., Пахотин В. А., Либерман И. В. Потенциальные возможности разрешения ультразвуковых сигналов // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2024. Т. 17, № 3. С. 12–20. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-3-12-20.

**Конфликт интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

## Prospects for Ultrasonic Signal Resolution

R. V. Simonov, V. A. Pakhotin<sup>✉</sup>, I. V. Lieberman

Kant Baltic State University, Kaliningrad, Russia

✉ VPakhotin@kantiana.ru

### Abstract.

*Purpose of the work:* To assess the potential possibilities of processing ultrasonic signals taking into account the singularity of the correlation matrix based on the transformed likelihood function.

*Methods:* The problem of resolving ultrasonic signals is solved by the method of maximum likelihood with Helstrom substitution. Relative variance of estimates of signal amplitudes on bases of which working area of solutions is determined is introduced. The singularity of the correlation matrix is taken into account.

*Results:* The problem of resolution of ultrasonic signals by the method of maximum likelihood in the region prohibited by the Rayleigh criterion is considered. To eliminate ambiguity, the solution is converted, due to Hel-

strom substitution. Hardware-based resolution and statistical approach to signal resolution are discussed. The relative variance of amplitude estimates is introduced, on the basis of which the working region of resolution of two signals is determined, determined by changing the correlation coefficient from 0 to the value 0.9. The influence of the singularity of the correlation matrix on the possibility of signal resolution is analyzed. Noise singular maxima are considered, limiting the solution of the detection problem, and therefore the resolution of two or more signals. A method of estimating the resolution of two limited signals is proposed, which allows solving the problem of detecting signals and their resolution in the presence of singular noise maxima.

**Keywords:** theory of optimal reception, maximum likelihood method, Helstrom substitution, high-resolution region of signals, singularity of correlation matrix

**For citation:** Simonov R. V., Pakhotin V. A., Lieberman I. V. Prospects for Ultrasonic Signal Resolution // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2024. Vol. 17, no. 3. P. 12–20. doi: 10.32603/2071-8985-2024-17-3-12-20.

**Conflict of interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Введение.** Разрешение двух или более сигналов, содержащихся в принятой реализации, – одна из основных задач в области обработки сигналов. От ее решения зависят возможности современных комплексов аппаратуры, включающих ультразвуковые комплексы. В настоящее время в промышленности и в литературе вопросы разрешения сигналов решаются в основном на основе критерия Рэлея (функции неопределенности) [1]–[3]. Вместе с тем имеется достаточно большое количество публикаций, в которых исследуются вопросы сверхрэлеевского разрешения. Так, например, в [3] показана возможность сверхрэлеевского разрешения при обработке сигналов на основе разностных уравнений. Это методы Прони, предсказаний, «Music» и т. д. В [4] сверхразрешение получено на основе метода аналитического продолжения спектра, в [5], [6] – на основе сложных методов проективной геометрии. В настоящее время можно определить две области решений статистических задач радиотехники: область, разрешенную критерием Рэлея, и область, запрещенную этим критерием. Будем называть вторую область областью неортогональности сигналов. Возможности решения статистических задач в этой области служат сферой интенсивных исследований.

Критерий Рэлея (функция неопределенности) связан с «аппаратными функциями», изменяющими аналитическую форму сигнала и оптимальным образом увеличивающими отношение сигнал/шум [7]. В результате действия аппаратных функций создается дифракционный максимум в оптических системах, корреляционный максимум при корреляционной обработке сигнала, спектральный максимум при спектральной обработке сигнала, диаграмма направленности

при угловом спектральном анализе. В этом случае рассматривается, по существу, не разрешение сигналов, а разрешение их образов после преобразования аппаратными функциями. Характерная особенность заключается в том, что даже при отсутствии шума разрешение остается конечной величиной, определенной критерием Рэлея. Однако в [8] разработан другой подход к разрешению сигналов. Его можно назвать статистическим подходом, при котором влияние аппаратных функций на разрешение сигналов практически исключается. При отсутствии шума разрешение сигналов в этом случае будет бесконечно большим. Статистический подход к задаче разрешения сигналов [8] основан на методе максимального правдоподобия, дополненном подстановкой Хелстрема. Она заключается в том, что неизвестные амплитуды сигналов определяются из уравнений правдоподобия и подставляются в функцию правдоподобия. В результате создается преобразованная функция правдоподобия – основа для дальнейших исследований вопросов разрешения в этой статье. Необходимость дальнейших исследований обусловлена тем, что к нынешнему времени выявлен новый фактор, существенно влияющий на возможность разрешения сигналов. Он связан с сингулярностью корреляционной матрицы при решении уравнений правдоподобия.

Таким образом, целью настоящей статьи стало проведение исследований потенциальных возможностей разрешения ультразвуковых сигналов с учетом сингулярности корреляционной матрицы на основе преобразованной функции правдоподобия.

**Основы теории.** Запишем принятую реализацию в виде совокупности  $N$  ультразвуковых

сигналов и нормального аддитивного шума  $\hat{U}_{ш}(t)$  с нулевым средним значением квадратурных компонент, дисперсией  $\sigma^2$  и интервалом корреляции  $\tau_k$ :

$$\hat{y}(t) = \sum_{n=1}^N \hat{U}_n \hat{f}_n(\lambda, t) + \hat{U}_{ш}(t). \quad (1)$$

Здесь  $\hat{U}_n$  – комплексная амплитуда для  $n$  сигнала;  $\hat{f}_n(\lambda, t)$  – аналитическая форма  $n$  ультразвукового сигнала;  $\lambda$  – вектор неэнергетических параметров совокупности сигналов;

$$\begin{aligned} \hat{f}_n(\lambda, t) &= \hat{U}_n [1 - \exp(-\alpha t)] \times \\ &\quad \times \exp(i\omega_0 t), \quad t = 0 \dots T_u, \\ \hat{f}_n(\lambda, t) &= \hat{U}_n [1 - \exp(-\alpha T_u)] \times \\ &\quad \times \exp[-\alpha(t - T_u)] \exp(i\omega_0 t), \quad t \geq T_u, \end{aligned}$$

где  $\alpha$  – коэффициент затухания;  $\omega_0$  – круговая резонансная частота;  $T_u$  – длительность возбуждающего пьезокерамическую пластину радиоимпульса.

На основании (1) запишем функцию правдоподобия

$$\begin{aligned} L(\lambda', \hat{U}_1 \dots \hat{U}_N) &= \\ &= \text{const} \exp \left( -\frac{1}{2\sigma^2 \tau_k} \int_0^{T_u} \left| \hat{y}(t) - \sum_{n=1}^N \hat{U}'_n \hat{f}_n(\lambda', t) \right|^2 dt \right), \quad (2) \end{aligned}$$

где const – постоянная, связанная с нормировкой функции правдоподобия. Штрихами обозначены оцениваемые параметры сигналов.

Функция правдоподобия имеет вид поверхности в пространстве оценочных параметров сигналов  $\lambda'_1 \dots \lambda'_N, \hat{U}'_1 \dots \hat{U}'_N$ . Ее непосредственная максимизация оказывается сложной в связи с большим количеством локальных максимумов, которые создаются в разрезах функции правдоподобия по координатам – временам приема. В связи с этим перейдем к преобразованной функции правдоподобия, используя подстановку Хелстрема [8]. Для этого, дифференцируя функцию правдоподобия (2) по комплексным амплитудам и приравнявая дифференциалы нулю, можно получить уравнения правдоподобия. Запишем их в векторном виде:

$$\mathbf{b}(\lambda') = \hat{R}(\lambda') \hat{\mathbf{U}}(\lambda'), \quad (3)$$

где  $b_n(\lambda') = \frac{1}{T_u} \int_0^{2T_u} \hat{y}(t) \hat{f}_n^*(\lambda', t) dt$  – составляющие вектора  $\mathbf{b}(\lambda')$ ; «\*» – комплексное сопряжение;

$$\hat{R}_{n,m}(\lambda') = \frac{1}{T_u} \int_0^{2T_u} \hat{f}_n(\lambda', t) \hat{f}_m^*(\lambda', t) dt \quad - \text{элементы}$$

корреляционной матрицы,  $n, m = 1 \dots N$ ;  $\hat{\mathbf{U}}(\lambda')$  – вектор комплексных оцениваемых амплитуд ультразвуковых сигналов.

Решая уравнения правдоподобия (3), получим функциональные соотношения, определяющие комплексные амплитуды сигналов

$$\hat{\mathbf{U}}(\lambda') = \hat{R}^{-1}(\lambda') \mathbf{b}(\lambda'). \quad (4)$$

Каждая из этих функциональных зависимостей имеет вид поверхности в пространстве оцениваемых параметров  $\lambda'$ . Подставляя эти зависимости в (2), получим преобразованный функционал правдоподобия  $L(\lambda')$ , поверхность которого не содержит локальных максимумов:

$$\begin{aligned} L(\lambda') &= \text{const} \exp \left( \frac{-1}{2\sigma^2 \tau_k} \int_0^{2T_u} \left| \hat{y}(t) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{n=1}^N \hat{U}'_n(\lambda') \hat{f}_n(\lambda', t) \right|^2 dt \right). \quad (5) \end{aligned}$$

На рис. 1 показана поверхность преобразованной функции правдоподобия с подстановкой Хелстрема для случая, когда в принятой реализации содержится два сигнала. По вертикали отложены значения преобразованной поверхности функции правдоподобия. Отношение сигнал/шум составляет 15 дБ, время приема первого сигнала  $t'_1 = 0.28$  мс, время приема второго сигнала  $t'_2 = 0.32$  мс. Отмечается наличие двух максимумов: основного и зеркального. Положение каждого из них определяет оценки времен приема двух сигналов. При подстановке этих оценок в (4) можно получить оценки комплексных амплитуд сигналов. Следовательно, при известном количестве сигналов в реализации задача отдельной оценки параметров двух и более сигналов оказывается решенной. Решение будет более общим по сравнению с корреляционным или спектральным анализом. Оно зависит от отношения сигнал/шум и может быть получено как в области, разрешенной критерием Рэлея, так и в области неортогональности сигналов.

На основании преобразованной функции правдоподобия (5) и решений (4) можно получить статистики оценок амплитуд и времен приема сигналов. Они показаны на рис. 2. Оценки ампли-

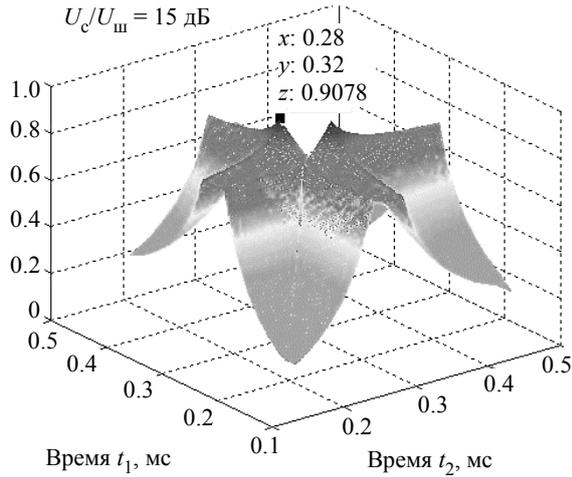


Рис. 1. Поверхность преобразованной функции правдоподобия с подстановкой Хелстрема для случая, когда в принятой реализации содержится два сигнала. Отношение сигнал/шум – 15 дБ. Время приема –  $t_1 = 0.28$  мс,  $t_2 = 0.32$  мс

Fig. 1. The surface of the transformed likelihood function with Helstrom substitution for the case when the accepted implementation contains two signals. The signal-to-noise ratio is 15 dB. The reception time  $t_1 = 0.28$  ms,  $t_2 = 0.32$  ms

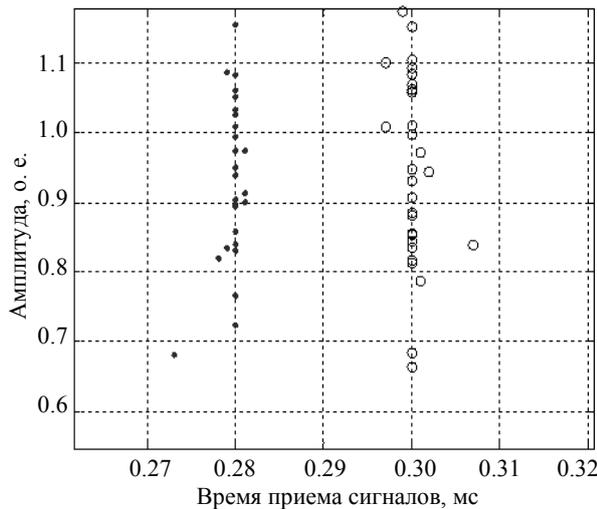


Рис. 2. Раздельная статистика амплитуд и времен приема двух сигналов, содержащихся в реализации.

Отношение сигнал/шум – 0 дБ  
 Fig. 2. Separate statistics of the amplitudes and reception times of the two signals contained in the implementation. The signal-to-noise ratio is 0 dB

туд на рисунке представлены в относительных единицах. Отношение сигнал/шум составляет 0 дБ. Статистики раздельные: оценки параметров первого и второго сигналов не перемешаны. Модельные значения амплитуд и времен приема двух сигналов отмечены звездочками. Следовательно, задачи разрешения сигналов и оценки параметров сигналов оказываются решенными. В случае отсутствия сигналов в реализации, на основе данного алгоритма можно получить статистику шума. В случае, когда в

реализации содержится один сигнал, то алгоритм обработки определяет статистику параметров этого сигнала и статистику шума.

Таким образом, выражения (4) и (5) служат основой решения статистических задач, возникающих в комплексах аппаратуры. Однако необходим дальнейший анализ возможных ограничений при решении статистических задач. Рассмотрим эти вопросы более подробно. В литературе практически отсутствует анализ влияния сингулярности корреляционной матрицы  $\hat{R}(\lambda')$  на получаемые решения. Следует обратить внимание на то, что каждое из решений (4) – это поверхность в многомерном пространстве оценочных неэнергетических параметров сигналов. Условие сингулярности корреляционной матрицы состоит в равенстве отдельных оценок параметров двух или более сигналов. При выполнении этого условия на поверхности решений (4) создаются шумовые максимумы, которые в дальнейшем будем называть сингулярными максимумами. Их уровень может существенно превышать уровень амплитуд сигналов. Следовательно, задача оценок амплитуд сигналов в области их неортогональности решается на фоне сингулярных максимумов. Она может быть решена лишь на основе совместного использования преобразованной функции правдоподобия (5) и решения уравнений правдоподобия (4). Наличие сингулярных максимумов изменяет выражения для дисперсии параметров Рао–Крамера и определяет ограничения на решения статистических задач. Рассмотрим эти вопросы для случая двух сигналов, содержащихся в реализации и отличающихся временами приема. В этом случае  $N$  в выражении (5) равно 2, а решения уравнений правдоподобия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{U}'_1(t'_1, t'_2) &= \left[ \frac{1}{T_u} \int_t^{2T_u+t} \hat{y}(t) \hat{f}_1^*(t'_1, t) dt - \hat{R}(t'_1, t'_2) \right] \frac{1}{T_u} \times \\ &\times \int_t^{2T_u+t} \hat{y}(t) \hat{f}_2^*(t'_2, t) dt \Big/ \left[ 1 - |\hat{R}(t'_1, t'_2)|^2 \right], \\ \hat{U}'_2(t'_1, t'_2) &= \left[ \frac{1}{T_u} \int_t^{2T_u+t} \hat{y}(t) \hat{f}_2^*(t'_2, t) dt - \hat{R}^*(t'_1, t'_2) \right] \frac{1}{T_u} \times \\ &\times \int_t^{2T_u+t} \hat{y}(t) \hat{f}_1^*(t'_1, t) dt \Big/ \left[ 1 - |\hat{R}(t'_1, t'_2)|^2 \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\hat{R}^*(t'_1, t') = \frac{1}{T_{\text{ЭКВ}}} \int_t^{2T_u+t} \hat{f}_2^*(t'_2, t) \hat{f}_1^*(t'_1, t) dt$  – коэффициент корреляции по времени приема двух ультразвуковых сигналов;  $T_{\text{ЭКВ}} = \int_0^{2T_u} \hat{f}_1(t'_2, t) \hat{f}_1^*(t'_1, t) dt$  –

эквивалентная длительность сигнала.

На рис. 3 показана поверхность первой функциональной зависимости (6), иллюстрирующая наличие шумовых сингулярных максимумов. Они располагаются вдоль диагональной линии, на которой  $t'_1 = t'_2$  и модуль коэффициента корреляции равен единице.

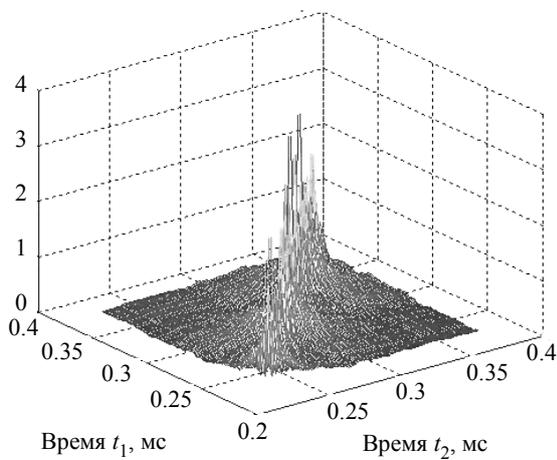


Рис. 3. Поверхность функциональной зависимости  $\hat{U}'_1(t'_1, t'_2)$  в пространстве оценок времен приема при отсутствии сигналов в принятой реализации  
Fig. 3. The surface of the functional relationship  $\hat{U}'_1(t'_1, t'_2)$  in the space of reception time estimates in the absence of signals in the received implementation

Выведем выражения для дисперсии амплитуды в области неортогональности сигналов. Для этого определим диагональные элементы информационной матрицы Фишера для амплитуд сигналов. Согласно [1] они находятся с помощью двойного дифференцирования логарифма функции правдоподобия по неизвестным параметрам сигнала:

$$D_U(\tau) = \frac{\sigma^2 \tau_k}{T_{\text{ЭКВ}} (1 - |\hat{R}(\tau)|^2)} = \frac{\sigma^2}{N_{\text{ЭКВ}} (1 - |\hat{R}(\tau)|^2)}, \quad (7)$$

где  $N_{\text{ЭКВ}}$  – количество некоррелированных отсчетов шума на интервале  $T_{\text{ЭКВ}}$ .

Выражение для дисперсии Рао–Крамера определяет ее зависимость от модуля коэффициента корреляции (от разности времен приема сигналов  $\tau = t'_2 - t'_1$ ). Таким образом, для области неортогональности сигналов характерно увеличение дис-

персии амплитуд сигналов в зависимости от степени близости времен приема к области сингулярности корреляционной матрицы. Определим при ортогональности сигналов дисперсию амплитуд выражением  $D_{U0}(\tau) = \sigma^2 / N_{\text{ЭКВ}}$  и введем относительную дисперсию

$$\frac{D_U(\tau)}{D_{U0}(\tau)} = \frac{1}{(1 - |\hat{R}(\tau)|^2)}. \quad (8)$$

Это выражение показывает, что при приближении к сингулярному максимуму дисперсии амплитуд и шума дополнительно увеличиваются согласно (8). Оно может быть положено в основу рабочей области разрешения сигналов. На рис. 4 показан вид зависимости относительной дисперсии (8).

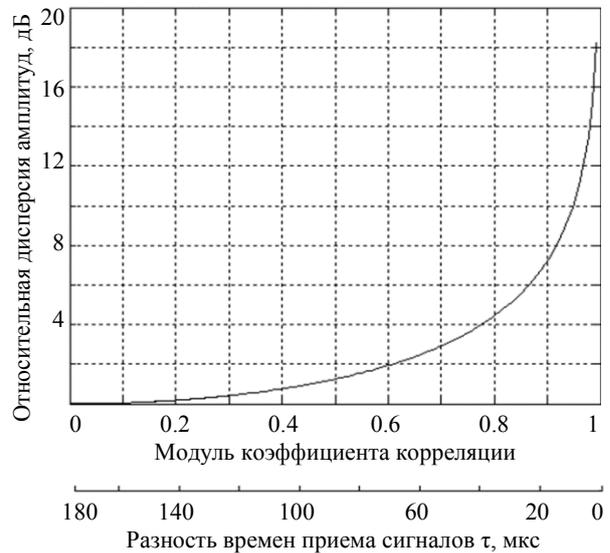


Рис. 4. Зависимость относительной дисперсии от модуля коэффициента корреляции  
Fig. 4. Relative variance versus correlation coefficient modulus

Рисунок иллюстрирует дополнительное увеличение дисперсии шума при приближении оценок времен приема к области сингулярности. Платой за высокое разрешение служит необходимость увеличения отношения сигнал/шум согласно зависимости. Изменение значений коэффициента корреляции от 0 до 0.9 можно принять за рабочий диапазон, в котором возможно разрешение двух ультразвуковых сигналов. В конце рабочего диапазона при значении коэффициента корреляции 0.9 различие времен приема (вторая шкала по горизонтали) сигналов равно 20 мкс, что соответствует увеличению разрешения по сравнению с рэлевским более, чем в 10 раз. Дополнительное увеличение отношения сигнал/шум в данной точке

рабочего диапазона равно 7 дБ. Вне рабочего диапазона разрешение возможно, но требует более высокого отношения сигнал/шум.

Рассмотрим влияние шумовой составляющей на возможность разрешения сигналов. При отсутствии сигналов в реализации алгоритм программы создает структуру поверхности функциональных зависимостей (6), показанную на рис. 3. Сингулярные максимумы шума увеличиваются по мере приближения к диагональной линии, которая определяется условием равенства оценок времен приема  $t_2 = t_1$ . В результате шумовая составляющая существенно возрастает по отношению к амплитудам сигналов в зависимости от дисперсии шума на выходе блока обработки. Это препятствует возможности решения задачи обнаружения сигналов. При этом дисперсия шума определяется зависимостью (7) при своих значениях модуля коэффициента корреляции:

$$D_{ш} = \frac{\sigma^2}{N_{эвб} (1 - |\hat{R}_{ш}(\tau)|^2)}. \quad (9)$$

В этом выражении в связи с алгоритмом программы, выделяющим максимумы преобразованной функции правдоподобия, модули коэффициента корреляции  $|\hat{R}_{ш}(\tau)|$  имеют близкие к единице значения, а разность времен приема  $\tau$  соответственно мала.

**Результаты модельных исследований возможности разрешения ультразвуковых сигналов.** Для оценок параметров сигналов вблизи области сингулярного максимума проведены модельные расчеты. В них принято следующее. Вероятность ложной тревоги  $P_f = 0.001$ , время приема первого сигнала равно 2 мс, время приема второго сигнала линейно меняется в пределах от 1.7 до 2.3 мс. Длительность сигнала составляет 0.688 мс. На рис. 5 показаны оценки амплитуд первого и второго сигналов (точки), изменение порогового уровня (линия), значения шумовых решений при отсутствии сигналов в реализации (крестики). Отношение сигнал/шум составляет 20 дБ. По горизонтали отложены значения разности времен приема. Точка, равная нулю, определяет положение диагональной линии.

Оценки параметров первого сигнала располагаются справа от нулевого значения разности времен приема. Оценки параметров второго сигнала располагаются слева от нулевого значения. При наличии в реализации двух ультразвуковых сигналов пороговый уровень определяется следующим выражением:

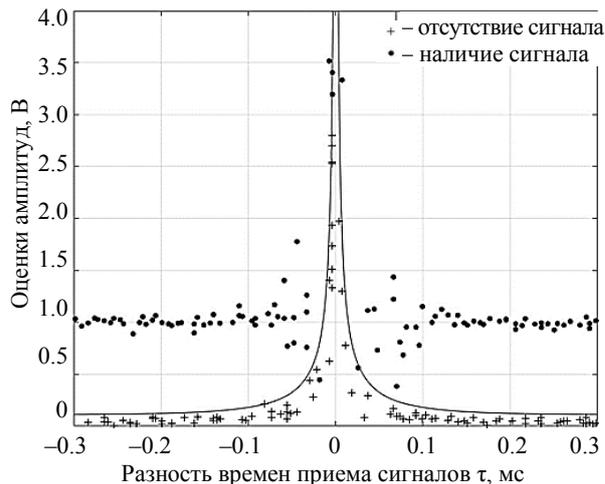


Рис. 5. Оценки параметров двух ультразвуковых сигналов и шума вблизи от сингулярного максимума. Отношение сигнал/шум – 20 дБ. Линией показано изменение порогового уровня

Fig. 5. Estimates of parameters of two ultrasonic signals and noise near the singular maximum. Signal-to-noise ratio 20 dB. The line shows the threshold level change

$$h = \sqrt{-D_U / (1 - |\hat{R}|^2 \log(P_f))}, \quad (10)$$

где  $P_f$  – вероятность ложной тревоги.

Как видно из рисунка, СКО (среднеквадратичное отклонение) амплитуд сигналов существенно увеличиваются при сближении времен приема согласно выражению (8). СКО шума (9) также увеличивается и может превышать амплитуды сигналов. Пороговый уровень изменяется согласно (10) и, в принципе, разделяет оценки амплитуд сигналов и шумовых значений. Практически рабочей областью при отношении сигнал/шум, равном 20 дБ, служит область изменения модуля разности времен приема от точки, в которой смыкаются статистика амплитуд сигнала и статистика шума 0.08 мс и более. Рис. 5 иллюстрирует важное практическое ограничение при оценке разрешающей способности в области неортогональности сигналов. Оно связано с тем, что необходимо рассматривать одновременно три статистики: две из них связаны с оценками времен приема двух сигналов, а третья – с шумом, с сингулярными шумовыми максимумами. Без учета третьей статистики оценка разрешения сигналов теряет практический смысл. Особенностью третьей статистики служит то, что дисперсия амплитуд шума обуславливается областью сингулярных максимумов шума. Ее значения определяются выражением (9), однако коэффициент корреляции имеет другое значение. Он зависит от ши-

рины сингулярной области, которая оказывается меньше, чем различие времен приема сигналов.

На рис. 6 показана зависимость шумовых сингулярных максимумов от разности времен приема. Она фактически иллюстрирует конфигурацию сингулярной области.

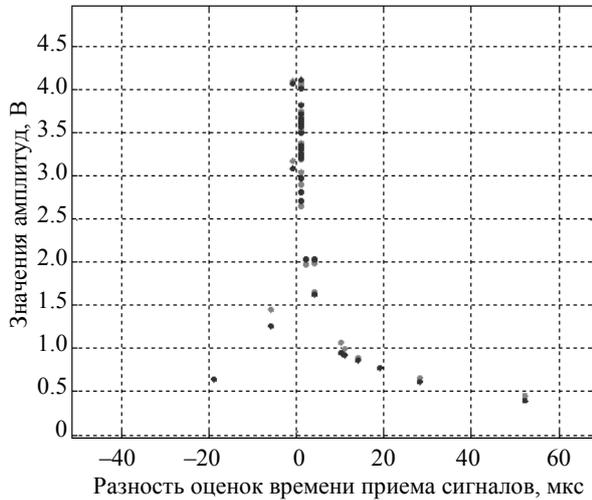


Рис. 6. Зависимость амплитуд шумовых сингулярных максимумов от разности времен приема

Fig. 6. Dependence of amplitudes of noise singular maxima on difference of reception times

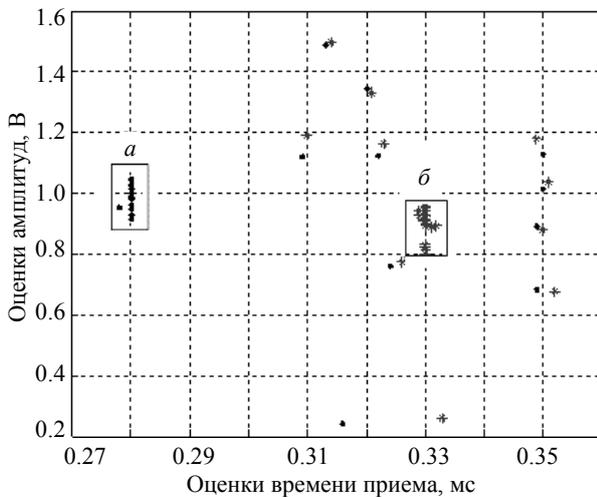


Рис. 7. Статистика оценок амплитуд сигналов, амплитуд шумовых сингулярных максимумов и статистика времен приема. Модельные значения времен приема сигналов равны 0.28 мс (а) и 0.33 мс (б)

Fig. 7. Statistics of signal amplitude estimates, noise singular maxima amplitudes, and reception time statistics. The model signal reception times are 0.28 ms (a) and 0.33 ms (b)

Из рисунка ясно, что шумовые сингулярные максимумы располагаются при малых значениях разности приема  $\tau$ , при которых модуль коэффициента корреляции  $|\hat{R}_{\text{ш}}(\tau)|$  близок к единице. На рис. 7 показаны совместные статистики оценок амплитуд и времен приема двух сигналов (отме-

чены прямоугольниками а и б) и совместная статистика шумовых сингулярных максимумов и их времен приема при отсутствии сигналов в реализации. Модельные значения времен приема сигналов равны 0.28 и 0.33 мс.

Значения амплитуд шумовых сингулярных максимумов превышают амплитуды сигналов, и обнаружение сигналов в этих условиях оказывается невозможным. Характерную особенность шумовых сингулярных максимумов представляют их попарные малые разности времен приема (близкие к единице модули коэффициентов корреляции). Эта особенность может быть использована для исключения шумовых сингулярных максимумов из рассмотрения. Для этого предлагается ограничить разрешение алгоритма программы сверху – ввести условие: если разность времен приема в алгоритме  $\tau$  меньше 5 мкс, например, то это решение относится к шумовому сингулярному максимуму и может быть исключено из рассмотрения. На рис. 8 показана совместная статистика оценок амплитуд и времен приема двух сигналов (а, б) и совместная статистика шумовых сингулярных максимумов после операции ограничения разрешения сверху интервалом 5 мкс. Амплитуда шумовых сингулярных максимумов, не удовлетворяющих введенному условию, приравнена значению 0.2. Как видно из рисунка, задача обнаружения двух сигналов с введенным ограничением вполне решается при различии времен приема сигналов на 40 мкс, что превышает рэлеевское разрешение в 10 раз.

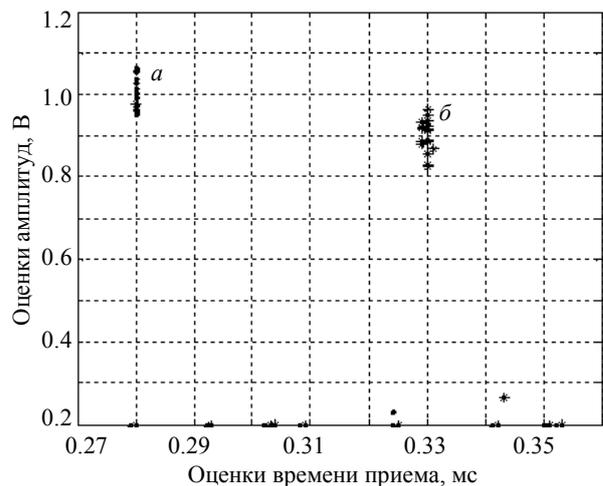


Рис. 8. Статистика амплитуд и времен приема двух сигналов (а – 0.28 мс; б – 0.33 мс) и шума при введении в алгоритм программы ограничения на разрешение

Fig. 8. Statistics of amplitudes and reception times of two signals (a – 0.28 ms; b – 0.33 ms) and noise when the resolution restriction program is introduced into the algorithm

**Основные результаты.** Рассмотрена возможность решения задачи разрешения двух или более ультразвуковых сигналов на основе преобразованной за счет подстановки Хелстрема функции правдоподобия с учетом влияния шумовых сингулярных максимумов. Получены следующие результаты:

1. На основе анализа выражений для дисперсии амплитуд Рао–Крамера введена относительная дисперсия. Предложен рабочий диапазон разрешения двух сигналов, определенный изменением модуля коэффициента корреляции от нуля до значения 0.9.

2. Показано наличие шумовых сингулярных максимумов на поверхности функциональных

зависимостей, получаемых при решении уравнений правдоподобия.

3. Установлена необходимость учета трех статистик: совместных статистик приема амплитуд и времен для двух сигналов и совместной статистики амплитуд и времен приема шумовых сингулярных максимумов для решения задачи разрешения двух сигналов.

4. Предложен метод решения задачи обнаружения и разрешения двух сигналов при учете шумовых сингулярных максимумов.

### Список литературы

1. Перов А. И. Статистическая теория радиотехнических систем. М.: Радиотехника, 2003. 400 с.

2. Ван Трис Г. Л. Теория обнаружения, оценок и модуляции / пер. с англ. под ред. проф. В. И. Тихонова. Т. 1. Теория обнаружения, оценок и линейной модуляции. М.: Сов. радио, 1972. 744 с.

3. Марпл С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.

4. Михайлов Б. А. Максимизация пропускной способности линейных систем на основе линейного продолжения спектра. М.: Издат. дом «Медиа Паблишер», 2014. 162 с.

5. Чижов А. А. Сверхрэлеевское разрешение. Т. 1: Классический взгляд на проблему. М.: Красанд, 2010. 96 с.

6. Чижов А. А. Сверхрэлеевское разрешение. Т. 2: Преодоление фактора некорректности обратной задачи рассеяния и проекционная радиолокация. Метод разрешения групповых сосредоточенных целей. М.: Красанд, 2010. 104 с.

7. Климов С. А. Метод повышения разрешающей способности радиолокационных систем при цифровой обработке сигналов // Журн. Радиоэлектроники. 2013. № 1. С. 15–32.

8. Хелстром К. Статистическая теория обнаружения сигналов / пер. с англ. Г. Ю. Кобзарева. М.: Изво иностр. лит., 1963. 431 с.

### Информация об авторах

**Симонов Роман Валерьевич** – аспирант ОНК института высоких технологий Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта, ул. А. Невского, 14, Калининград, 236040, Россия.  
E-mail: RVSimonov@stud.kantiana.ru

**Пахотин Валерий Анатольевич** – д-р физ.-мат. наук, профессор ОНК института высоких технологий Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта, ул. А. Невского, 14, Калининград, 236040, Россия.

E-mail: VPakhotin@kantiana.ru

<https://orcid.org/0009-0001-9939-418X>

**Либман Ирина Владимировна** – канд. физ.-мат. наук, доцент ОНК института высоких технологий Балтийского федерального университета имени Иммануила Канта, ул. А. Невского, 14, Калининград, 236040, Россия.

E-mail: ILiberman@kantiana.ru

<https://orcid.org/0000-0002-5121-3183>

### References

1. Perov A. I. Statisticheskaja teorija radiotekhnicheskix sistem. M.: Radiotekhnika, 2003. 400 s. (In Russ.).

2. Van Tris G. L. Teorija obnaruzhenija, ocenok i moduljacji / per. s angl. pod red. prof. V. I. Tihonova. T. 1.

Teorija obnaruzhenija, ocenok i linejnoj moduljacji. M.: Sov. radio, 1972. 744 s. (In Russ.).

3. Marpl S. L. Cifrovoy spektral'nyj analiz i ego prilozhenija. M.: Mir, 1990. 584 s. (In Russ.).

4. Mihajlov B. A. Maksimizacija propusknj sposobnosti linejnyh sistem na osnove linejnogo prodolzhenija spektra. M.: Izdat. dom «Media Pablsher», 2014. 162 s. (In Russ.).

5. Chizhov A. A. Sverhrjeleevskoe razreshenie. T. 1: Klassicheskij vzgljad na problemu. M.: Krasand, 2010. 96 s. (In Russ.).

6. Chizhov A. A. Sverhrjeleevskoe razreshenie. T. 2: Preodolenie faktora nekorrektnosti obratnoj zadachi rassejanija i proekcionnaja radiolokacija. Metod razre-

shenija gruppovyh sosredotochennyh celej. M.: Krasand, 2010. 104 s. (In Russ.).

7. Klimov S. A. Metod povyshenija razreshajushhej sposobnosti radiolokacionnyh sistem pri cifrovoj obrabotke signalov // Zhurn. Radioelektroniki. 2013. № 1. S. 15–32. (In Russ.).

8. Helstrom K. Statisticheskaja teorija obnaruzhenija signalov / per. s angl. G. Ju. Kobzareva. M.: Izd-vo inostr. lit., 1963. 431 s. (In Russ.).

#### Information about the authors

**Roman V. Simonov** – postgraduate student of the ONC Institute of High Technologies of the I. Kanta Baltic Federal University, A. Nevsky St., 14, Kaliningrad, 236040, Russia.

E-mail: RVSimonov@stud.kantiana.ru

**Valery A. Pakhotin** – Dr Sci. (Phys.-Math.), Professor of the ONC Institute of High Technologies of the I. Kant Baltic Federal University, A. Nevsky St., 14, Kaliningrad, 236040, Russia.

E-mail: VPakhotin@kantiana.ru

<https://orcid.org/0009-0001-9939-418X>

**Irina V. Liberman** – Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor of the ONC Institute of High Technologies of the I. Kant Baltic Federal University, A. Nevsky St., 14, Kaliningrad, 236040, Russia.

E-mail: ILiberman@kantiana.ru

<https://orcid.org/0000-0002-5121-3183>

Статья поступила в редакцию 20.10.2023; принята к публикации после рецензирования 10.11.2023; опубликована онлайн 25.03.2024.

Submitted 20.10.2023; accepted 10.11.2023; published online 25.03.2024.

---