УДК 611.08; 611.018+611.214

Г. Г. Иванова, М. К. Касумова

Группа компаний «МЕДИ», Санкт-Петербургский институт стоматологии последипломного образования

Э. П. Тихонов Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

Информационные технологии при идентификации структуры твердых тканей зубов в системном представлении: методы и результаты*

На базе разработанных вариантов физико-математической модели (ФММ) твердых тканей зубов (TT3), устанавливающих математически функциональную связь ФММ с параметрами, характеризующими структуру распределения дентинных трубочек, и формой исследуемого зуба посредством электрического зондирующего сигнала, решается задача идентификации TT3 по экспериментальным данным. Основу идентификации ФММ составляют итерационные алгоритмы, минимизирующие ошибку (невязку) расхождения численных значений искомых параметров, определяющих синтезированную ФММ и измеренных в результате проведения эксперимента. При проведении эксперимента измеряемыми параметрами являются значения активных сопротивлений в дискретных точках шлифа, устанавливаемых в результате построчного или иного сканирования поверхности шлифов зубов. По экспериментальным данным, полученным на основе электрического зондирующего сигнала в режиме in vitro, приводятся результаты идентификации, демонстрирующие адекватность синтезированной ФММ и возможность в соответствии с этим косвенного измерения таких важных параметров, как положение центра сопротивления зуба и его оси ориентации.

Координатно-информационно-измерительный комплекс, физико-математическая модель, влияющие факторы, погрешность измерения, экспериментальные данные, фрактальная закономерность

В соответствии с исходной целью, поставленной в [1], в настоящей работе на базе разработанных в последующих статьях [2], [3] вариантов физико-математической модели (ФММ) твердых тканей зубов (TT3), математически устанавливающих функциональную связь параметров ФММ с особенностями структуры дентинных трубочек (ДТ) и формой исследуемого зуба, рассматривается задача идентификации TT3 по экспериментальным данным. Эта задача эквивалентна параметрической идентификации при решении так называемой проблемы «белого ящика» [4]. Показано, что благодаря разработанным ФММ и использованию на их основании общих методов и алгоритмов идентификации, а также способов косвенного измерения, создаются предпосылки для извлечения информации о недоступных для прямого измерения параметрах зуба. К этим параметрам относятся в первую очередь координаты положения центра сопротивления зуба и так называемая ось ориентации зуба [2].

.....

Актуальность работы следует из того, что приобретенная в результате решения задачи идентификации информация расширяет общие знания о параметрах структуры TT3, тем самым уточняя представления о морфологических и биомеханических особенностях и свойствах ТТЗ, играющих существенную роль в повышении качества протезирования и имплантации зубов, а также при решении проблемы автоматизации диагностики. Увеличение объема доступных знаний о структуре TT3 представляет также значительный интерес для физиологии и понимания динамики и механизма эволюции челюстно-лицевой системы в целом, включая механику жевательного процесса [5]. В работах (см., например, [6]), посвященных ортодонтии, отмечается, в частности, насколько необходимы хотя бы приближенные знания о положении центра сопротивления зуба при выборе и активации ортодонтической аппаратуры. В связи с этим установление как теоретически, так и

^{*} Окончание. Начало в № 5, 6, 10/2018.

экспериментально, количественной связи между распределением ДТ и центром сопротивления зуба не только расширяет знания о морфологии TT3, но и представляет несомненный практический интерес.

Необходимость решения задачи идентификации заключается в том, что исходно ФММ построена на основании обобщенной исходной информации, не учитывающей индивидуальные особенности конкретного исследуемого объекта. Кроме того, что характерно для биологических объектов исследования, обычно исходная информация недостаточно достоверна и полна, так как она доступна с неучтенными искажениями. Решение задачи идентификации в рассматриваемом случае выполняется на основе применения электрического ЗС, тогда как варианты ФММ были разработаны с учетом ранее полученной информации о структуре ТТЗ [1], [2], в том числе благодаря оптическому ЗС и специально разработанному методу и устройству его применения [7], [8].

Математическая постановка задачи идентификации, включая и рассматриваемый случай, сводится к следующему. Пусть имеется функциональная зависимость в виде ФММ между доступной для прямых измерений физической величиной, определяемой видом ЗС, и параметрами, связанными со свойствами исследуемого биологического или иного объекта. При этом множество этих параметров делится на две группы. В первую группу входят те параметры, информацию о которых можно получить с помощью прямого измерения (доступные для наблюдений параметры). К таким параметрам можно отнести, например, геометрические размеры исследуемого объекта. Ко второй группе относятся параметры, которые недоступны непосредственному наблюдению, но входят в функциональную зависимость, формирующую ФММ.

Следовательно, функциональная зависимость, определяющая ФММ, в общем случае [1] имеет вид

$$R = R (\mathbf{X}, \mathbf{Y}), \tag{1}$$

где **X** = $(x_1, x_2, ..., x_m)$ – вектор доступных для прямых измерений параметров; **Y** = $(y_1, y_2, ..., y_n)$ – вектор недоступных для наблюдений параметров; R (**X**, **Y**) – заданная в неявном виде ФММ.

Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что по полученной заранее в явном виде ФММ [3], связывающей предполагаемую реакцию объекта на воздействие электрического 3С с параметрами, входящими в ФММ и зависящими от структуры исследуемого объекта, требуется: – удостовериться в том или ином смысле в правильности построенной ФММ, т. е. в достоверности общей функциональной зависимости $R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, представленной в явном виде;

 количественно оценить составляющие вектора Y, недоступные для наблюдения, т. е. значения которых невозможно получить путем прямых измерений.

Для того чтобы реально выявить составляющие векторов X и Y, выполним соответствующий анализ полученной в [3] ФММ, которую представим в следующем явном виде:

$$R(\mu_{i}, \Delta\mu_{i}, \mu_{3}, h_{0}, h_{id}, ...) =$$

$$= \Theta_{i} / \cos \left[\operatorname{arctg}(\mu_{i} - \Delta\mu_{i}) \right] \times$$

$$\ln \left[\left[z_{i+}^{2} \left(1 + z_{i-}^{2} \right) \right] / \left[z_{i-}^{2} \left(1 + z_{i+}^{2} \right) \right] \right]$$
(2)

с учетом того (см. [3, (12)]), что вероятность попадания ДТ под площадь электрода, по которому подается постоянный электрический ЗС с заданным током и напряжением [1], определяется по формуле

х

$$P(\mu_{i} - \mu_{3} \leq \mu_{i} \leq \mu_{i} + \mu_{3}) =$$

$$= \frac{1}{4\pi h_{id} \phi_{i_{\max}}} \ln \left[\frac{z_{i+}^{2}(1 + z_{i-}^{2})}{z_{i-}^{2} \left[1 + z_{i+}^{2} \right]} \right], \quad (3)$$

$$-\mu_{i_{\text{III}}} \leq \mu_{i} \leq \mu_{i_{\text{III}}},$$

где
$$\mu_{iIII} \leq \mu_i \leq \mu_{iIII}$$
 и $\Theta_i = \frac{4\pi h_{id} h_0 \varphi_{i_{max}}}{S_{cp} N_{\text{ДТ } \ni i}} \rho$ или $\Theta_i = \frac{4 h_{di} h_0 \varphi_{i_{max}}}{r_{cp}^2 N_{\text{ДТ } \ni i}} \rho$, а

также с учетом того, что $S_{\rm cp} = \pi r_{\rm cp}^2$; $r_{\rm cp}$ – средний радиус ДТ; $z_{i+} = \mu_i + \Delta \mu_i + \mu_3$, $z_{i-} = \mu_i + \Delta \mu_i - \mu_3$ $-\mu_{3}, \ \mu_{i} = r_{i}/h_{id}, \ \mu_{iIII} = r_{iIII}/h_{id}, \ \mu_{3} = r_{3}/h_{id}, \ \Delta\mu_{i} =$ $=\Delta_i/h_{id}$ – безразмерные величины, для определения которых используются следующие параметры: r_э – радиус электрода; h_{id} – высота конуса, аппроксимирующего распределение ДТ в пределах коронки зуба, и тем самым совпадающая с осью роста зуба [3], которая для хорды должна быть скорректирована в соответствии с локальной областью $U_{\varepsilon_{\min}i}(x)$; $r_{i \parallel \parallel}$ – радиус аппроксимирующей шлиф зуба окружности или половина ее хорды; Δ_i – смещение точки локального минимума x_{0*i*min} измеряемого сопротивления относительно середины отрезка $[r_i, r_{i+1}]$, по которому сканируется шлиф зуба, причем $[r_{i+1} - r_i]/2 \ge |\Delta_i| \ge 0;$ r_i - координата центра сканирующего электрода, причем $r_i \in [r_i, r_{i+1}]; \phi_{i_{\max}}$ – угловая апертура асимметричного створа ДТ, формируемого относительно локального минимума $x_{0i_{\min}}$ в пределах отрезка [r_i, r_{i+1}] для *i*-й локальной области (фокона) $U_{\epsilon_{\min}i}(x)$ ([3, рис. 4 и пояснения]), совпадающей для оси ориентации зуба с диаметром аппроксимирующей шлиф зуба окружности 2r_ш; $N_{\Pi T \ ji}$ – общее число ДТ, которые укладываются в выделенной на шлифе полосе шириной 2r_э, совпадающей с анализируемым отрезком [r_i, r_{i+1}] прямой при строчном сканировании поверхности шлифа; *р* – коэффициент пропорциональности определяется через удельную проводимость электролита [3] и соответствует удельному сопротивлению единичной ДТ; i = 0, 1, 2, ..., m.

Отметим, что для фиксированного i значение Θ_i постоянно.

Таким образом, вектор с составляющими, доступными для прямых измерений параметров, раскроем в виде

$$\mathbf{X} = (r_i, r_{\mathfrak{H}}, r_{\mathfrak{H}}, h_0),$$

а составляющие вектора Y, с недоступными для прямых измерений параметров, представим в виде

$$\mathbf{Y} = (h_{id}, \Delta_i, \rho, N_{\text{ДТ } \ni i}, r_{\text{cp}}, \varphi_{1_{\text{max}}})$$

Угол $\varphi(r_i)$, от которого зависит измеряемое сопротивление в соответствии с (2), связывает координату r_i положения электрода на шлифе с высотой h_{id} конуса, аппроксимирующего распределение ДТ в пределах локальной области $U_{\varepsilon i}(x)$ коронки зуба [3], равенством

$$\varphi(r_i) = \operatorname{arctg}(\mu_i), \ \mu_i = r_i / h_{id}$$

Угловая апертура асимметричного створа ДТ $\varphi_{i_{\max}}$, равная сумме $\varphi_{1i_{\max}}$ и $\varphi_{2i_{\max}}$, которые, как это следует из [3], определяются в пределах той же локальной области $U_{\varepsilon_i}(x)$ в соответствии с формулами

$$\varphi_{1i_{\max}} = \arctan(\mu_{i \prod} - \Delta \mu_i);$$

$$\varphi_{2i_{\max}} = \arctan(\mu_{i \prod} + \Delta \mu_i),$$

на основании которых получаем

$$\varphi_{i_{\max}} = \operatorname{arctg} (\mu_{i \amalg} - \Delta \mu_i) + \operatorname{arctg} (\mu_{i \amalg} + \Delta \mu_i).$$

В результате, воспользовавшись известным равенством arctg (α) + arctg (β) = arctg [(α + β)/(1 – $-\alpha\beta$)] при $\alpha\beta$ < 1, приходим к равенству

.....

$$\varphi_{i_{\text{max}}} = \operatorname{arctg}\left[\frac{2\mu_{\text{III}}}{1 - \left(\mu_{\text{III}}^2 - \Delta\mu^2\right)}\right],\tag{4}$$

где $\mu_{iIII} = r_{iIII}/h_{id}$; $\Delta \mu_i = \Delta_i/h_{id}$. Причем использование (4) для расчетов возможно при выполнении условия

$$\left(\mu_{\rm III}^2 - \Delta \mu^2\right) < 1. \tag{5}$$

Данное условие выполняется только в том случае, когда $r_i < h_{id}$ и, следовательно, $\Delta \mu_i < 1$. Отметим также, что хорда r_{iIII} связана с радиусом r_{0III} окружности известным равенством

$$r_{i\mathrm{III}} = 2\sqrt{r_{0\mathrm{III}}^2 - \Delta l^2},$$

где Δl – расстояние между хордой и диаметром аппроксимирующей шлиф окружности.

Как следует из (2), входящие в нее параметры, доступные и недоступные для прямых измерений, связаны между собой элементарными действиями, которые приводят в итоге к безразмерным параметрам, за исключением параметра Θ_i , единицы измерения которого определяются р. Анализ (2) показывает также, что параметр Θ_i (для фиксированного *i* и при $\mu_i = 0$) определяет сопротивление шлифа в пределах площади электрода. Значение этого сопротивления доступно для прямых измерений и меняется при движении электрода в установленном направлении в соответствии с (2) в зависимости от изменения координаты r_i. Значение данной координаты известно, так как она устанавливается в координатно-информационно-измерительном комплексе (КИИК), фотография которого приведена в [2].

Для $\mu_i = 0$, при условии, что в (2) выполняется равенство

$$R(\ldots) = \Theta_i / \cos \left[\operatorname{arctg} \left(\Delta \mu_i \right) \right],$$

формально получаем уравнение

$$\ln\left\{\frac{\left(\Delta\mu_{i}+\mu_{\Im}\right)^{2}\left[1+\left(\Delta\mu_{i}-\mu_{\Im}\right)^{2}\right]}{\left(\Delta\mu_{i}-\mu_{\Im}\right)^{2}\left[1+\left(\Delta\mu_{i}+\mu_{\Im}\right)^{2}\right]}\right\}=1.$$

Что касается остальных параметров, а именно Δ_i и h_{id} , то они определяются в результате идентификации ФММ (2) по экспериментальным данным. Заметим, что при решении задачи идентификации параметр Θ_i для фиксированного *i* рассматривается и непосредственно находится экспериментально независимо или, что то же самое,

.....

без учета его структуры, раскрытой теоретически и представленной в (3). Аналогично при идентификации можно рассматривать и остальные параметры, а именно $z_{i+}, z_{i-}, \mu_i, \mu_{i}, \Delta \mu_i$, значения которых, как это следует из (2), безразмерны и связаны с доступными и недоступными для прямых измерений параметрами, характеризующими структуру ТТЗ. Значения этих параметров можно определить только на базе эксперимента в результате идентификации ФММ, предварительно задав их предполагаемые или начальные значения. Напомним, что идентификацией биосистемы называется процесс уточнения по экспериментальным данным параметров ее математической, физической или иной модели, описанной теоретически на основе подходящего для этой цели математического аппарата с учетом физикохимических, механических или других известных закономерностей. Достоверность получения этой модели в виде математической формулы (2) с точностью до значений ее недоступных для прямых измерений параметров обоснована в [2]. Следует отметить, что идентификация ФММ биологического объекта, несмотря на общность постановки задачи, существенно отличается от достаточно развитой теории идентификации технических объектов (см., например, [4], [9]). Самое главное отличие заключается в более высокой сложности и вариативности структуры биологического объекта по сравнению с любым техническим объектом, включая вариабельность структуры однотипных биологических объектов, намного превышающих эту характеристику у технических систем. Разработанная ФММ (2) позволяет спрогнозировать общую структуру исследуемого зуба в пределах дентина и оценить изменение его омического сопротивления в различных точках. Однако для этого необходимо иметь представление об основных соотношениях [2], [3], связывающих это сопротивление с типом зуба и его геометрией и влияющих на выбор способа математической аппроксимации его формы и на распределение ДТ в дентине по результатам измерения сопротивления в установленных точках исследуемого шлифа. Основная трудность, с которой приходится сталкиваться при определении геометрических параметров, связана с определением, например, самого понятия «внешней кромки зуба» как его основного геометрического параметра. Дело в том, что внешняя торцевая поверхность зуба представляет собой сложный нелинейный геометрический объект, поскольку состоит из бугров, борозд и фиссур. Кроме того, модель (2), описывающая структуру ТТЗ, построена для дентина, тогда как внешняя поверхность зуба заканчивается эмалью. Поэтому данный параметр можно определить только как среднестатистический на основе предварительного изучения множества однотипных зубов. Если этот параметр известен, а также в среднем известна форма цилиндрической части зуба, то можно с достаточно высокой точностью по результатам исследования шлифа предсказать общую структуру ТТЗ и через процедуру идентификации количественно оценить его параметры.

Необходимо обратить внимание на то, что в [3] на основе исходной математической модели вида

$$R(\mu_i, \Delta\mu_i, \mu_3, h_0, h_{id}) =$$

= $\rho_0 / [\cos(\varphi) \beta(r_3) P(r_i - r_3 \le r_i \le r_i + r_3)],$

где $\rho_0 = (\rho h_0)/(S_{cp}N_{\text{ДТ }3i})$ – параметр, измеряемый, как и сопротивление, в омах и килоомах, для конкретного исследуемого шлифа в пределах отрезка [r_i , r_{i+1}] и с учетом условия (5) получена следующая модификация в явном виде искомой ФММ для определения сопротивления в установленной точке шлифа при фиксированном *i*:

$$R(\mu_{i}, \Delta\mu_{i}, \mu_{3}, h_{0}, h_{id}, \Theta_{i}) =$$

$$= \Theta_{i} / \cos \left[\operatorname{arctg}(\mu_{i} - \Delta\mu_{i}) \right] \times$$

$$\times \operatorname{arctg} \left\{ \frac{2\mu_{3}}{1 + \left[(\mu_{i} + \Delta\mu_{i})^{2} - \mu_{3}^{2} \right]} \right\}, \quad (6)$$

$$-\mu_{i\mathrm{III}} \leq \mu_{i} \leq \mu_{i\mathrm{III}}.$$

В (6) в отличие от (3) при определении вероятности попадания ДТ $P(r_i - r_2 \le r_i \le r_i + r_2)$ исходили из того, что общее число ДТ N_{ДТ эi} укладывается на анализируемом шлифе не в полосе, имеющей ширину, равную диаметру электрода $2r_{2}$, а только на диаметре электрода, совпадающем с анализируемым отрезком [r_i, r_{i+1}] при строчном сканировании поверхности шлифа для *i* = 0, 1, 2, ..., *m*. Следовательно, постоянные Θ_i , хоть и вычисляются по совпадающей по виду формуле, но по значению несколько отличаются из-за отличия исходных условий для определения значения $N_{\Pi T \to i}$, определяющего число ДТ, которые укладываются в выделенном при сканировании электродом отрезке шлифа. В связи с этим представляет интерес сравнение графиков, описывающих изменения сопротивления при сканировании шлифа, вычисленные по модификациям синтезированных ФММ (2) и (6), в соответствии с которыми вычисляются искомые вероятности $P(r_i - r_3 \le r_i \le r_i + r_3)$. При этом для наглядности все параметры, определяющие постоянную Θ_i , совпадают по значению. Соответствующие графики, приведенные на рис. 1, получены с использованием программы, фрагмент которой представлен на языке программирования *Visual Basicfor Applications (VBA*) в следующем виде:

•		1
1	=	I

Do ss.Value(i, 1) = 4 * PI * q * s * (Atn((N/2 – -m) * k) + Atn((N/2 + m) * k))/(Cos(Atn(N/2 – (m+r) - (i+1) * k))) * (Abs(Log(((((N/2 – -(m+r) - i+1) * k + d) ^ 2)/(1 + ((N/2 – -(m+r) - i+1) * k + d) ^ 2))/((((N/2 – -(m+r) - i+1) * k - d) ^ 2)/(1 + ((N/2 – -(m+r) - i+1) * k - d) ^ 2)))))) ss.Value(i, 2) = 4 * PI * q * s * (Atn((N/2 – -m) * k) + Atn((N/2 + m) * k))/((Cos(Atn((N/2 – -(m) - i+1) * k))) * (Atn(((N/2 – m – -i+1) * k + r)) – Atn(((N/2 – m – -i+1) * k + r))) = Atn(((N/2 – m – -i+1) * k + r)) = Atn(((N/2 – m – -i+1) * k + r))))))

Во фрагменте программы используются следующие численные значения параметров: N = 60 - 1000параметр, определяющий диаметр шлифа через максимальное число квантов; k = 0.1 - масштабный коэффициент, определяющий квант при дискретном сканировании шлифа, мм; m = 10 - параметр, определяющий сдвиг основания высоты аппроксимирующего конуса относительно геометрического центра шлифа [3]; d = 0.03 - параметр, определяющий диаметр электрода; *s* = 65 – параметр, соответствующий отношению р/ЛЛ э (см. (3)); q = 0.2 – параметр, определяющий отношение $h_0 h_{id} / S_{cp}$ (см. (3)); r = 0.01 - параметр,введенный для устранения эффекта деления на ноль, возникающего в аргументе логарифмической функции из-за дискретности ее аргумента, і – целочисленная переменная, определяющая дискретное движение электрода по поверхности шлифа при его сканировании с интервалом дискретизации 0.1 мм (рис. 1), причем $1 \le i \le 60$.

Как следует из рис. 1, график *I* (и это должно следовать из теории) соответствует расчетам по ФММ, синтезированной с учетом влияния на результаты измерений ДТ, расположенных в пределах диаметра электрода, в отличие от графика *2*, определяющего сопротивление в исследуемой



точке дентина по числу ДТ, попадающих в пределы всей контактной площади электрода. Интересно отметить, что формы обоих графиков, приведенных на рис. 1, совпадают или, что то же самое, имеют существенную корреляцию с формой графиков в [10], описывающих динамику угловой интенсивности оптического ЗС в плоскостях, ориентированных перпендикулярно и параллельно направлению распределения ДТ в дентине. Соответствующий анализ показывает также, что график 2 аппроксимирует реальные зависимости с большей точностью.

На основе электрического ЗС можно экспериментально исследовать общую структуру строения дентина зуба по распределению ДТ в окрестностях точек роста. Действительно, обратимся к рис. 2, на котором представлены совмещенные графики *1* и *2*, которые получены в результате сканирования электродом поверхности шлифа по взаимно перпендикулярным прямым, т. е. по разным сечениям зуба. При этом график *1* получен при сканировании по прямой, близкой к оси ориентации зуба, а график *2* определяет направление сканирования от щечного до язычного. Анализ графиков показывает, что точка роста зуба, обнаруженная у моляра, смещена от щечного к язычному направлению.



На рис. 2, 3 по оси абсцисс отложены значения координат центра электрода, полученные при движении с шагом дискретизации 0.4 мм по прямой в пределах исследуемого шлифа. По оси ординат отложены значения измеряемых сопротивлений в омах.

Графики рис. 3 демонстрируют наличие сечения в коронке зуба, в котором распределения ДТ имеют усиленную анизотропию, так как динамика сопротивления в этом сечении существенно выше (график 1), чем динамика сопротивлений, обнаруженная в двух расположенных на расстоянии 0.2 мм соседних сечениях (графики 2 и 3), полученных при строчном сканировании электродом шлифа зуба. Причем графики 2 и 3 позволяют количественно оценить динамику наклона ДТ в язычном и щечном направлениях относительно оси ориентации зуба при движении электрода в соответствующем направлении.



Однако осуществить достаточно точную количественную оценку, на основании которой можно было бы выполнить соответствующую интерпретацию расположения ДТ в окрестности точек роста и коронке зуба, только по результатам эксперимента, без решения задачи идентификации полученной ФММ, возможно только приближенно (в пределах 10...20 %). Затруднения с выделением тонкой структуры строения дентина вызваны, например, несоизмеримостью диаметров электрода и ДТ при измерении сопротивления в заданной точке шлифа. Отношение этих диаметров может превышать 10³ и более. Аналогичную информацию о расположении ДТ в теле зуба невозможно получить применением оптического ЗС, несмотря на высокую разрешающую способность оптического ЗС, из-за нерегулярного

.....

распределения ДТ в дентине. Оптический сигнал, кроме точек роста, из-за мелкодисперсного строения ТТЗ и особенностей распределения ДТ неравномерно рассеивается по поверхности шлифа и тем самым не выявляет интересующую нас структуру ТТЗ в целом [8]. Тем более невозможно получить эту информацию при использовании рентгеновского ЗС из-за его высокой проникающей способности, приводящей к нивелированию информации о динамике распределения ДТ. Напомним, что для проводимых исследований шлиф зуба изготовляется в виде пластинки толщиной около миллиметра. В связи с этим на основе электрометрического метода, применяемого в координатно-информационно-измерительном комплексе (КИИК), и использования компьютера верхнего уровня [2] была выполнена идентификация ФММ ТТЗ, что позволило количественно сопоставить результаты расчета, полученные по ФММ, с результатами эксперимента. Идентификация осуществлялась минимизацией по составляющим вектора У ненаблюдаемых параметров на основе использования для неявных функций функционала вида

$$\varepsilon = \mu[R^*(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*) - R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})], \qquad (7)$$

где R*(X*, Y*) – неявная функция, зависящая от векторов Х*, Ү* и описывающая результаты измерения сопротивлений, проводимых на реальном объекте (шлифе зуба) в дискретных точках шлифов; R(X, Y) – неявная функция, зависящая от векторов Х, У и описывающая результаты вычисления сопротивлений в этих же точках, выполняемых по синтезированной ФММ исследуемого объекта; $\mu[R^*(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*) - R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] - функция$ меры, характеризующая расхождение $R^*(X^*, Y^*)$ и $R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ или, согласно [11], невязка; ε – ошибка невязки R*(X*, Y*) с R(X, Y) в смысле выбранной функции меры (ее еще называют функцией потерь [11]). Естественно, что размерности векторов Х*, Y* и X, Y совпадают, а их составляющие сохраняют прежние расшифровки, представленные в (3).

Таким образом, идентичность построенной ФММ для электрического ЗС реальному объекту, на основе теоретического учета распределения ДТ в пределах шлифа зуба, определяется по функции меры или критерию, в соответствии с которым можно количественно оценить степень близости (расхождения) экспериментальных (измеренных) и вычисляемых значений сопротивлений по разработанной ФММ, теоретически описывающей динамику сопротивления в каждой исследуемой точке шлифа зуба. Естественно, вы-

.....

бор вида данного критерия влияет на процесс и качество идентификации и, следовательно, на погрешность косвенных измерений искомых параметров. В рассматриваемом случае по совокупным измерениям решается следующая задача: по измеренной физической величине (сопротивлению) в заданной точке шлифа и вычисленному по ФММ его значению, в соответствии с априорно установленными начальными значениями ненаблюдаемых параметров, вычисляется значение выбранной функции потерь. По вычисленным значениям функции потерь, согласно установленному алгоритму корректируются значения ненаблюдаемых параметров ФММ так, чтобы функция потерь при многократном повторении вычислений, в соответствии с алгоритмом, достигала бы минимума или хотя бы некоторой окрестности в пределах данного минимума. Значения параметров ФММ, при которой функция потерь достигает минимума в установленном смысле, удовлетворяют условиям косвенных измерений. В этом случае алгоритм идентификации соответствует процедуре косвенных измерений, в которой в качестве образцовой величины используются результаты прямых измерений сопротивления в установленных точках шлифа. Иначе говоря, в основе процесса идентификации ФММ реальной структуре объекта лежит требование по обеспечению соответствия в установленном смысле результатов вычисления с результатами прямых измерений с учетом априори установленных условий. Описанная процедура косвенных измерений может быть реализована на основе различных модификаций известных в общем виде итерационных алгоритмов, идентичных в некотором смысле так называемым градиентным алгоритмам, минимизирующим критерий (7). Можно, например, воспользоваться следующим итерационным алгоритмом [11], [12], представленным в векторной форме:

$$\mathbf{Y}(n+1) = \mathbf{Y}(n) + \Delta\beta \left(\Lambda * \left\{ Q[R*(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*), R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n))], Q[R*(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*), R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n) + \Delta\mathbf{Y})] \right\} \right)$$
(8)

или в виде следующей модификации:

$$\mathbf{Y}(n+1) = \mathbf{Y}(n) + \Delta\beta \Big(\Lambda \Big\{ \mathcal{Q} \big[R^*(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*), R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n) - \Delta \mathbf{Y}) \big] - \mathcal{Q} \big[R^*(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*), R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n) + \Delta \mathbf{Y}) \big] \Big\} \Big), (9)$$

где Y(n + 1) и Y(n) – значения векторов, описывающих изменение ненаблюдаемых параметров на *n*-м и (n + 1)-м шагах (тактах) итерации в

 Φ MM; $R^*(X^*, Y^*)$ – значения функции, соответствующие (заменить) результатам измерений, проведенным на реальном объекте в точке шлифа с фиксированными значениями векторов Х* и У*; $R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n))$ и $R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n) + \Delta \mathbf{Y})$ – результаты вычислений значений функций по ФММ объекта на *n*-м шаге итерации при фиксированных значениях Х и искомых значений векторов $\mathbf{Y}(n)$ и $\Delta \mathbf{Y}$, n = 1, ..., N, N-число итераций, устанавливаемых, как правило, априори; $\Lambda^* \{...\}, \Lambda \{...\}$ и Q[...] – преобразования, выбор которых должен обеспечить решение задачи сходимости установленных составляющих вектора Y(n) к такому их искомому значению, для которых выполнялось бы условие равенства измеренного значения сопротивления и вычисленного в соответствии с выражениями (2) или (6); $\Delta\beta$ – матрица, определяющая величины шагов итерации при выполнении итераций по каждой составляющей искомого вектора параметров Y(n).

Как подтвердил вычислительный эксперимент, вместо (8) и (9) можно воспользоваться более простой конструкцией алгоритма для получения информации об искомых параметрах в виде

$$\mathbf{Y}(n+1) = \mathbf{Y}(n) + + \Delta\beta \Lambda [R^*(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*) - R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n))], \qquad (10)$$

где $\Lambda\{...\}$ может быть знаковой или индикаторной функцией сравнения [12], а в простейшем случае – просто разностью, т. е. $\Lambda[R^*(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*) - R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n))] = R^*(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*) - R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n)).$

Сходимость данного алгоритма, т. е. стремление к нулю разности $V(n) = Y(n) - Y^*$ при увеличении числа итераций *n*, легко доказывается, учитывая непрерывность функции R(X, Y), на основе известных подходов [11], [12]. Используем, например, подход, при котором вычтем справа и слева в (10) искомое значение вектора Y*. Представляя ФММ R(X, Y(n)) в окрестности искомого значения вектора Y в следующем линейном приближении:

$$R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}(n)) \approx R(\mathbf{X}, \mathbf{Y}^*) + R'(\mathbf{X}, \mathbf{Y}^*) \mathbf{V}(n)$$

и прибегая к введенному обозначению разности V(n), получаем при условии $X^* \approx X = X_0$ следующее итерационное выражение:

$$\mathbf{V}(n+1) = \mathbf{V}(n) + \Delta\beta\Lambda \left[-R'(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}^*)\mathbf{V}(n)\right],$$

которое для разностной функции $\Lambda[...]$ преобразуется к виду

$$\mathbf{V}(n+1) = \mathbf{V}(n) \left[1 - \Delta \beta R'(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}^*) \right].$$
(11)

При надлежащем выборе начального значения Y(0) и постоянных элементов $\Delta\beta$ с выполнением неравенства

$$\Delta\beta \max_{\mathbf{Y}^*} \left| R'(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}^*) \right| < 1$$

при увеличении числа итераций *n* из (11) следует с точностью, зависящей от априори выбранного значения $\Delta \beta$, предельное равенство

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{V}(n) = 0$$

Доказанное предельное равенство как раз и обеспечивает решение задачи идентификации полученной ФММ на основе экспериментальных данных.

При проведении эксперимента известны значения измеряемых сопротивлений *R**(X*, Y*), а также вычисленные предполагаемые значения в соответствии с разработанными ФММ (2) и (6) приведенные значения параметров, которые принимаются за исходные значения в итерационных алгоритмах (8) и (9), а также для вычисленной Φ MM R(X, Y). Априори известны, например, толщина и радиус шлифа, координаты точки шлифа, в которой измеряется сопротивление, а также радиус электрода. Другая интересующая информация, к которой относится тип зуба, его состояние, возраст пациента и т. д., в ФММ в явном виде отсутствует, но может быть зафиксирована при проведении конкретного эксперимента. Эта информация о параметрах и значениях характеристик исследуемого биообъекта содержится в результатах измерения только в неявном виде и ее извлечение возможно лишь после решения задачи идентификации на основании необходимого объема априорных и апостериорных данных и дополнительной статистической обработки.

В качестве априорных данных используются следующие основные сведения:

– явный вид ФММ $R(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, разработанной на основе непосредственного наблюдения результатов эксперимента и дедуктивного анализа выявленных экспериментально фактов с привлечением фундаментальных законов физики;

– определение и оценка составляющих векторов X, Y;

- начальное значение **Y**(0) вектора **Y**;

– вид критериев Q[...] и $\Lambda[...]$;

- вид итерационного алгоритма;

– значения элементов матрицы Δβ;

– число шагов итерации N.

В качестве апостериорных данных используются результаты прямых измерений $R^*(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)$ в заданной точке шлифа, которые вводятся в компьютер.

Определение указанных параметров, как и нахождение явного вида Φ MM, осуществляется на основании анализа общих априорных сведений о структуре зуба. В соответствии с разработанной в аналитическом виде Φ MM R(X, Y) для идентификации ее параметров были рассмотрены различные модификации алгоритмов, отличие которых определяется определенными допустимыми упрощениями.

На основании изложенного процесс решения задачи идентификации ТТД, по существу в режиме in vitro, содержит следующие этапы:

1. Выбор подходящего фрагмента ТТЗ для исследования структуры ТТД.

2. Разработка ФММ ТТД по выбранному фрагменту ТТЗ и установление функциональной связи его параметров с параметрами структуры и формы исследуемого зуба в целом.

3. Установление номинальных (начальных) значений, входящих в ФММ параметров.

4. Непосредственное программное решение задачи параметрической идентификации ФММ по экспериментальным данным, полученным на основе 3С от реального биообъекта, представленно-го, например, в виде шлифа зуба.

Определение начальных значений параметров, как и вывод в явном виде ФММ, осуществляется на основании анализа общих априорных сведений о структуре зуба [1]. Эти данные могут корректироваться итерационно по результатам дополнительного анализа процесса сходимости алгоритмов (8) или (9). Обратим внимание на возможность построения других модификаций алгоритма, рассмотренных в [13].

В соответствии с описанными алгоритмами идентификации была составлена программа в математическом программном пакете «STATISTI-СА», реализация которой подтвердила достоверность разработанной для электрического ЗС ФММ ТТЗ. Выполненная в соответствии с разработанной программой идентификация ФММ позволила получить следующие оценки погрешностей, характеризующих отклонения расчетных данных, полученных по ФММ, от результатов эксперимента в исследуемых точках шлифа: среднее <4 %; медиана <3 %; СКО <3 %; минимальное отклонение <1 %; максимальное отклонение <11 %; 25 %-й квантиль <1.2 %; 75 %-й квантиль <4.6 %. Приведенные значения характеристик погрешностей, с учетом сложности проводимого эксперимента на основе использования КИИК [2], вполне укладываются в допустимый



предел, определяющий достоверность теоретических расчетов. Последняя оценка по квантилям, в частности, показывает, что 25 % всех показаний прибора укладывается в коридор по погрешности, не превышающий предел 1.2 %, а для 75 %-го квантиля, соответственно, 4.6 %. На рис. 4 приведены в качестве примера графики результатов измерения *I* и вычисленных *2* в соответствии с разработанной ФММ значений сопротивлений с учетом проведенной параметрической идентификации. Эксперимент выполнен на основе применения КИИК, в состав которого входит прибор «Дентометр», схема реализации которого запатентована в [14].

В качестве критерия близости откорректированной модели и результатов эксперимента применялся комбинированный критерий вида

$$\Delta r = |r| - C$$

где Δr – значение искомого комбинированного нормированного критерия; r – абсолютное значение нормированного взаимного коэффициента корреляции; C – нормируемый среднеквадратический критерий отклонения.

Параметры С и г определялись в соответствии

с формулами
$$C = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} (v_{ij} - w_{ij})^2 / \Sigma$$
 и

$$r = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} v_{ij} w_{ij} / \Sigma$$
, где v_{ij} – результаты расчета

по принятой ФММ в точках с координатами, определяемыми в соответствии со значениями индексов i и j; w_{ij} – результаты измерения в этих же точках, полученные в ходе проведения экспе-

.....

римента; N_1 и N_2 – число проводимых измерений на шлифе при изменении координат электрода при сканировании по осям x и y; Σ =

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} v_{ij}^2 \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} w_{ij}^2}$$

Более полный теоретический анализ рассмотренного подхода проведен в [13].

Оценка близости графиков *l* и *2* соответствует значению $\Delta r = 0.9973583$, причем C = 0.0017611, а r = 0.9991194 (равенство $\Delta r = 1$ соответствует полному совпадению).

Следует обратить внимание на тот факт, что из-за фиксированного значения диаметра электрода выделение тонкой структуры распределения ДТ в дентине зуба в «точках роста» [3] практически затруднительно, хотя наличие таких точек экспериментально можно обнаружить. Это связано со значительной несоизмеримостью диаметров электрода, посредством которого осуществляется измерение. Отношение диаметров электрода и ДТ достигает порядка 105. Поэтому построенная с учетом особенностей эксперимента ФММ дает представление об общей структуре распределения капилляров в теле исследуемого зуба по так называемой локально-интегрированной модели (2). Такую информацию о расположении ДТ в ТТЗ зуба невозможно получить посредством оптического ЗС из-за особенностей строения дентина [8]. Действительно, для проводимых исследований шлиф зуба изготавливается в виде пластинки толщиной около миллиметра. Оптический сигнал из-за особенностей распространения по сложной среде, какой является дентин зуба, кроме отмеченных «точек роста», не-

.....

равномерно рассеивается по поверхности шлифа и тем самым не выявляет интересующую структуру в целом с должной точностью. Низкий контраст многих биологических объектов связан с большой долей рассеянного света, который возникает из-за мелкодисперсного строения основы образца. Именно таким объектом является дентин зуба человека, который может быть представлен в виде совокупности двух подсистем - основы (матрикс) и ДТ, расположенных в матриксе в определенном порядке [8] (см. также ссылки на источники в [8]). Как утверждается в указанном источнике, ДТ имеют более высокий показатель преломления, чем матрикс, в котором они находятся, поэтому при подсветке шлифа свет распространяется по этим ДТ, как по световоду. Вместе с тем, как утверждается там же, поскольку ДТ упакованы не плотно в ТТЗ, зазор между ними (матрикс) обладает сильным диффузным рассеянием, которое и мешает визуальным наблюдениям прохождения оптического ЗС в пределах всей площади исследуемого шлифа. При определенных условиях наблюдения в поляризованном свете шлифа зуба толщиной около 0.5...1 мм удается снизить долю рассеянного света и таким образом выявить локальные характерные зоны диаметром около 1...2 мм, в которых ДТ упакованы иначе, чем в основной части шлифа, включая и главную точку роста зуба [3]. Причем индикатрисы яркости этих зон имеют значительный наклон (~20°) по отношению к плоскости шлифа. Характерным признаком таких зон служат фигуры в виде крестов, напоминающие коноскопические картины, которые возникают для скрещенных поляризаторов при исследовании массивных кристаллов в сильно сходящихся пучках [8].

Центры коноскопических картин [8] и соответствуют отмеченным ранее «точкам роста» зуба.

Таким образом, при использовании оптического ЗС сам характер решения задачи идентификации исследуемого объекта, несмотря на общность ее постановки, существенно меняется, так как искажения параметров и характеристик оптического ЗС на выходе исследуемого объекта носят специфический характер, отличный от соответствующего изменения электрического ЗС, который, к тому же, не трудно преобразовать в цифровой код и ввести для дальнейшей обработки в компьютер. Однако при определенных условиях можно не только качественно оценить и проинтерпретировать результаты воздействия оптического ЗС на исследуемый объект, а и на основе полученной информации о точках роста на основе (2) с использованием уже электрического ЗС решить задачу идентификации ФММ ТТЗ.

Следует подчеркнуть, что преимущество оптического 3С при решении задачи идентификации в целом состоит в том, что благодаря его высокому разрешению удалось открыть наличие в структуре зуба не только точек «роста зуба» [7], [8], но и обнаружить тонкую структуру расположения ДТ относительно точек роста. В [7], [8] показано, что для горизонтальных сечений шлифов коренных зубов (моляров) обнаруженные локальные круговые зоны имеют диаметр порядка 1 мм, в которых ДТ имеют регулярную структуру. В соответствии с характером этой структуры ДТ на основе применения для экспериментальных исследований КИИК [2] установлено, что значение сопротивления уменьшается (рис. 5) в локальной



зоне, включающей «точку роста» зуба, которая по мере удаления от «точки роста» быстро восстанавливает свои значения согласно ФММ (2) или (6).

На графиках рис. 5, описывающих результаты расчета (график 1) и проведенного эксперимента (график 2), характерное углубление для точек, соответствующих 2.2 и 2.6 мм и отложенных по оси абсцисс, установлено экспериментально (график 2). Размер углубления, учитывая шаг дискретизации 0.2 мм, через который осуществлялись измерения в точках шлифа для приведенных графиков, соответствует значению локальной круговой зоны повышенной концентрации ДТ диаметром, не превышающим 1 мм [6]. Можно предположить, что эти зоны коррелированы с формой пульпы и бугорками коронки зуба. Именно в этих зонах и обнаружены своеобразные оптические эффекты наподобие коноскопических фигур, что в целом указывает на высокую иерархическую структуру строения ТТЗ [7], [8].

При применении электрического ЗС выявлено, что интегральная регулярность, несмотря на статистическую вариабельность распределения ДТ в зубе, в основном сохраняется для зрелых зубов практически по всему сечению зуба, что подтверждается явным видом функции, описывающей ФММ (см. рис. 1–5), а также более подробными данными эксперимента, приведенными в [15]. Можно предположить, что именно наличие интегральной регулярности и обеспечивает высокую механическую прочность зуба, тогда как дифференциальная регулярность за счет притока питающих веществ способствует сохранению постоянства химико-биологического состава TT3, включая эмаль зубов [16].

Результаты идентификации показали, что недоступный для прямых измерений параметр [2] h_d находится в пределах 2.75...2.916 мм для конкретного исследуемого шлифа. Безразмерный параметр $\mu_3 = r_3/h_d$ для $r_3 = 0.165...0.175$ мм приблизительно равен 0.165(0.175)/2.75(2.95) \approx $\approx 0.06(0.059)$. Результаты получены для шлифа с высотой $h_0 \approx 1$ мм.

Результаты идентификации для шлифа с высотой $h_0 \approx 1$ мм с погрешностью порядка ±0.2 мм

показали, что недоступный для прямых измерений параметр [2] h_d (высота конуса, аппроксимирующего распределение ДТ в пределах коронки зуба) находится в пределах 2.75...2.916 мм от нижней поверхности конкретного исследуемого шлифа. В этом случае безразмерный параметр μ_3 , определяемый в соответствии с равенством $\mu_3 = r_3/h_d$, для электрода с радиусом $r_3 = 0.165...$ 0.175 м) равен $r_3/h_d = 0.165(0.175)/2.75(2.95) \approx$ $\approx 0.06(0.059)$. Проведенные эксперименты и компьютерная (программная) идентификация на основе итерационных алгоритмов различной модификации позволили получить количественную оценку и других, недоступных для прямых измерений параметров.

В заключение следует отметить, что приведенные в статье результаты как теоретических, так и экспериментальных исследований получены для ограниченного числа объектов исследования, т. е. шлифов зуба. Эти исследования были направлены на отработку методов идентификации с разработкой и апробированием необходимого инструментария на реальных объектах исследований с учетом информации, которая накоплена в исследованиях рассматриваемого направления. При этом в дальнейших исследованиях целесообразно учитывать такие количественные параметры, характеризующие объект исследования – шлифы зуба, как геометрические параметры расположения шлифа в зубе, возраст пациента, показания для удаления зуба и другие. Для применения полученных результатов в практической стоматологии необходим дополнительный комплекс работ, направленный на получение не только общих знаний об особенностях микроморфологии, включая общую структуру ТТЗ, но и на определение количественной, на уровне полученной ФММ, и достоверной статистической картины морфологии TT3 в пределах конкретного зуба, полученной по множеству наблюдаемых пациентов, включая соответствующую информацию для всего ряда зубов с учетом возрастной, патологической и, возможно, иной интересующей стоматолога динамики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванова Г. Г., Касумова М. К., Тихонов Э. П. Информационные технологии при идентификации структуры твердых тканей зубов в системном представлении: исходные сведения, анализ достигнутых результатов и общая постановка задачи // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2018. № 5. С. 89–101.

2. Касумова М. К., Тихонов Э. П. Информационные технологии при идентификации структуры твердых

тканей зубов в системном представлении: исходные сведения, разработка физико-математической модели на основе электрического зондирующего сигнала // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2018. № 6. С. 90–102.

3. Касумова М. К., Тихонов Э. П. Информационные технологии при идентификации структуры твердых тканей зубов в системном представлении: уточненная физико-математическая модель с целью ее идентификации // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2018. № 10. С. 90–102.

4. Обобщенный спектрально-аналитический метод обработки информационных массивов. Задачи анализа изображений и распознавания образов / Ф. Ф. Дедус, С. А. Махортых, М. Н. Устинин, А. Ф. Дедус; под общ. ред. Ф. Ф. Дедуса. М.: Машиностроение, 1999. 337 с.

5. Шварц А. Д. Биомеханика и окклюзия зубов. М.: Медицина.1994. 185 с.

6. Нанда Р. Биомеханика и эстетика в клинической ортодонтии. М.: МЕДпресс-информ, 2009. 388 с.

7. Системный анализ твердых тканей зубов на основе оптического, рентгеновского и электрического зондирующих сигналов. Ч. I / В. М. Золотарев, Г. Г. Иванова, М. К. Касумова, Т. Ш. Мчедлидзе, Э. П. Тихонов, М. А. Чибисова // Институт Стоматологии. 2006. № 2 (31). С. 74–76.

8. Золотарев В. М. Структурная организация дентиновых трубочек в коронковой зоне зуба // Институт Стоматологии. 2006. № 2 (31). С. 78–80.

G. G. Ivanova, M. K. Kasumova

MEDI Company Group, institution «SPbINSTOM»

E. P. Tikhonov

Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»

INFORMATION TECHNOLOGIES IN IDENTIFICATION OF TOOTH HARD TISSUE STRUCTURE UPON SYSTEMIC PRESENTATION: METHODS AND RESULTS

Relying on the designed versions of physics-mathematical model (PMM) of the hard tooth tissues (HTT), which establish a mathematically functional link of PMM with parameters characterizing the structure of the dentine tubules distribution and with the shape of the tooth under investigation by means of electrical exploring signal, the task of HTT identification is solved by experimental data. The PMM identification is based on iteration algorithms minimizing the error (discrepancy) in divergence of numerical value of target parameters, which determine the synthesized PMM and is measured by the results of performed experiment. The parameters measured during the experiment are the values of active resistances in the discrete points of the slice being determined by the results of line or other kind of scanning of the tooth slice surfaces. By experimental data received on the base of in Vitro electrical exploring signal the identification results are presented, which demonstrate the adequacy of the synthesized PMM and the corresponding possibility to indirect measure of essential parameters like location of the tooth resistance center and the axis of its orientation.

Coordination-information-measurement complex, physics-mathematical model, factors of influence, measurement error, experimental data, fractal pattern

9. Справочник по теории автоматического управления / под ред. А. А. Красовского. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 712 с.

10. Zijp J. R., ten Bosch J. J. Theoretical model for the scattering of light by dentin and comparison with measurements // Appl. Opt. 1993. Vol. 32, N 4. P. 411–415.

11. Цыпкин Я. З. Информационная теория идентификации. М.: Наука. Физматлит, 1995. 336 с.

12. Тихонов Э. П. Информационные технологии в медико-технических приложениях. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2016. 294 с.

13. Тихонов Э. П. Роль измерений в идентификации физико-математической модели биологического объекта // Вестн. Метрологической Академии. 2003. Вып. 11. С. 14–28.

14. Пат. RU 230608 C2 МПК А61В 5/053. Способ и устройство для диагностики состояния твердых тканей зубов биообъектов / Г. Г. Иванова, В. Н. Иванов, М. К. Касумова, Т. Ш. Мчедлидзе, Э. П. Тихонов. Опубл. 10.08.2008. Бюл. № 22.

15. Иванова Г. Г., Касумова М. К., Тихонов Э. П. Цифровые измерения и компьютерная визуализация структуры дентина посредством электрометрии // Институт Стоматологии. 2018. № 2 (79). С. 112–114.

16. Леонтьев В. К. Эмаль зубов как биокибернетическая система. М.: ГЭОТАР-Медиа, 2016. 72 с.