

Методология и проблематика экспертного оценивания. Часть 1. Способы повышения внутренней согласованности матрицы парных сравнений

Е. А. Бурков✉, П. И. Падерно, В. В. Розен, Е. А. Толкачева, Д. А. Черкасова

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
«ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

✉ eaburkov@gmail.com

Аннотация. Перечислены различные сферы применения методов экспертного оценивания для решения задач многокритериального выбора. Выполнен краткий системный анализ ряда ключевых методологических проблем экспертного подхода, рассмотрены общие пути их преодоления. Представлена формальная постановка задачи повышения внутренней согласованности матрицы парных сравнений, отражающей мнение эксперта. Предложены два различных способа решения поставленной задачи. Первый способ состоит в построении графа, отражающего порядок предпочтения альтернатив экспертом, с последующим вычислением весов дуг и преобразованием элементов матрицы парных сравнений таким образом, чтобы полученная в итоге матрица превосходила исходную по степени внутренней согласованности. Второй способ состоит в порождении идеальной матрицы парных сравнений на основе строки или столбца исходной матрицы с последующим сопоставлением обеих матриц между собой. Оба способа исправления исходной матрицы парных сравнений с целью повышения ее внутренней согласованности не требуют получения дополнительной информации для проведения корректировки.

Ключевые слова: внутренняя согласованность, граф предпочтений, идеальная матрица, матрица парных сравнений, метод анализа иерархий, остовное дерево, экспертные оценки

Для цитирования: Методология и проблематика экспертного оценивания. Часть 1. Способы повышения внутренней согласованности матрицы парных сравнений / Е. А. Бурков, П. И. Падерно, В. В. Розен, Е. А. Толкачева, Д. А. Черкасова // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2026. Т. 19, № 2. С. 40–50. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-2-40-50.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

Methodology and Problems of Expert Assessment. Part 1. Ways to Increase Internal Consistency of Pairwise Comparison Matrix

Е. А. Burkov✉, P. I. Paderno, V. V. Rozen, E. A. Tolkacheva, D. A. Cherkasova

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

✉ eaburkov@gmail.com

Abstract. The various fields of application of expert assessment methods for solving multicriteria selection problems are listed. A brief systematic analysis of a number of key methodological problems of the expert approach is performed, and general ways to overcome them are considered. A formal setting of the problem of increasing the internal consistency of the matrix of paired comparisons, reflecting the expert's opinion, is presented. Two different ways of solving the problem are proposed. The first method consists in constructing a graph reflecting the order of preference of the alternatives, followed by calculating the weights of the arcs and converting the elements of the matrix of paired comparisons so that the resulting matrix exceeds the initial one in terms of internal consistency. The second method is to generate an ideal matrix of paired comparisons

based on a row or column of the original matrix, followed by a comparison of both matrices with each other. Both methods of adjusting the initial matrix of paired comparisons in order to increase internal consistency do not require additional information to perform it.

Keywords: internal consistency, preference graph, ideal matrix, pairwise comparison matrix, analytical hierarchy process, spanning tree, expert assessments

For citation: Methodology and Problems of Expert Assessment. Part 1. Ways to Increase Internal Consistency of Pairwise Comparison Matrix / E. A. Burkov, P. I. Paderno, V. V. Rozen, E. A. Tolkacheva, D. A. Cherkasova // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2026. Vol. 19, no. 2. P. 40–50. doi: 10.32603/2071-8985-2026-19-2-40-50.

Conflict of interests. The authors declare no conflicts of interest.

Введение. Методы группового экспертного оценивания представляют собой мощный и проверенный временем комплекс моделей для решения слабоструктурированных задач, в которых основополагающее значение имеют не математические расчеты, а опыт, интуиция и знания специалистов, взявших на себя роль экспертов. Использование экспертного подхода особенно оправданно в ситуациях выбора и принятия решений, требующих многокритериальной оценки альтернатив [1], учета качественных факторов [2] или факторов неопределенности различной природы [3], а также подготовки долгосрочных прогнозов [4]. Подобная востребованность методов экспертного оценивания обусловлена тем, что они не только позволяют упорядочить множество альтернатив по их предпочтительности, но и обеспечивают глубокий анализ и обоснованную структуризацию сложных проблем за счет выявления скрытых предпочтений группы экспертов и достижения их консенсуса на основе прозрачной и логичной формальной процедуры [5]–[8]. Можно привести в качестве примера ряд областей, в которых применение экспертного подхода к решению задач многокритериального выбора особенно востребованно.

В сфере бизнес-менеджмента выбор оптимальной по совокупности критериев (ожидаемая прибыль, риски, срок окупаемости, соответствие миссии компании, гибкость) стратегии долгосрочного развития компании связан с высокой неопределенностью, долгосрочными последствиями и необходимостью учета множества разнородных факторов, таких как рыночные тенденции, внутренние компетенции сотрудников, действия конкурентов, макроэкономические показатели и пр. Очевидно, что единственно правильного ответа такая задача не имеет, и для ее решения следует учесть множество экономических, юридических и даже политических нюансов, что и должны сделать эксперты, например члены правления компании,

менеджеры верхнего и среднего звена, а также независимые бизнес-консультанты.

В сфере информационных технологий и управления проектами осуществление выбора лучшей по ряду критериев (стоимость лицензии и внедрения, функциональность, масштабируемость, простота обучения сотрудников, качество технической поддержки) системы корпоративного программного обеспечения – например, ERP или CRM-системы – требует аккуратного соблюдения баланса между финансовыми, техническими и эргономическими аспектами сравниваемых альтернатив. В этом случае экспертами должны выступать будущие пользователи, бизнес-аналитики, эргономисты, а также руководители IT-департамента и, вероятно, финансовый директор компании, планирующей внедрение системы.

В сфере развития науки и инноваций крайне важна задача определения приоритетных направлений финансирования научных исследований – таких, как квантовые вычисления, искусственный интеллект, геномная терапия и пр. – по некоторому набору критериев, включающему в себя научную значимость, ожидаемый практический результат и срок его получения, вероятность успеха, необходимый объем финансирования и т. п. Очевидно, что экспертная оценка научной значимости и потенциальной отдачи от исследований крайне субъективна – ее адекватность и точность существенно зависят от глубины и актуальности знаний в конкретной области. Поэтому в роли экспертов должны выступать ведущие ученые в соответствующей области науки, руководители научных организаций и проектов, представители научных фондов и технологические футурологи.

В сфере государственного управления и социальной политики регулярно осуществляется выбор приоритетного национального проекта для реализации, например, проектов, направленных на развитие цифровой инфраструктуры и умных

городов. Однако решение такого масштаба оказывает влияние не только на распределение огромных бюджетов, но и на жизнь многих миллионов людей, поэтому необходимо использовать критерии, позволяющие учесть не только экономическую целесообразность (ожидаемое влияние на ВВП и нагрузка на бюджет) и политические последствия (общественное мнение) принимаемого решения, но и его долгосрочный социальный эффект (длительное влияние на качество жизни граждан). Экспертами в данном случае помимо представителей государственного аппарата должны быть ведущие экономисты, социологи, экологи, представители общественных палат, урбанисты.

В сфере маркетинга и бренд-менеджмента часто возникает вопрос выбора эффективной концепции позиционирования нового продукта на рынке с учетом возможной целевой аудитории. Успех позиционирования зависит от тонкого понимания психологии потребителя, рыночных трендов и конкурентной среды. Это одновременно и творческая и стратегическая задача, где прошлые данные не всегда гарантируют успех в будущем, а экспертами должны быть маркетологи, бренд-менеджеры, специалисты по рыночным исследованиям, представители фокус-группы потребителей, креативные директора.

Несмотря на то, что методы экспертного оценивания крайне разнообразны по своему содержанию, можно выделить ряд общих для них методологических трудностей и проблем, которые естественным образом следуют из концептуальной цели применения экспертных методов, состоящей в получении консенсуса, и неизбежного влияния человеческого фактора, порождающего субъективность.

Одной из ключевых проблем группового экспертного оценивания, вызывающей целый ряд других, можно назвать *осреднение* или *комплексирование индивидуальных суждений экспертов*. Тут следует заметить, что суждения экспертов могут быть представлены в самой разной форме (вербальные суждения, балльные оценки, ранжировки альтернатив, матрицы парных сравнений (МПС) и пр.), зависящей как от способа получения экспертной информации, выбранного для конкретной экспертизы, так и от подготовленной методики анализа этой информации. В данной статье речь будет идти в первую очередь о МПС, элементы которой представляют собой значения вербально-числовой шкалы отношений, предложенной Т. Саати [9]–[11]. Однако многие из затронутых далее проблем экспертного подхода

актуальны и для иных форм представления экспертных суждений, если рассматривать их глобально.

Итак, возвращаясь к проблеме комплексирования индивидуальных экспертных мнений – как корректно осреднять субъективные оценки разных экспертов? Под корректностью в данном случае следует понимать не только правильность выполнения различных математических преобразований и расчетов, но и концептуальную корректность. Во-первых, вычисление осредненной по группе экспертной оценки методом аддитивной или мультипликативной свертки может привести к тому, что осредненная оценка будет представлять собой пресловутую среднюю температуру по больнице, т. е. крайне плохо согласовываться с индивидуальным мнением любого из экспертов. Во-вторых, такая свертка приводит к потере информации о надежности экспертных оценок: например, суждения одного эксперта менее противоречивы (либо он сам выражает большую уверенность в них), суждения же другого эксперта более внутренне противоречивы (либо он сам в них не слишком уверен), однако при простом осреднении оценок этих экспертов разницы между ними не делается, т. е. они в равной степени влияют на конечный результат осреднения.

Два приведенных примера указывают на то, что перед осреднением экспертных оценок обязательно следует проводить анализ степени их частной (внутренней) и групповой согласованности. Этот аспект проблемы комплексирования индивидуальных экспертных мнений породил множество критериев и способов проверки согласованности мнений экспертов между собой. Одним из наиболее очевидных проявлений внутренней несогласованности суждений эксперта можно считать нарушение транзитивности порядка предпочтения сравниваемых альтернатив; наиболее известна подобная нетранзитивность под названием парадокса Кондорсе [12]. Следует заметить, что неоднозначным остается вопрос о том, какая согласованность важнее. Можно, например, собрать группу экспертов, каждый из которых обладает идеальным в отношении внутренней согласованности мнением¹, но при этом

¹ Мнение каждого эксперта может быть представлено в форме МПС, отражающей предпочтения эксперта на множестве рассматриваемых альтернатив экспертов. В случае полной внутренней согласованности такая матрица будет идеально согласованной; строгое определение идеальной МПС приводится далее.

мнения отдельных экспертов радикально расходятся друг с другом в смысле порядка предпочтения альтернатив.

Кроме того, крайне желательно учитывать при осреднении экспертных оценок степень значимости или надежности оценок, полученных от конкретного эксперта, причем эта надежность может зависеть не только от внутренней согласованности его суждений, но и от уровня его опыта и профессиональных знаний в области, к которой относится решаемая экспертами задача. Данный аспект проблемы комплексирования индивидуальных экспертных мнений привел к появлению такого понятия, как *компетентность эксперта* и ее количественной оценки, называемой *коэффициентом компетентности* эксперта, которая используется не только на этапе подбора экспертов, но и в форме весовых коэффициентов при осреднении экспертных оценок способом аддитивной или мультипликативной свертки.

Необходимость определения коэффициентов компетентности порождает следующую важную проблему – *разработку метода оценки компетентности экспертов*. Получается, что кто-то должен сторожить самих сторожей: прежде чем провести экспертную оценку альтернатив, нужно оценить самих экспертов. Но даже если вынести за скобки необходимость откуда-то взять вторую группу экспертов, чтобы оценить первую, а затем третью, чтобы оценить вторую, et cetera, то все равно остаются другие не менее важные вопросы – в частности, какие факторы определяют компетентность эксперта и как свести эти факторы к численному показателю? Из попыток дать развернутые и практические ответы на эти два вопроса следуют различные методы оценки компетентности экспертов, которые обычно принято делить на две большие группы: априорные и апостериорные. *Априорные методы* формируют численную оценку компетентности, исходя из некоторых качеств и особенностей эксперта – например, стажа его профессиональной деятельности, количества релевантных научных публикаций и пр., – которые могут быть учтены еще до проведения опроса экспертов. *Апостериорные методы*, т. е. методы, для применения которых экспертов сначала нужно опросить, как правило выводят численную оценку компетентности эксперта, исходя из согласованности его индивидуальной оценки с осредненной оценкой, которая, в свою очередь, формируется с учетом компетентности экспертов. Чтобы выйти из этого порочного кру-

га, приходится использовать специальные итеративные методы [13], [14] пересчета осредненной оценки и коэффициентов компетентности экспертов до выполнения условия остановки (обычно это условие связано с устойчивостью полученной осредненной оценки к изменению коэффициентов компетентности).

Перечень методологических проблем экспертного оценивания можно еще более расширить, рассмотрев, например, те из них, источником которых служит непосредственно человеческий фактор (психологические и психофизические особенности экспертов), или же уделить внимание проблемам не столь высокого уровня, но от того не менее важным с практической стороны – организационным или вычислительным. Однако в данной статье все дальнейшее внимание будет уделено одному уже затронутому аспекту, а именно – рассмотрению способов повышения внутренней согласованности МПС, выражающей мнение отдельного эксперта о порядке и степени предпочтительности некоторого множества альтернатив.

Постановка задачи повышения внутренней согласованности МПС. Определение факта внутренней согласованности МПС с помощью специальной количественной оценки непротиворечивости ее элементов реализовано в рамках метода анализа иерархий (МАИ²) [9]–[11]. Данный метод основан на том, что мнение эксперта относительно сравнительной важности или, иначе говоря, относительно степени предпочтительности отдельных альтернатив³ представляется в виде МПС

$$\mathbf{A} = \{a_{ij}\}_{n \times n},$$

$$\forall i, j: a_{ij} > 0, a_{ij} = 1/a_{ji}, a_{ii} = 1,$$

где каждый элемент a_{ij} отражает относительное количественное предпочтение важности i -й альтернативы над j -й. Базовый МАИ предполагает, что все элементы матрицы \mathbf{A} представляют собой значения вербально-числовой шкалы, разработанной автором метода Томасом Саати, однако МПС, элементы которой представляют собой количественные оценки предпочтительности сравниваемых

² В англоязычных источниках используется аббревиатура АНР, которая расшифровывается как Analytic Hierarchy Process.

³ Альтернативами могут быть как конкретные объекты, так и атрибуты (свойства, характеристики) конкретного объекта или класса объектов, которые необходимо упорядочить по степени их важности.

попарно альтернатив, может формироваться с использованием и любых других шкал отношений при условии, что получаемая матрица будет обладать свойством *обратной симметричности*.

Поскольку свойство обратной симметричности обязательно для рассматриваемых МПС, внутренняя согласованность матрицы A будет зависеть исключительно от полноты обладания ею свойством *численной транзитивности*, которое в случае идеально согласованной МПС будет строго соблюдаться для любых элементов матрицы, т. е. для *идеальной согласованной* МПС справедливо, что

$$\forall i, j, k = \overline{1, n}: a_{ij} = a_{ik}a_{kj}. \quad (1)$$

Будем называть идеально согласованные МПС⁴, т. е. матрицы, полностью (всеми своими элементами) удовлетворяющие условию (1), *идеальными матрицами парных сравнений* (ИМПС).

Таким образом, повышение внутренней согласованности МПС можно свести к разработке способа приведения исходной МПС, которая в недостаточной степени удовлетворяет свойству численной транзитивности⁵, к исправленной МПС, которая либо есть ИМПС, и для всех ее элементов выполняется свойство численной транзитивности, либо нет, но в достаточной степени (большей, чем исходная МПС) удовлетворяет свойству численной транзитивности.

СПОСОБ 1: повышение внутренней согласованности МПС посредством анализа и корректировки весов дуг графа предпочтения альтернатив. Отметим для начала, что добиться идеально согласованной МПС применительно к экспертной оценке альтернатив весьма сложно, и в большинстве практических случаев соотношение $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$ в составленной экспертом МПС в полном объеме не выполняется. Ввиду этого Т. Саати ввел так называемый *индекс согласованности*, который показывает меру отклонения исследуемой МПС от ИМПС; при этом МПС считается условно согласованной, если ее индекс согласованности не превосходит некоторой пороговой величины [9]–[11].

⁴ В [13] предложено называть такие матрицы *сверхтранзитивными*.

⁵ Т. е. условие (1) выполняется не для всех элементов исходной МПС, а в наихудшем случае не выполняется ни для одного элемента исходной матрицы.

Предложенный далее способ повышения внутренней согласованности МПС заменяет соотношение $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$ двумя его следствиями, которые позволяют получить *условно согласованную* МПС и выполнение которых менее затруднительно для экспертов.

Следствие 1 из свойства численной транзитивности. Отношение предпочтения \succ , заданное на множестве альтернатив ИМПС, *транзитивно*⁶.

Таким образом, заданное на множестве альтернатив отношение предпочтения наделяется количественной характеристикой, которая выражает не только факт предпочтения, но и степень предпочтительности: элемент $a_{ij} > 1$ указывает степень предпочтения альтернативы C_i перед альтернативой C_j . Отметим, что при сохранении условия транзитивности предпочтения может произойти нарушение степени предпочтительности⁷.

Рассмотрим отношение⁸ предпочтения \succ , наделенное количественной характеристикой $\rho(C_i, C_j) > 0$. Возьмем пару альтернатив (C_i, C_j) , для которой длина интервала $[C_i, C_j]$ равна 2 – под *длиной интервала* $[C_i, C_j]$ понимается максимальная длина пути (число дуг) в *графе предпочтений* от C_i до C_j . В этом случае существует такая альтернатива (возможно, не единственная) C_k , что $C_i \succ C_k, C_k \succ C_j$.

Будем говорить, что отношение предпочтения \succ , удовлетворяет *условию неубывания интенсивности*, если справедливо неравенство

$$\rho(C_i, C_j) \geq \max_k \left\{ \max \left\{ \rho(C_i, C_k), \rho(C_k, C_j) \right\} \right\}. \quad (2)$$

Следствие 2 из свойства численной транзитивности. Отношение предпочтения \succ , заданное на множестве альтернатив ИМПС, удовлетворяет условию *неубывания интенсивности*.

⁶ Доказательство не приводится, поскольку данной свойство очевидно.

⁷ Иначе говоря, из численной транзитивности следует порядковая транзитивность, но не наоборот, т. е. численная транзитивность – более сильное свойство, чем порядковая.

⁸ Такое отношение может быть задано взвешенным ориентированным графом предпочтения альтернатив. Вершинами такого графа будут альтернативы, а дуги будут отражать предпочтения между ними.

Доказательство. Условие импликации (2) применительно к МПС означает, что $a_{ik} > 1$, $a_{kj} > 1$, т. е. $C_i \succ C_k$, $C_k \succ C_j$; при этом, согласно свойству численной транзитивности, $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$. Следовательно, $a_{ij} > a_{ik}$, $a_{ij} > a_{kj}$, поэтому $a_{ij} > \max\{a_{ik}, a_{kj}\}$. Учитывая, что данное неравенство справедливо при любом k , получаем неравенство (2).

Допуская при сравнении альтернатив не только наличие строгого предпочтения между ними, но также случай их равной важности (эквивалентности), сформулируем следующее правило для попарных сравнений альтернатив.

Правило неубывания интенсивности предпочтений⁹. Будем говорить, что для взвешенного графа предпочтений выполнено правило неубывания интенсивности предпочтений, если для любой пары альтернатив (C_i, C_j) , для которой длина интервала $[C_i, C_j]$ равна 2,

$$\rho(C_i, C_j) \in [r_{ij}, r_{ij} + 2],$$

$$r_{ij} = r(C_i, C_j) = \max_k \left\{ \max \left\{ \rho(C_i, C_k), \rho(C_k, C_j) \right\} \right\}.$$

При выполнении правила неубывания интенсивности предпочтений из того, что $C_i \succ C_k$ и $C_k \succ C_j$, необходимо следует, что степень предпочтительности альтернативы C_i перед альтернативой C_j будет хотя бы не меньше максимума степеней предпочтительности C_i перед C_k и C_k перед C_j ; при этом указанный максимум может быть увеличен, но не более, чем на две единицы, что соответствует переходу к следующему пункту вербально-числовой шкалы МАИ.

Таким образом, предлагаемый способ повышения внутренней согласованности МПС заключается в проверке обладания ею свойств *порядковой транзитивности* и *неубывания интенсивности*, и в построении исправленной МПС при отсутствии второго свойства у исходной матрицы.

Этапы 1-го способа повышения согласованности МПС.

Этап 1. По МПС строится соответствующий ей взвешенный ориентированный граф предпочтений, содержащий только те дуги, для которых

$\rho(C_i, C_j) > 1$ (петли опускаются). Такой граф всегда линеен¹⁰ и антисимметричен¹¹.

Этап 2. Проверяется выполнение условия ацикличности¹². Наличие циклов означает нарушение транзитивности отношения предпочтения (в таком случае экспертов, как правило, просят произвести сравнение альтернатив заново). В случае, если граф ациклический, то он транзитивный. Учитывая, что рассматриваемый граф предпочтений – линейный, транзитивный и антисимметричный, получаем, что он представляет собой *граф линейного порядка*.

Этап 3. На всем графе проверяется выполнение правила неубывания интенсивности предпочтений. Для этого перебираются всевозможные пары (C_i, C_j) вершин графа, для которых длина интервала $[C_i, C_j]$ равна 2. При выполнении данного правила исходную МПС можно считать удовлетворительно согласованной, поэтому корректировка экспертных оценок здесь не требуется. В противном случае, т. е. когда правило нарушено, осуществляется переход к этапу 4.

Этап 4. Визуализируется взвешенный ориентированный граф предпочтений, построенный на 1-м этапе, с сохранением в нем только тех дуг (C_i, C_j) , для которых вершина C_j непосредственно следует за вершиной C_i , т. е. дуги связывают лишь те вершины графа, у которых длина интервала $[C_i, C_j]$ равна 1. В результате получаем *остов* исходного графа предпочтений, в котором сохранены степени предпочтительности (веса дуг), выставленные экспертом.

Этап 5. Выполняется постепенное достраивание полученного на предыдущем этапе остова до исходного графа предпочтений. Недостающие дуги добавляются к остову последовательно: сначала рассматриваем случаи, когда наибольшая длина интервала между началом и концом дуги равна 2; затем – 3, и т. д. Веса добавляемых к остову дуг рассчитываются по правилу неубывания интенсивности предпочтений.

¹⁰ Линейный граф – это простой граф, вершины которого можно расположить в последовательность так, что две вершины смежные (соединены дугой) тогда и только тогда, когда они следуют друг за другом в этой последовательности.

¹¹ Антисимметричный граф – это ориентированный граф, в котором между любыми двумя различными вершинами может быть дуга не более чем в одном направлении.

¹² При необходимости условие ацикличности можно проверить с помощью исходной МПС, в таком случае второй этап можно не проводить.

⁹ Выполнение правила неубывания интенсивности предпочтений для МПС означает выполнение этого правила также для соответствующего этой матрице взвешенного графа предпочтений.

МПС, соответствующая заново выстроенному графу предпочтений, будет представлять собой исправленную МПС эксперта и иметь более высокую внутреннюю согласованность по сравнению с исходной матрицей.

СПОСОБ 2: повышение внутренней согласованности МПС сопоставлением ее с ИМПС и корректировкой противоречащих элементов.

Идея способа заключается в поэтапном поиске и последовательном устранении противоречивых суждений эксперта, содержащихся в составленной экспертом МПС \mathbf{A} . Выявление противоречий, содержащихся в матрице \mathbf{A} , предлагается осуществлять, сопоставляя ее с ИМПС, полученной из исходной матрицы \mathbf{A} посредством выполнения операции ее идеализации по одной из строк (или по одному из ее столбцов).

Операция идеализации МПС по строкам или столбцам. Введем в рассмотрение операцию идеализации МПС по s -й строке, под которой будем понимать пересчет всех элементов матрицы \mathbf{A} в предположении о том, что s -я строка этой матрицы наиболее адекватно отражает мнение эксперта:

$$I_s^{\leftrightarrow}(\mathbf{A}) = \tilde{\mathbf{A}}_s = \{ \tilde{a}_{sij} = a_{sj} / a_{si} \}_{n \times n}, \quad s = \overline{1, n},$$

$$\forall s, i, j, k : \tilde{a}_{sij} > 0, \tilde{a}_{sji} = 1 / \tilde{a}_{sij}, \quad (3)$$

$$\tilde{a}_{sii} = 1, \quad \tilde{a}_{sij} = \tilde{a}_{sik} \tilde{a}_{skj}.$$

Очевидно, что получаемая в результате идеализации матрицы \mathbf{A} по s -й строке матрица¹³ $\tilde{\mathbf{A}}_s$ является ИМПС в силу указанного в (3) способа получения ее элементов из элементов исходной матрицы и для нее полностью выполняется условие численной транзитивности.

Также введем операцию идеализации МПС по l -му столбцу, под которой будем понимать пересчет всех элементов матрицы \mathbf{A} в предположении о том, что l -й столбец этой матрицы наиболее адекватно отражает мнение эксперта:

$$I_l^{\uparrow}(\mathbf{A}) = \hat{\mathbf{A}}_l = \{ \hat{a}_{lij} = a_{il} / a_{jl} \}_{n \times n}, \quad l = \overline{1, n},$$

$$\forall l, i, j, k : \hat{a}_{lij} > 0, \hat{a}_{lji} = 1 / \hat{a}_{lij}, \quad (4)$$

$$\hat{a}_{lii} = 1, \quad \hat{a}_{lij} = \hat{a}_{lik} \hat{a}_{lkj}.$$

Вновь очевидно, что получаемая в результате идеализации матрицы \mathbf{A} по l -й столбцу матрица $\hat{\mathbf{A}}_l$ представляет собой ИМПС в силу указанного в (4) способа получения ее элементов из элемен-

тов исходной матрицы и для нее полностью выполняется условие численной транзитивности.

Следует отметить, что результаты идеализации матрицы \mathbf{A} по k -й строке и по k -му столбцу полностью совпадают:

$$\forall i, j, k = \overline{1, n} : \tilde{a}_{kij} = a_{kj} / a_{ki} = \frac{1/a_{ki}}{1/a_{kj}} =$$

$$= a_{ik} / a_{jk} = \hat{a}_{kij} \Rightarrow \tilde{\mathbf{A}}_k = \hat{\mathbf{A}}_k.$$

Кроме того, операция идеализации матрицы \mathbf{A} по любому ее столбцу или строке, если данная матрица уже есть ИМПС, всегда будет порождать ту же самую исходную матрицу¹⁴:

$$\forall i, j, k = \overline{1, n} : a_{ij} = a_{ik} a_{kj} \Rightarrow \forall s,$$

$$l = \overline{1, n} : I_s^{\leftrightarrow}(\mathbf{A}) = I_l^{\uparrow}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}.$$

Критерий взаимной согласованности МПС.

Для формализации поиска противоречий между исходной матрицей \mathbf{A} и соответствующей ей ИМПС $\tilde{\mathbf{A}}$, полученной с помощью операции идеализации, используем следующий количественный критерий [15] противоречивости результатов сравнения пары альтернатив (C_i, C_j) по степени предпочтения одной перед другой¹⁵:

$$f(C_i, C_j) = f_{ij} = \left| \log_2(a_{ij} / \tilde{a}_{ij}) \right|, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (5)$$

При последующем использовании критерия (5) будем полагать, что противоречие наблюдается в том случае, когда наблюдается более чем двукратное расхождение¹⁶ между элементами исходной и идеальной матриц, т. е. когда критерий принимает значение, большее единицы. В таблице приведены все возможные значения критерия (5) для случая, когда все элементы сопоставляемых матриц \mathbf{A} и $\tilde{\mathbf{A}}$ принадлежат вербально-числовой шкале¹⁷, разработанной Т. Сааги для МАИ.

¹⁴ Доказательство не приводится, поскольку тривиально.

¹⁵ Иначе говоря, критерий применяется для сопоставления элементов двух МПС, одинаково расположенных в соответствующих матрицах, т. е. имеющих одинаковые друг с другом значения как индекса строки, так и индекса столбца. При этом соответствующие МПС должны быть сформированы на основе попарного сравнения одного и того же набора альтернатив – как в плане числа альтернатив, так и в плане порядка их следования. Это требование всегда будет выполняться для исходной МПС и любой полученной из нее с помощью операции идеализации ИМПС.

¹⁶ Таким образом, чем больше основание логарифма, используемого для расчета критерия (5), тем менее чувствительным будет данный критерий к противоречиям между сопоставляемыми МПС.

¹⁷ Первый столбец и первая строка таблицы соответствуют всем значениям данной шкалы.

¹³ В общем случае ИМПС, получаемые идеализацией матрицы \mathbf{A} по разным ее строкам (или столбцам), могут быть различны на уровне элементов.

Значения критерия взаимной согласованности МПС для шкалы, используемой в МАИ
 Values of the criterion of mutual consistency of paired comparison matrices for the scale used in the AHP

a_{ij}	\tilde{a}_{ij}																
	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5	1/4	1/3	1/2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1/9	0.00	0.17	0.36	0.58	0.85	1.17	1.58	2.17	3.17	4.17	4.75	5.17	5.49	5.75	5.98	6.17	6.34
1/8	0.17	0.00	0.19	0.42	0.68	1.00	1.42	2.00	3.00	4.00	4.58	5.00	5.32	5.58	5.81	6.00	6.17
1/7	0.36	0.19	0.00	0.22	0.49	0.81	1.22	1.81	2.81	3.81	4.39	4.81	5.13	5.39	5.61	5.81	5.98
1/6	0.58	0.42	0.22	0.00	0.26	0.58	1.00	1.58	2.58	3.58	4.17	4.58	4.91	5.17	5.39	5.58	5.75
1/5	0.85	0.68	0.49	0.26	0.00	0.32	0.74	1.32	2.32	3.32	3.91	4.32	4.64	4.91	5.13	5.32	5.49
1/4	1.17	1.00	0.81	0.58	0.32	0.00	0.42	1.00	2.00	3.00	3.58	4.00	4.32	4.58	4.81	5.00	5.17
1/3	1.58	1.42	1.22	1.00	0.74	0.42	0.00	0.58	1.58	2.58	3.17	3.58	3.91	4.17	4.39	4.58	4.75
1/2	2.17	2.00	1.81	1.58	1.32	1.00	0.58	0.00	1.00	2.00	2.58	3.00	3.32	3.58	3.81	4.00	4.17
1	3.17	3.00	2.81	2.58	2.32	2.00	1.58	1.00	0.00	1.00	1.58	2.00	2.32	2.58	2.81	3.00	3.17
2	4.17	4.00	3.81	3.58	3.32	3.00	2.58	2.00	1.00	0.00	0.58	1.00	1.32	1.58	1.81	2.00	2.17
3	4.75	4.58	4.39	4.17	3.91	3.58	3.17	2.58	1.58	0.58	0.00	0.42	0.74	1.00	1.22	1.42	1.58
4	5.17	5.00	4.81	4.58	4.32	4.00	3.58	3.00	2.00	1.00	0.42	0.00	0.32	0.58	0.81	1.00	1.17
5	5.49	5.32	5.13	4.91	4.64	4.32	3.91	3.32	2.32	1.32	0.74	0.32	0.00	0.26	0.49	0.68	0.85
6	5.75	5.58	5.39	5.17	4.91	4.58	4.17	3.58	2.58	1.58	1.00	0.58	0.26	0.00	0.22	0.42	0.58
7	5.98	5.81	5.61	5.39	5.13	4.81	4.39	3.81	2.81	1.81	1.22	0.81	0.49	0.22	0.00	0.19	0.36
8	6.17	6.00	5.81	5.58	5.32	5.00	4.58	4.00	3.00	2.00	1.42	1.00	0.68	0.42	0.19	0.00	0.17
9	6.34	6.17	5.98	5.75	5.49	5.17	4.75	4.17	3.17	2.17	1.58	1.17	0.85	0.58	0.36	0.17	0.00

Этапы 2-го способа повышения согласованности МПС.

Этап 1. Выбирается произвольная строка исходной матрицы **A** (не умаляя общности, можно полагать, что это первая строка¹⁸), по которой проводится операция идеализации матрицы **A**; в результате будет получена ИМПС \tilde{A}_s .

Этап 2. С помощью критерия (5) проводится поэлементное сравнение матрицы **A** с полученной на предыдущем этапе матрицей \tilde{A}_s ; результаты сравнения можно представить в виде матрицы, являющейся симметричной относительно главной диагонали, на которой стоят нули:

$$F(\mathbf{A}, \tilde{A}_s) = \left\{ f_{ij} = \left| \log_2 \left(a_{ij} / \tilde{a}_{ij} \right) \right| \right\}_{n \times n}, \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Этап 3. Выявляются все элементы матрицы (6), значения которых больше единицы¹⁹.

Если $f_{ij} > 1$, то, в соответствии с критерием (5), это указывает на внутреннюю несогласованность суждений эксперта: суждения эксперта, формирующие s -ю строку матрицы **A**, противоре-

чат его же суждениям, формирующим i -ю строку матрицы **A**. С целью устранения выявленных противоречий осуществляется переход к этапу 4.

Если анализ не выявил противоречий в суждениях эксперта, то матрица **A** может считаться удовлетворительно согласованной, и дальнейшее выполнение этапов прекращается.

Этап 4. Для всех $f_{ij} > 1$ выполняется корректировка элементов a_{ij} и a_{ji} матрицы **A** заменой их на элементы \tilde{a}_{ij} и \tilde{a}_{ji} матрицы \tilde{A}_s соответственно. В результате такой корректировки из матрицы **A** будет получена исправленная матрица **A***. Затем осуществляется возврат к 1-му этапу, но теперь для идеализации уже исправленной матрицы используется произвольная строка с другим номером.

Получаемая с помощью данного способа исправленная МПС отражает, пусть и с некоторыми отличиями, вызванными выполненными корректировками, мнение эксперта, и при этом обладает допустимым уровнем внутренней согласованности.

Заключение. Первый способ повышения согласованности МПС предлагает рассматривать свойство численной транзитивности в виде комплексного выполнения свойства порядковой транзитивности и свойства неубывания интенсивности предпочтений. Предполагается, что компетентный эксперт в состоянии обеспечить выполнение свойства порядковой транзитивности при формировании МПС. Тогда неточности, допущенные экспер-

¹⁸ Выбор строки для идеализации МПС может быть субъективным, но можно допустить, что эксперт наиболее сосредоточен при заполнении именно первой строки матрицы.

¹⁹ Очевидно, что если элемент матрицы (6), стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, имеет значение, превышающее единицу, то и элемент этой матрицы, стоящий на пересечении j -й строки и i -го столбца, тоже будет иметь значение, большее единицы.

том при формировании МПС и заключающиеся в нарушении свойства неубывания интенсивности предпочтений, могут быть устранены с помощью первого способа, причем это может сделать как сам эксперт, так и аналитик, выполняющий обработку экспертных оценок.

Второй способ ориентирован именно на применение аналитиком и сильнее формализован, что дает возможность его автоматизированной реализации в рамках информационной системы, обеспечивающей анализ и обработку экспертной информации. Данный способ не требует от составленной экспертом МПС обладания свойством порядковой

транзитивности, однако может привести к более существенному изменению исходной матрицы в ходе ее корректировки, нежели первый способ.

Получаемые в результате применения любого из двух рассмотренных способов МПС в общем случае не будут представлять собой ИМПС, однако будут иметь удовлетворительный уровень внутренней согласованности, что упрощает их дальнейшую обработку, например связанную с получением групповой МПС методом осреднения, базирующимся на использовании произведения Адамара [16].

Список литературы

1. Ларичев О. И. Объективные модели и субъективные решения. М.: Наука, 1987. 143 с.
2. Ларичев О. И. Вербальный анализ решений. М.: Наука, 2006. 181 с.
3. Уткин Л. В. Анализ риска и принятие решений при неполной информации. СПб.: Наука, 2007. 404 с.
4. Сидельников Ю. В. Системный анализ технологии экспертного прогнозирования. М.: Изд-во МАИ-Принт, 2007. 348 с.
5. Бурков Е. А., Падерно П. И. Методы группового экспертного оценивания / под общ. ред. проф. П. И. Падерно. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2025. 166 с.
6. Гузий А. Г., Лушкин А. М., Майорова Ю. А. Теория и практика экспертного анализа состояний сложных динамических систем. М.: ИД Академии Жуковского, 2015. 127 с.
7. Коробов В. Б. Теория и практика экспертных методов / под ред. Б. И. Кочурова. М.: НИЦ ИНФРА-М, 2021. 281 с.
8. Литвак Б. Г. Экспертные оценки и принятие решений. М.: ПП «Патент», 1996. 271 с.
9. Саати Т. Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети / пер. с англ. д.т.н., проф. О. Н. Андрейчиковой. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 360 с.
10. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий / пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь, 1993. 320 с.
11. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем / пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь, 1991. 224 с.
12. Алескеров Ф. Т., Айзерман М. А. Выбор вариантов: основы теории. М.: Наука, 1990. 236 с.
13. Миркин Б. Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974. 256 с.
14. Бешелев С. Д., Гурвич Ф. Г. Математико-статистические методы экспертных оценок. М.: Статистика, 1974. 159 с.
15. Падерно П. И., Бурков Е. А., Евграфов В. Г. Критерий согласованности парных сравнений // Информационно-управляющие системы. 2011. № 3 (52). С. 57–60.
16. Падерно П. И. Метод комплексирования мнений экспертов внутри группы при использовании метода анализа иерархий // Изв. Санкт-Петербургской лесотехнической академии. 2009. № 189. С. 238–245.

Информация об авторах

Бурков Евгений Александрович – канд. техн. наук, доцент кафедры информационных систем и кафедры алгоритмической математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: eaburkov@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-8788-6470>

Падерно Павел Иосифович – д-р техн. наук, профессор кафедры информационных систем СПбГЭТУ «ЛЭТИ». Заслуженный деятель науки РФ.

E-mail: pipaderno@list.ru

<https://orcid.org/0000-0001-9032-5084>

Розен Виктор Владимирович – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры алгоритмической математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: rozenvv@mail.ru

Толкачева Елена Алексеевна – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгоритмической математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: eatolкачева@etu.ru

<https://orcid.org/0000-0002-0552-7245>

Черкасова Дарья Андреевна – магистрант кафедры алгоритмической математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ».
E-mail: darya_cherkasova_03@mail.ru

Вклад авторов:

Бурков Е. А. – проверка математической модели идеальных матриц парных сравнений путем построения компьютерной модели; расчет значений критерия согласованности для шкалы МАИ; подготовка вводящей части и оформление текста статьи для передачи в редакцию.

Падерно П. И. – формализованная постановка задачи исследования; разработка математической модели идеализации и основанного на ней способа повышения согласованности матриц парных сравнений.

Розен В. В. – концептуальная постановка задачи исследования.

Толкачева Е. А. – анализ научных источников и подготовка их списка; формулирование итоговых выводов.

Черкасова Д. А. – разработка способа повышения согласованности матриц парных сравнений на основе анализа и корректировки графа предпочтения альтернатив.

References

1. Larichev O. I. Ob'ektivnye modeli i sub'ektivnye reshenija. M.: Nauka, 1987. 143 s. (In Russ.).
2. Larichev O. I. Verbalnyj analiz reshenij. M.: Nauka, 2006. 181 s. (In Russ.).
3. Utkin L. V. Analiz riska i prinjatie reshenij pri nepolnoj informacii. SPb.: Nauka, 2007. 404 s. (In Russ.).
4. Sidelnikov Yu. V. Sistemnyj analiz tehnologii ekspertnogo prognozirovaniya. M.: Izd-vo MAI-Print, 2007. 348 s. (In Russ.).
5. Burkov E. A., Paderno P. I. Metody gruppovogo ekspertnogo ocenivaniya / pod obshh. red. prof. P. I. Paderno. SPb.: Izd-vo SPbGETU «LETI», 2025. 166 s. (In Russ.).
6. Guzij A. G., Lushkin A. M., Majorova Yu. A. Teorija i praktika ekspertnogo analiza sostojanij slozhnyh dinamicheskikh sistem. M.: ID Akademii Zhukovskogo, 2015. 127 s. (In Russ.).
7. Korobov V. B. Teorija i praktika ekspertnyh metodov / pod red. B. I. Kochurova. M.: NICz INFRA-M, 2021. 281 s. (In Russ.).
8. Litvak B. G. Ekspertnyie ocenki i prinjatie reshenij. M.: PP «Patent», 1996. 271 s. (In Russ.).
9. Saati T. L. Prinjatie reshenij pri zavisimostjah i obratnyh svyazjah: Analiticheskie seti / per. s angl. d.t.n., prof. O. N. Andrejchikovej. M.: Izd-vo LKI, 2008. 360 s. (In Russ.).
10. Saati T. Prinjatie reshenij. Metod analiza ierarhij / per. s angl. R. G. Vachnadze. M.: Radio i svyaz, 1993. 320 s. (In Russ.).
11. Saati T., Kerns K. Analiticheskoe planirovanie. Organizacija sistem / per. s angl. R. G. Vachnadze. M.: Radio i svyaz, 1991. 224 s. (In Russ.).
12. Aleskerov F. T., Ajzerman M. A. Vybor variantov: osnovy teorii. M.: Nauka, 1990. 236 s. (In Russ.).
13. Mirkin B. G. Problema gruppovogo vybora. M.: Nauka, 1974. 256 s. (In Russ.).
14. Beshelev S. D., Gurchich F. G. Matematiko-statisticheskie metody ekspertnyh ocenok. M.: Statistika, 1974. 159 s. (In Russ.).
15. Paderno P. I., Burkov E. A., Evgrafov V. G. Kriterij soglasovannosti parnyh sravnenij // Informacionno-upravljajushhie sistemy. 2011. № 3 (52). S. 57–60. (In Russ.).
16. Paderno P. I. Metod kompleksirovaniya mnenij ekspertov vnutri gruppy pri ispolzovanii metoda analiza ierarhij // Izv. Sankt-Peterburgskoj lesotehnicheskoy akademii. 2009. № 189. S. 238–245. (In Russ.).

Information about the authors

Evgeniy A. Burkov – Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Department of Information Systems and Department of Algorithmic Mathematics, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: eaburkov@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-8788-6470>

Pavel I. Paderno – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Department of Information Systems, Saint Petersburg Electrotechnical University. Honored Worker of Science of the Russian Federation.

E-mail: pipaderno@list.ru

<https://orcid.org/0000-0001-9032-5084>

Victor V. Rozen – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Department of Algorithmic Mathematics, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: rozenvv@mail.ru

Elena A. Tolkacheva – Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor of Department of Algorithmic Mathematics, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: eatolkacheva@etu.ru

<https://orcid.org/0000-0002-0552-7245>

Darya A. Cherkasova – Master's student of Department of Algorithmic Mathematics, Saint Petersburg Electrotechnical University.

E-mail: darya_cherkasova_03@mail.ru

Author contribution statement:

Burkov E. A. – verification of the mathematical model of ideal matrices of paired comparisons by constructing a computer model; calculation of the values of the consistency criterion for the scale of AHP; preparation of the introductory part and formatting of the text of the article for transmission to the editor.

Paderno P. I. – mathematical formulation of the research problem; development of the mathematical model of idealization and the method based on it to increase the consistency of paired comparison matrices.

Rozen V. V. – conceptual formulation of the research problem.

Tolkacheva E. A. – analysis of scientific sources and preparation of their list; formulation of final conclusions.

Cherkasova D. A. – development of the way to increase the consistency of pairwise comparison matrices based on the analysis and correction of the graph of preference for alternatives.

Статья поступила в редакцию 01.11.2025; принята к публикации после рецензирования 25.12.2025; опубликована онлайн 26.02.2026.

Submitted 01.11.2025; accepted 25.12.2025; published online 26.02.2026.
