

Распространение поперечных волн с вертикальной и горизонтальной поляризацией в слоистой среде с неоднородными граничными условиями

А. В. Вагин

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

av.vagin@bk.ru

Аннотация. В статье исследовано распространение поперечной волны вертикальной и горизонтальной поляризации в слоистой среде с неоднородными граничными условиями при двух вариантах геометрии распространения волны относительно слоев структуры: параллельно и перпендикулярно слоям. Выведены дисперсионные уравнения для поперечной волны в рассматриваемых случаях распространения. Решены относительно волнового числа найденные дисперсионные уравнения для обнаружения зависимостей эффективных скоростей поперечной волны вертикальной и горизонтальной поляризации от относительной толщины слоя и параметров материалов. Полученные зависимости используются в задачах нахождения физико-механических характеристик среды на основе акустических измерений.

Ключевые слова: поперечная волна, вертикальная поляризация, горизонтальная поляризация, дисперсионное уравнение, слоистая среда, неоднородные граничные условия

Для цитирования: Вагин А. В. Распространение поперечных волн с вертикальной и горизонтальной поляризацией в слоистой среде с неоднородными граничными условиями // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2023. Т. 16, № 3. С. 5–14. doi: 10.32603/2071-8985-2023-16-3-5-14.

Original article

Propagation of Transverse Waves with Vertical and Horizontal Polarization in a Layered Medium with Inhomogeneous Boundary Conditions

A. V. Vagin

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

av.vagin@bk.ru

Abstract. The paper investigates the propagation of a transverse wave of vertical and horizontal polarization in a layered medium with inhomogeneous boundary conditions for two variants of the geometry of wave propagation relative to the layers of the structure: parallel and perpendicular to the layers. Dispersion equations for a transverse wave are derived for the cases of propagation under consideration. The dispersion equations found with respect to the wave number are solved to find the dependences of the effective velocities of the transverse wave of vertical and horizontal polarization on the relative thickness of the layer and the parameters of the materials. The obtained dependences are used in the problems of finding the physical and mechanical characteristics of the medium on the basis of acoustic measurements.

Keywords: transverse wave, vertical polarization, horizontal polarization, dispersion equation, layered medium, inhomogeneous boundary conditions

For citation: Vagin A. V. Propagation of Transverse Waves with Vertical and Horizontal Polarization in a Layered Medium with Inhomogeneous Boundary Conditions // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2023. Vol. 16, no. 3. P. 5–14. doi: 10.32603/2071-8985-2023-16-3-5-14.

Введение. Вопросы распространения упругих волн в твердых телах с внутренними деформациями имеют большое значение во многих прикладных областях: сейсмоакустика, геофизика, техника, неразрушающий контроль, структурокопия и др. Задачи нахождения физических характеристик неоднородных упругих слоистых сред в последнее время приобретают значимый характер [1]. В первую очередь, это связано с активным использованием в практике новых функционально-градиентных и композиционных материалов, свойства которых непрерывно меняются по толщине [2], [3]. Поэтому определение параметров материала и геометрической структуры слоистой среды стало задачей первостепенной важности. Нахождение характеристик слоистых материалов позволяет моделировать реальное поведение объектов с возможными неоднородными свойствами, расширяет возможности создания и исследования новых материалов. С целью получения большей информации о свойствах и параметрах исследуемой среды необходимо проводить предызмерительные изыскания для получения максимально возможного количества упругих и механических характеристик.

Распространению волн в композитных и неоднородных материалах посвящены многие публикации в периодических изданиях [4]–[6]. Анализ распространения продольной волны в слоистой среде с неоднородными граничными условиями на границах среды при различных направлениях распространения волны приведен в [7]. Рассмотрению распространения волн в слоистых средах также посвящены [8], [9], имеющие существенный недостаток в части решения дисперсионного уравнения для продольной и поперечной волны, распространяющихся в однородной и неоднородной слоистой среде. Недостаток заключается в неверном решении дисперсионного уравнения, а следовательно, и в получении неверного значения скорости волны, что в дальнейшем сопровождается отклонением упругих характеристик материала от истинных. Подтверждает это графическая зависимость скорости продольной и поперечной волн от относительной толщины слоя материала. При увеличении относительной толщины слоя материала слоистой среды значение скорости волны начинает убывать, что противоречит физическим представлениям о распространении объемных волн в неоднородных средах. Данное противоречие устранено авторами для продольной волны, распространяющейся в неоднородной среде в статьях [7], [10].

Аналогично выше рассмотренному ранее случаю, в [11], [12] приведен вывод дисперсионного уравнения для продольной и поперечной волн, распространяющихся в слоистой однородной среде. Решение дисперсионных уравнений в этом случае дает верные графические зависимости скоростей продольной и поперечной волн от относительной толщины слоя материала.

Поскольку эти результаты получены для двух крайних случаев контакта между слоями, то представляет интерес их сравнения для оценки результатов при других видах контакта. В случае распространения волны в однородной среде решение дисперсионного уравнения этой волны будет давать истинное значение эффективной скорости. При наличии неоднородности в слоистой среде значение скорости распространяющейся волны начинает убывать за счет переотражений, поглощения, затухания, рассеяния энергии волны на структурных неоднородностях слоистой среды.

В [13], [14] рассматривается распространение поперечной волны в слоистой неоднородной структуре «сталь–сталь» с шероховатостью между прилегающими средами. Полученные результаты разнятся с физическими представлениями о распространении волны в неоднородной среде, так как значения найденных скоростей не отражают правильных графических зависимостей от толщины слоя.

Помимо неоднородности в виде расслоений, трещин, газовых включений и т. д. имеются температурные эффекты [15], эффекты, связанные с фильтрацией и фокусировкой [16], которые также влияют и на скорость распространения упругих волн в материале.

В случае однозначной аналитической связи между параметрами волны и физико-механическими свойствами материала контролируемые упругие характеристики будут определяться с высокой степенью достоверности. При известных скоростях распространения продольной и поперечных волн контроля однозначным образом определяются модуль Юнга, коэффициент Пуассона, модуль сдвига [17].

Многообразие конструкционных материалов и сред, которые применяются в современной технике и производстве, чрезвычайно велико и имеет долгосрочную перспективу в развитии. Расширение типов применяемых в производстве материалов влечет за собой появление новых видов неоднородностей, обнаружение которых должно опираться на разработки новых средств ультразвукового контроля и совершенствования уже имеющихся.

Целью статьи является вывод дисперсионного уравнения для поперечных волн вертикальной и горизонтальной поляризации, распространяющихся параллельно и перпендикулярно слоям среды с неоднородными граничными условиями. Таким образом, необходимо рассмотреть два случая геометрии распространения волн: поперечная волна с вертикальной и горизонтальной поляризацией, распространяющаяся перпендикулярно слоям, и поперечная волна с вертикальной и горизонтальной поляризацией, распространяющаяся параллельно слоям. В качестве неоднородной среды, использующейся для исследования, принимаем микронеоднородную структуру «сталь–графит» с граничными условиями, определяющими неполную передачу составляющих упругих смещений при сохранении передачи упругих напряжений [18].

Микронеоднородные слоистые среды представляют собой слоистую структуру, состоящую из слоистой среды и включений, причем расстояние между включениями и их размеры много меньше длины волны, распространяющейся в этой среде [5], [19]. Слоистой средой называется среда, состоящая из чередующихся слоев двух однородных и изотропных материалов. В случае рассмотрения слоистой среды «в среднем», т. е. когда слоистая структура достаточно тонкие, причем условие тонкости слоев означает, что их толщины малы по сравнению с длинами волн сжатия и сдвига в материалах этих сред, то она рассматривается уже как однородная, но анизотропная, при этом такая среда называется мелкослоистой [9], [20].

Описание модели неоднородной слоистой среды. Рассмотрим модель слоистой среды с чередующимися слоями толщиной a и b и параметрами ρ, λ, μ – для первой среды, $\bar{\rho}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}$ – для второй среды (рис. 1). В качестве первой среды рассматриваем сталь, в качестве второй – графит. Общая толщина слоя принимается равной 1 мм, а частота ультразвука при моделировании процес-

сов определения скорости волны на основе акустических измерений – 1 МГц.

На рис. 1 ρ – плотность среды; λ, μ – параметры Лямэ. Аналогичные параметры для второй среды обозначаем с чертой сверху.

Для описания упругого поведения модели слоистой среды, представленной на рис. 1 необходимо и достаточно задать пять упругих постоянных, т. е. данная модель является аналогом кристалла гексагональной симметрии. Однако среда с микротрещинами может быть описана с помощью эффективных динамических модулей упругости, расчет которых сложен и достигается на основе методов статистической механики [21] и метода самосогласованного поля [22].

Волновое уравнение для поперечной волны, распространяющейся в слоистой среде имеет следующий вид:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi_t}{\partial t^2} - \mu \Delta \xi_t = 0, \uparrow$$

где ξ_t – вектор поперечного смещения; μ – модуль сдвига; $\Delta \xi_t = \text{grad div} (\xi_t) \uparrow$

Общее решение волнового уравнения для поперечной волны определим через специально выбранные частные решения, которые разделены на две составляющие относительно середины слоев, а именно – косинусную (симметричную) и синусоидальную (несимметричную) часть [9].

Для первого слоя модели слоистой среды, имеем следующий вид продольных и поперечных смещений в направлении оси x и z :

$$\begin{aligned} \xi_{lx} &= P(z)e^{-ikx}, \quad \xi_{lz} = \frac{P'(z)}{ik} e^{-ikx}, \\ \xi_{tx} &= -\frac{Q'(z)}{ik} e^{-ikx}, \quad \xi_{tz} = Q(z)e^{-ikx}, \end{aligned} \quad (1)$$

где i – мнимая единица; ξ_{lx}, ξ_{lz} – продольные, ξ_{tx}, ξ_{tz} – поперечные смещения в направлениях x и z соответственно; k – волновое число. Причем

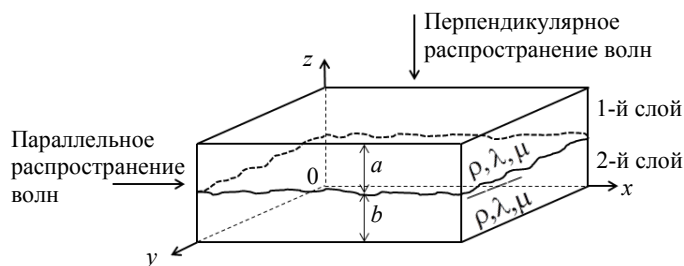


Рис. 1. Модель слоистой структуры
Fig. 1. Layered structure model

$$\begin{aligned}
 P(z) &= A \cos \alpha \left(z - \frac{a}{2} \right) + B \sin \alpha \left(z - \frac{a}{2} \right), \\
 \alpha^2 &= k_l^2 - k^2; \\
 Q(z) &= C \cos \beta \left(z - \frac{a}{2} \right) + D \sin \beta \left(z - \frac{a}{2} \right), \\
 \beta^2 &= k_t^2 - k^2,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где A, B, C, D – пока неопределенные постоянные; k_l, k_t – волновые числа продольной и поперечной волн соответственно.

Выражения для компонент тензора механических напряжений для первого слоя имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xz} &= 2\mu \left(P'(z) + \frac{k^2 - \beta^2}{2ik} Q(z) \right) e^{-ikx}; \quad \sigma_{yz} = 0; \\
 \sigma_{zz} &= \left(\frac{\lambda k_l^2 + 2\mu \alpha^2}{ik} P(z) + 2\mu Q'(z) \right) e^{-ikx}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

Аналогичные параметры во второй среде для уравнений (1)–(3) обозначаются с чертой сверху.

Для описания поведения исследуемых волн на границах слоистой модели введем граничные условия для упругих смещений и механических напряжений. Неоднородные граничные условия описывают неполную передачу составляющих упругих смещений при сохранении передачи механических напряжений для каждой границы модели и задаются в виде

$$\begin{aligned}
 \xi_x(0) &= \overline{\xi_x(0)} - \frac{\overline{\sigma_{xz}(0)}}{KGT}; \quad \sigma_{xz}(0) = \overline{\sigma_{xz}(0)}; \\
 \xi_z(0) &= \overline{\xi_z(0)} - \frac{\overline{\sigma_{zz}(0)}}{KGN}; \quad \sigma_{zz}(0) = \overline{\sigma_{zz}(0)},
 \end{aligned} \tag{4}$$

где KGT, KGN – тангенциальный и нормальный коэффициенты жесткости.

Предполагается, что в общем случае неоднородная граница двух упругих полупространств, образовалась за счет совокупности взаимодействия выступов и впадин микрорельефа. Тогда «разрывы» в передаче упругих смещений возникают за счет множества микроконтактов между двумя рассматриваемыми средами. Выступы и впадины микрорельефа можно смоделировать введением значения шероховатости в коэффициенты жесткости. Тогда введенная в модель шероховатость будет определяться средним расстоянием между соседними неоднородностями на контактирующих поверхностях. Таким образом, степень неоднородности для модели слоистой среды можно регулировать, изменяя значения коэффициентов жесткости.

Нормальный коэффициент жесткости определяет передачу нормальных составляющих упругих смещений, а тангенциальный – передачу касательных составляющих. Коэффициенты жесткости зависят от коэффициента перфорации, характеризующего степень сплошности между прилегающими средами структуры «сталь–графит», а также от значения шероховатости.

Графическое представление нормального и тангенциального коэффициентов жесткости приведено авторами в [7].

В данной публикации при дальнейших расчетах шероховатость принималась равной $R_z = 40$ мкм, а среднее расстояние между соседними неоднородностями на контактирующих поверхностях – равным 0.1 мкм.

Введем в рассмотрение также граничные условия периодичности, которые описывают непрерывное поведение упругих смещений и механических напряжений на границе слоев:

$$\begin{aligned}
 \xi_x(a) &= \overline{\xi_x(b)}, \quad \sigma_{xz}(a) = \overline{\sigma_{xz}(b)}; \\
 \xi_z(a) &= \overline{\xi_z(b)}, \quad \sigma_{zz}(a) = \overline{\sigma_{zz}(b)},
 \end{aligned} \tag{5}$$

т. е. указанные величины в первом слое при $z = a$ должны равняться тем же величинам во втором слое при $z = b$.

Подставляя компоненты для упругих смещений (1) и механических напряжений (3) в неоднородные граничные условия (4), получаем 8 уравнений для постоянных $A, B, C, D, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$, которые распадаются на продольную и поперечную волны [20]. Коэффициенты A, D, \bar{A}, \bar{D} относятся к продольной волне, а коэффициенты B, C, \bar{B}, \bar{C} – к поперечной.

Распространение поперечной волны вертикальной и горизонтальной поляризации параллельно слоям. Пусть в направлении оси x распространяется поперечная волна. Для нее коэффициенты A и D в первой и второй средах равны 0. Тогда с учетом условия $A = D = \bar{A} = \bar{D} = 0$ поперечные смещения в (1) будут четны относительно середины слоев, благодаря чему в слоистой структуре будет наблюдаться только сдвиг. Тогда, подставляя соответствующие четные компоненты упругих смещений и механических напряжений в неоднородные граничные условия, получаем четыре уравнения для поперечной волны [9]:

$$\begin{aligned}
 & -Bik \sin\left(\alpha \frac{a}{2}\right) - C\beta \cos\left(\alpha \frac{a}{2}\right) = \\
 & = \bar{B}ik \sin\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right) + \bar{C}\beta \sin\left(\beta \frac{b}{2}\right) - \\
 & \frac{2\bar{\mu}ik \left[\bar{B}\bar{\alpha} \cos\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right) + \frac{k^2 - \bar{\beta}^2}{2ik} \bar{C} \cos\left(\bar{\beta} \frac{a}{2}\right) \right]}{KGT}, \\
 & -B\alpha \cos\left(\alpha \frac{a}{2}\right) + Cik \cos\left(\beta \frac{a}{2}\right) = \\
 & = \bar{B}\bar{\alpha} \cos\left(\bar{\alpha} \frac{a}{2}\right) + \bar{C}ik \cos\left(\bar{\beta} \frac{a}{2}\right) - \\
 & \frac{ik \left[\frac{\bar{\lambda}k_t^2 + 2\bar{\mu}\bar{\alpha}^2}{ik} \bar{B} \sin\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right) - 2\bar{\mu}\bar{C} \sin\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right) \right]}{KGN}, \\
 & 2B\mu\alpha ik \cos\left(\alpha \frac{a}{2}\right) + C\mu(k^2 - \beta^2) \sin\left(\beta \frac{a}{2}\right) = \\
 & = -\bar{B}\bar{\mu}\bar{\alpha} ik \sin\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right) + \bar{C}(\bar{k}^2 - \bar{\beta}^2) \sin\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right), \\
 & B(\lambda k_t^2 + 2\mu\alpha^2) \sin\left(\alpha \frac{a}{2}\right) + 2C\mu\beta ik \sin\left(\beta \frac{a}{2}\right) = \\
 & = \bar{B}(\bar{\lambda}k_t^2 + 2\bar{\mu}\bar{\alpha}^2) \sin\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right) + 2\bar{C}\bar{\mu}\bar{\beta} ik \sin\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Из четырех полученных уравнений составим детерминант и приравняем его к нулю. Очевидно, что система четырех уравнений всегда имеет решение, так как она однородная и совместная:

$$\begin{vmatrix}
 -ik \sin\left(\alpha \frac{a}{2}\right) & -\beta \sin\left(\beta \frac{a}{2}\right) & ik \sin\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right) - \frac{2\bar{\mu}\bar{\alpha}ik \cos\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right)}{KGT} & \frac{\bar{\beta} \sin\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right) - \bar{\mu}(\bar{k}^2 - \bar{\beta}^2) \cos\left(\bar{\beta} \frac{a}{2}\right)}{KGT} \\
 -\alpha \cos\left(\alpha \frac{a}{2}\right) & ik \cos\left(\beta \frac{a}{2}\right) & \frac{(\bar{\lambda}k_t^2 + 2\bar{\mu}\bar{\alpha}^2) \sin\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right)}{KGN} & \frac{ik \cos\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right) - 2\bar{\mu}\bar{\beta}ik \cos\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right)}{KGN} \\
 2\mu\alpha ik \cos\left(\alpha \frac{a}{2}\right) & \mu(k^2 - \beta^2) \sin\left(\beta \frac{a}{2}\right) & -2\bar{\mu}\bar{\alpha}ik \sin\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right) & \bar{\mu}(\bar{k}^2 - \bar{\beta}^2) \sin\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right) \\
 (\lambda k_t^2 + 2\mu\alpha^2) \sin\left(\alpha \frac{a}{2}\right) & 2\mu\beta ik \sin\left(\beta \frac{a}{2}\right) & (\bar{\lambda}k_t^2 + 2\bar{\mu}\bar{\alpha}^2) \sin\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right) & 2\bar{\mu}\bar{\beta} ik \sin\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right)
 \end{vmatrix} = 0.$$

Решая приведенный определитель разложением по первой строке с учетом граничных условий периодичности (5), получим дисперсионное уравнение, определяющее значение скоростей поперечных волн при двух вариантах поляризации – вертикальной и горизонтальной, при условии параллельного распространения волны относительно слоев:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\bar{\mu}\bar{\beta}}{\mu\beta} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{\beta a}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{\bar{\beta} a}{2} \right) + \left[1 + \left(\frac{\bar{\mu}\bar{\beta}}{\mu\beta} \right)^2 \right] \operatorname{tg} \left(\frac{\beta a}{2} \right) \times \\
 & \times \operatorname{tg} \left(\frac{\bar{\beta} a}{2} \right) + \left[1 + \frac{\bar{\mu}^2 \beta \operatorname{tg} \left(\frac{\beta a}{2} \right)}{KGN} \right] + \left[1 + \frac{\mu \bar{\beta}^2 \operatorname{tg} \left(\frac{\bar{\beta} a}{2} \right)}{KGT} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Данное дисперсионное уравнение определяет волновое число, т. е. значение скорости распространения волны сдвига. Решая данное уравнение относительно волнового числа, получим выражения для скоростей поперечных волн вертикальной и горизонтальной поляризации.

Скорость поперечной горизонтально поляризованной волны $c_{t,H}^{\parallel}$ имеет следующий вид:

$$c_{t,H}^{\parallel} = \sqrt{\left(\frac{a\mu + b\bar{\mu}}{a\rho + b\bar{\rho}} \right) \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{a\mu}{2} \right)}{KGT} + \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{b\bar{\mu}}{2} \right)}{KGN} \right)}.$$

Скорость поперечной вертикально поляризованной волны $c_{t,V}^{\parallel}$ имеет следующий вид:

$$c_{t,V}^{\parallel} = \sqrt{\frac{a+b}{\tilde{\rho} \left(\frac{a}{\mu} + \frac{b}{\bar{\mu}} \right)} \left(1 + \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{b\mu}{2} \right)}{KGT} + \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{a\bar{\mu}}{2} \right)}{KGN} \right)},$$

где $\tilde{\rho} = n\rho + \bar{n}\bar{\rho}$, $n = a/(a+b)$ – относительная толщина первого слоя, $\bar{n} = b/(a+b)$ – относительная толщина второго слоя.

Построим графические зависимости скоростей поперечных волн горизонтальной (рис. 2) и вертикальной (рис. 3) поляризации от относительной толщины слоя n .

Как говорилось ранее, для описания модели слоистой среды необходимо и достаточно задать пять упругих постоянных. Так как распространение продольной волны в слоистой среде с неоднород-

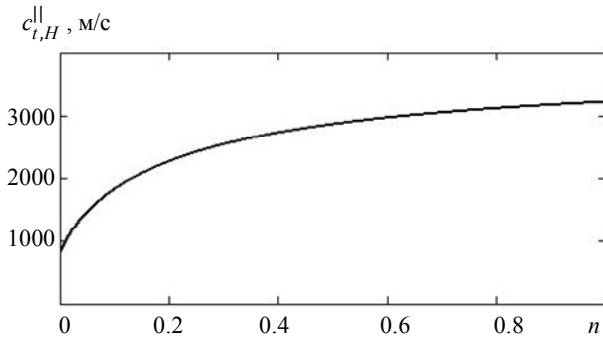


Рис. 2. Зависимость скорости поперечной волны горизонтальной поляризации от относительной толщины слоя при распространении параллельно слоям
Fig. 2. Dependence of the velocity of a transverse wave of horizontal polarization on the relative thickness of the layer during propagation parallel to the layers

ными граничными условиями авторами полностью рассмотрено в [7], а выражения для скоростей поперечной волны найдены в данной работе, то можно определить четыре из пяти упругих постоянных. Для определения пятой упругой постоянной необходимо знать скорости распространения волны под углами к оси z , отличными от 0 и $\pi/2$.

Зависимости поперечных волн вертикальной и горизонтальной поляризации от относительной толщины слоя приведены в [8], [9], [14], однако в них имеются некоторые неточности. Зависимость скорости поперечной волны горизонтальной поляризации при увеличении относительной толщины слоя «сталь–графит» начала спадать, т. е. стремиться к значению скорости в графите, что не согласуется с физическими представлениями о распространении волн в слоистых средах. Зависимость поперечной скорости вертикальной поляризации при средних значениях относительной толщины слоя имела значительный минимум, что также разнится с практическими результатами при определении упругих характеристик.

Исходя из анализа представленных зависимостей можно сказать, что приведенные выше ошибки устранены. Полученные зависимости используются в задачах определения основных физико-механических характеристик материала на основе акустических измерений, что дает более точные результаты по сравнению с уже имеющимися зависимостями.

Распространение поперечной волны вертикальной и горизонтальной поляризации перпендикулярно слоям. Теперь рассмотрим случай перпендикулярного распространения поперечных волн. Пусть в направлении оси z распространяется поперечная волна. Как ранее было сказано, для такой волны коэффициенты A и D в первой и во второй среде равны 0 . Для случая

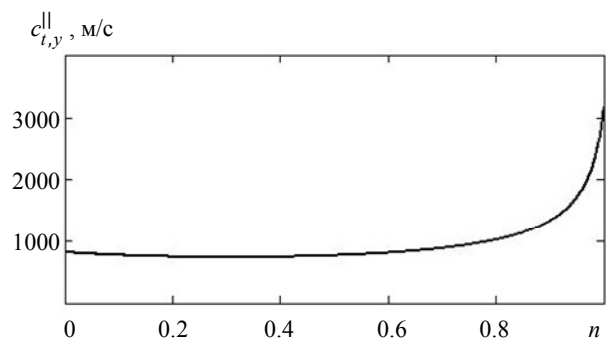


Рис. 3. Зависимость скорости поперечной волны вертикальной поляризации от относительной толщины слоя при распространении параллельно слоям
Fig. 3. Dependence of the velocity of a transverse wave of vertical polarization on the relative thickness of the layer during propagation parallel to the layers

поперечной волны, в которой смещение параллельно слоям из (1) следует, что отличной от нуля будет только компонента упругого смещения $\xi_{tz}^{\perp} = Q(z)e^{-ikx}$. В случае если бы контроль объекта проводился совместно с продольной волной, то при такой геометрии распространения поперечную и продольную волны можно было бы рассматривать независимо друг от друга [23].

Как известно из [24], если матрица-функция $A(t)$ периодична, т. е. $A(t) \equiv A(t+T)$, то любая ее фундаментальная матрица $\Phi(t)$ имеет вид $\Phi(t) = \Psi(t)e^{Bt}$, где B – постоянная, а $\Psi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Данное утверждение описывает теорему Флоке.

Тогда, используя теорему Флоке [24], в выражениях, описывающих распространение волн перпендикулярно слоистой структуре (1), величины $P(z)$ и $Q(z)$ должны быть периодическими функциями с периодом структуры $h = a + b$. Неоднородные граничные условия и условия периодичности должны выполняться для амплитуд ξ_{tz}^{\perp} , σ_{zz}^{\perp} в поперечной волне и для амплитуд ξ_{lx}^{\perp} , σ_{xz}^{\perp} – в продольной.

Подставляя соответствующие компоненты упругих смещений и механических напряжений для перпендикулярного случая распространения волны с учетом теоремы Флоке в неоднородные граничные условия (4), получаем четыре уравнения для коэффициентов A и D в первой и во второй среде:

$$Bik\alpha \sin\left(\alpha \frac{a}{2}\right) = \bar{B}ik \left[1 - \frac{\bar{\alpha}}{KGT}\right] \cos\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right) + \bar{C} \left[\bar{\beta} - \frac{\bar{k}^2 - \bar{\beta}^2}{2KGT}\right] \sin\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right);$$

$$\begin{aligned}
 & B\alpha \cos\left(\alpha \frac{a}{2}\right) + Cik \cos\left(\beta \frac{a}{2}\right) = \\
 & = \bar{C}ik \left[\cos\left(\bar{\beta} \frac{a}{2}\right) - \frac{2\bar{\mu} \sin\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right)}{KGN} \right]; \\
 & C\mu(k^2 - \beta^2) \sin\left(\beta \frac{a}{2}\right) = -\bar{B} \bar{\mu} \bar{\alpha} ik \sin\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right) + \\
 & + \bar{C} \bar{\mu} (\bar{k}^2 - \bar{\beta}^2) \sin\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right); \\
 & B(\lambda k_t^2 + 2\mu \alpha^2) \sin\left(\alpha \frac{a}{2}\right) = \\
 & = \bar{B} (\bar{\lambda} \bar{k}_t^2 + 2\bar{\mu} \bar{\alpha}^2) \sin\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right) + 2\bar{C} \bar{\mu} \bar{\beta} ik \sin\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Из полученных уравнений для коэффициентов A и D для первой и второй среды составим детерминант и приравняем его к нулю:

$$\begin{vmatrix}
 ik\alpha \sin\left(\alpha \frac{a}{2}\right) & 0 & ik \left[1 - \frac{\bar{\alpha}}{KGT} \right] \cos\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right) & \left[\bar{\beta} - \frac{\bar{k}^2 - \bar{\beta}^2}{2KGT} \right] \sin\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right) \\
 \alpha \cos\left(\alpha \frac{a}{2}\right) & ik \sin\left(\beta \frac{a}{2}\right) & 0 & ik \left[\cos\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right) - \frac{2\bar{\mu} \cos\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right)}{KGN} \right] \\
 0 & \mu(k^2 - \beta^2) \sin\left(\beta \frac{a}{2}\right) & -\bar{\mu} \bar{\alpha} ik \sin\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right) & \bar{\mu} (\bar{k}^2 - \bar{\beta}^2) \sin\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right) \\
 (\lambda k_t^2 + 2\mu \alpha^2) \sin\left(\alpha \frac{a}{2}\right) & 0 & (\bar{\lambda} \bar{k}_t^2 + 2\bar{\mu} \bar{\alpha}^2) \sin\left(\bar{\alpha} \frac{b}{2}\right) & 2\bar{\mu} \bar{\beta} ik \sin\left(\bar{\beta} \frac{b}{2}\right)
 \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично уже решенному определителю разложим данный определитель по третьей строке с учетом граничных условий периодичности (5) получим дисперсионное уравнение для поперечной волны, распространяющейся перпендикулярно слоям неоднородной структуры «сталь–графит»:

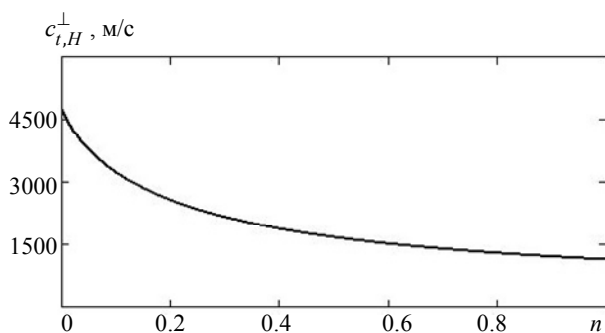


Рис. 4. Зависимость скорости поперечной волны горизонтальной поляризации от относительной толщины слоя при распространении перпендикулярно слоям
Fig. 4. Dependence of the velocity of a transverse wave of horizontal polarization on the relative thickness of the layer during propagation perpendicular to the layers

где $x_2 = \bar{\mu} \bar{k}_t / \mu k_t$.

Если в двух полученных дисперсионных уравнениях коэффициенты жесткости устремить к бесконечности, что будет соответствовать сплошному контакту на границе между средами, который описывается однородными граничными условиями, то получим дисперсионное уравнение для волны, распространяющейся в однородной среде, которое выведено авторами в [11].

Решая данное дисперсионное уравнение относительно волнового числа, построим графические

зависимости скорости поперечной волны горизонтальной (рис. 4) и вертикальной (рис. 5) поляризации от относительной толщины слоя n при распространении перпендикулярно слоям структуры.

Как видно из данных графических зависимостей, значение скорости поперечной волны при

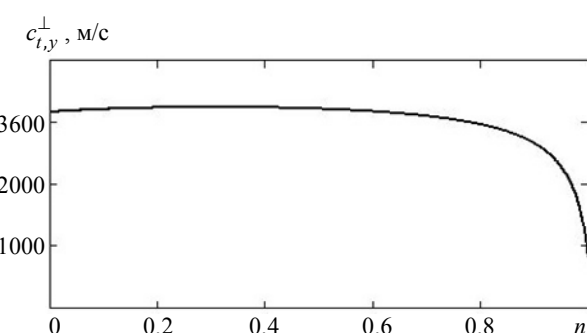


Рис. 5. Зависимость скорости поперечной волны вертикальной поляризации от относительной толщины слоя при распространении перпендикулярно слоям
Fig. 5. Dependence of the velocity of a transverse wave of vertical polarization on the relative thickness of the layer during propagation perpendicular to the layers

увеличении относительной толщины слоя начинает убывать, что согласуется с экспериментальными данными [25]. В случае рассмотрения распространения волн в однородной среде вид данных графических зависимостей не изменяется, однако значения скорости будут несколько выше, чем в приведенном случае. Снижение скорости в случае неоднородной среды обуславливается возможными переотражениями волны между слоями и рассеянием на структурных неоднородностях среды.

Теперь, когда получены скорости поперечных вертикально и горизонтально поляризованных волн, а выражения для скорости продольной волны, как уже было сказано, известны, то можно решить задачу нахождения основных физико-механических характеристик исследуемого материала: модуль упругости, модуль Юнга, коэффициент Пуассона. Данные параметры материала будут однозначно определять тип и структуру материала. Решив задачу о получении скорости продольной и поперечных волн, можно пойти дальше и применить выведенные скорости к нахождению скорости поверхностной волны.

Исследование образца контроля с помощью поверхностной волны будет оптимальнее, так как энергия поверхностной волны практически полностью локализуется в приповерхностном слое об-

разца контроля толщиной порядка двух длин волн – это дает существенную зависимость параметров распространяющейся поверхностной волны от свойств слоя, в котором она распространяется.

Выводы.

1. Решена задача о нахождении скоростей поперечных волн вертикальной и горизонтальной поляризации при двух вариантах геометрии распространения волны (параллельно и перпендикулярно слоям неоднородной структуры с объемной трещиноватостью) посредством решения дисперсионного уравнения относительно волнового числа.

2. Показано влияние неоднородности слоистой модели на значение скорости распространения поперечной волны вертикальной и горизонтальной поляризации. Проведена оценка влияния наличия микронеоднородности на значения физико-механических характеристик материала объекта контроля.

3. Полученные зависимости используются применительно к задачам нахождения основных физико-механических характеристик материала на основе акустических измерений, а также в качестве основного материала для проведения предызмерительных изысканий с целью получения максимального объема информации без применения средств ультразвукового контроля.

Список литературы

1. Курашкин А. В. Исследование акустопругого эффекта в анизотропном пластически деформированном материале // Акуст. журн. 2019. Т. 65, № 3. С. 382–388.

2. Зарембо Л. К., Кошкина Е. Н., Чунчuzов И. П. Взаимная трансформация продольных и сдвиговых волн в неоднородной изотропной среде // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 6. С. 781–784.

3. Ватульян А. О., Явруян О. В., Богачев И. В. Идентификация неоднородных свойств ортотропного упругого слоя // Акуст. журн. 2013. Т. 59, № 6. С. 752–758.

4. Dynamics of structural interfaces: Filtering and focusing effects for elastic waves / M. Brun, S. Guenneau, A. V. Movchan, D. Vegoni // J. Mech. Physics Solids. 2010. Vol. 58. P. 1212–1224.

5. Хлыбов А. А. Исследование влияния микронеоднородности среды на распространение поверхностных волн // Дефектоскопия. 2018. № 6. С. 3–10.

6. Панасюк О. Н. Анализ влияния граничных условий на распространение волн в слоистых композитных материалах // Прикл. механика. 2014. Т. 50, № 4. С. 52–58.

7. Аббакумов К. Е., Вагин А. В. Дисперсионное уравнение для продольной волны в слоистой среде с неоднородными граничными условиями при различных направлениях распространения // Дефектоскопия. 2020. № 1. С. 22–30.

8. Рытов С. М. Акустические свойства мелкослоистой среды // Акуст. журн. 1956. Т. 2, № 1. С. 71–83.

9. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 340 с.

10. Аббакумов К. Е., Вагин А. В. Волновые процессы в слоистой микронеоднородной среде с неоднородными граничными условиями // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2019. № 5. С. 12–19.

11. Аббакумов К. Е., Вагин А. В. Волновые процессы в слоистой среде // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2018. № 8. С. 87–91.

12. Panasyk O. N. Propagation of quasishear waves in prestressed materials with unbonded layers // Int. Appl. Mech. 2011. Vol. 47. P. 276–282.

13. Jose M. Carcione anisotropic Q and velocity dispersion of finely layered media // Geophysical Prospecting. 1992. Vol. 40. P. 761–783.

14. Luk'yashko O. A., Saraikin V. A. Transient one-dimensional wave processes in a layered medium // *J. of Mining Sci.* 2007. Vol. 43. P. 145–158.
15. Gei M., Bigoni D., Franceschini G. Thermoelastic small-amplitude wave propagation in nonlinear elastic multilayers // *Math. and Mech. of Solid.* 2003. No. 1. P. 27–36.
16. Dynamics of structural interfaces: Filtering and focusing effects for elastic waves / M. Brun, S. Guenneau, A. B. Movchan, D. Bigoni // *J. Mech. Physics Solids.* 2010. No. 58. P. 1212–1224.
17. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
18. Расчетно-экспериментальное исследование влияния виброакустических нагрузок на прочность композитного соединения / С. В. Дубинский, Ф. С. Севастьянов, А. Ю. Голубев, С. Л. Денисов, В. М. Костенко, И. А. Жаренов // *Акуст. журн.* 2019. Т. 65, № 3. С. 382–388.
19. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука, 1980. 280 с.
20. Evel'son R. L. A fine-layered medium of finite-thickness in an electromagnetic field // *J. of communications Technol. and Electronics.* 2015. Vol. 60, no. 6. P. 552–559.
21. Чабан И. А. Расчет эффективных параметров микронеоднородных сред методом самосогласованного поля // *Акуст. журн.* 1965. № 1. С. 102–109.
22. Чабан И. А. Метод самосогласованного поля в применении к расчету эффективных параметров микронеоднородных сред // *Акуст. журн.* 1964. № 3. С. 351–358.
23. Вавакин А. С., Салганик Р. Л. Эффективные упругие характеристики тел с изолированными трещинами, полостями и жесткими неоднородностями // *Механика твердого тела.* 1978. № 2. С. 95–107.
24. Floquet M. G. Sur les equations differentielles lineaires a coefficients periodiques // *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure.* 1983. Vol. 12. P. 47–88.
25. Купрадзе В. Д., Соболев С. Л. Упругие волны на границах двух сред // *Тр. Сейсмического ин-та АН СССР.* 1930. № 10. С. 58–67.

Информация об авторе

Вагин Антон Владимирович – аспирант, ассистент кафедры электроакустики и ультразвуковой техники СПбГЭТУ «ЛЭТИ».
E-mail: av.vagin@bk.ru

References

1. Kurashkin A. V. Issledovanie akoustouprugogo jefekta v anizotropnom plasticheski deformiro-vannom materiale // *Akust. zhurn.* 2019. Т. 65, № 3. С. 382–388. (In Russ.).
2. Zarembo L. K., Koshkina E. N., Chunchuzov I. P. Vzaimnaya transformacija prodol'nyh i sdvigovyh voln v neodnorodnoj izotropnoj srede // *Akust. zhurn.* 1984. Т. 30, № 6. С. 781–784. (In Russ.).
3. Vatul'jan A. O., Javrujan O. V., Bogachev I. V. Identifikacija neodnorodnyh svojstv ortotropno-go uprugogo sloja // *Akust. zhurn.* 2013. Т. 59, № 6. С. 752–758. (In Russ.).
4. Brun M., Guenneau S., Movchan A. B., Begoni D. Dynamics of structural interfaces: Filtering and focusing effects for elastic waves // *J. Mech. Physics Solids.* 2010. Vol. 58. P. 1212–1224.
5. Hlybov A. A. Issledovanie vlijanija mikroneodnorodnosti srede na rasprostranenie poverhnostnyh voln // *Defektoskopija.* 2018. № 6. С. 3–10. (In Russ.).
6. Panasyuk O. N. Analiz vlijanija granichnyh uslovij na rasprostranenie voln v sloistyh kompozitnyh materialah // *Prikl. mehanika.* 2014. Т. 50, № 4. С. 52–58. (In Russ.).
7. Abbakumov K. E., Vagin A. V. Dispersionnoe uravnenie dlja prodol'noj volny v sloistoj srede s neodnorodnymi granichnymi uslovijami pri razlichnyh napravlenijah rasprostraneniya // *Defektoskopija.* 2020. № 1. С. 22–30. (In Russ.).
8. Rytov S. M. Akusticheskie svojstva melkosloistoj srede // *Akust. zhurn.* 1956. Т. 2, № 1. С. 71–83. (In Russ.).
9. Brehovskih L. M. Volny v sloistyh sredah. M.: Nauka, 1973. 340 s.
10. Abbakumov K. E., Vagin A. V. Volnovye processy v sloistoj mikroneodnorodnoj srede s neodnorodnymi granichnymi uslovijami // *Izv. SPbGJeTU «LJeTI».* 2019. № 5. С. 12–19. (In Russ.).
11. Abbakumov K. E., Vagin A. V. Volnovye processy v sloistoj srede // *Izv. SPbGJeTU «LJeTI».* 2018. № 8. С. 87–91. (In Russ.).
12. Panasyk O. N. Propagation of Quasishear Waves in Prestressed Materials with Unbonded Layers // *Int. Appl. Mech.* 2011. Vol. 47. P. 276–282.
13. Jose M. Carcione anisotropic Q and velocity dispersion of finely layered media // *Geophysical Prospecting.* 1992. Vol. 40. P. 761–783.
14. Luk'yashko O. A., Saraikin V. A. Transient one-dimensional wave processes in a layered medium // *J. of Mining Sci.* 2007. Vol. 43. P. 145–158.
15. Gei M., Bigoni D., Franceschini G. Thermoelastic small-amplitude wave propagation in nonlinear elastic multilayers // *Math. and Mech. of Solid.* 2003. No. 1. P. 27–36.
16. Brun M., Guenneau S., Movchan A.B., Bigoni D. Dynamics of structural interfaces: Filtering and focusing effects for elastic waves // *J. Mech. Physics Solids.* 2010. No. 58. P. 1212–1224.

17. Shermergor T. D. Teorija uprugosti mikroneodnorodnyh sred. M.: Nauka, 1977. 400 s. (In Russ.).

18. Raschetno-jeksperimental'noe issledovanie vlijaniya vibroakusticheskikh nagruzok na prochnost' kompozitnogo soedinenija / S. V. Dubinskij, F. S. Sevast'janov, A. Ju. Golubev, S. L. Denisov, V. M. Kostenko, I. A. Zharenov // Akust. zhurn. 2019. T. 65, № 3. S. 382–388. (In Russ.).

19. Petrashen' G. I. Rasprostranenie voln v anizotropnyh uprugih sredah. L.: Nauka, 1980. 280 s. (In Russ.).

20. Evel'son R. L. A fine-layered medium of finite-thickness in an electromagnetic field // J. of Communications Technol. and Electronics. 2015. Vol. 60, no. 6. P. 552–559. (In Russ.).

21. Chaban I. A. Raschjot jeffektivnyh parametrov mikroneodnorodnyh sred metodom samosoglasovannogo polja // Akust. zhurn. 1965. № 1. S. 102–109. (In Russ.).

22. Chaban I. A. Metod samosoglasovannogo polja v primenenii k raschjotu jeffektivnyh parametrov mikro-neodnorodnyh sred // Akust. zhurn. 1964. № 3. S. 351–358. (In Russ.).

23. Vavakin A. S., Salganik R. L. Jeffektivnye uprugie harakteristiki tel s izolirovannymi treshhinami, polostjami i zhestkimi neodnorodnostjami // Mehanika tverdogo tela. 1978. № 2. S. 95–107. (In Russ.).

24. Floquet M. G. Sur les equations differentielles lineaires a coefficients periodiques // Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure. 1983. Vol. 12. P. 47–88. (In Russ.).

25. Kupradze V. D., Sobolev S. L. Uprugie volny na granicah dvuh sred // Tr. Sejsmicheskogo in-ta AN SSSR. 1930. № 10. S. 58–67. (In Russ.).

Information about the author

Anton V. Vagin – postgraduate student, Assistant of the Department of Electroacoustics and Ultrasound Technology of Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: av.vagin@bk.ru

Статья поступила в редакцию 17.12.2022; принята к публикации после рецензирования 13.01.2023; опубликована онлайн 25.03.2023.

Submitted 17.12.2022; accepted 13.01.2023; published online 25.03.2023.
