

Модифицированные алгоритмы адаптивного робастного управления с эталонной моделью нелинейными объектами в условиях неопределенности и неизвестных возмущений

З. Х. Нгуен[✉], В. В. Путов, В. Н. Шелудько

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

✉ khanhnguyen.mta@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача синтеза адаптивных робастных систем управления с эталонной моделью для нелинейных объектов в условиях неопределенности и неизвестных возмущений. Для решения данной задачи предложены два подхода, позволяющие преодолеть ограничения традиционного адаптивного управления с эталонной моделью при действии внешних возмущений. Первый подход, основанный на базе адаптивного робастного управления с модифицированной эталонной моделью, применяется для компенсации влияния неопределенности и неизвестных согласованных возмущений. Второй, основанный на базе адаптивного робастного управления в скользящих режимах с эталонной моделью, используется для компенсации влияния вышеупомянутых факторов и неизвестных несогласованных возмущений. Методом функций Ляпунова доказывается робастность (робастная устойчивость) систем управления. Для расчета параметров адаптивных робастных систем применяется метод линейных матричных неравенств (ЛМН). Эффективность предлагаемых подходов продемонстрирована моделированием в программной среде MatLab/Simulink на численном примере синтеза управления нелинейной системой второго порядка.

Ключевые слова: модифицированные алгоритмы управления с эталонной моделью, модифицированная эталонная модель, управление в скользящих режимах, адаптивное робастное управление, линейные матричные неравенства (ЛМН), нелинейные системы, неопределенность, согласованные и несогласованные возмущения, моделирование

Для цитирования: Нгуен З. Х., Путов В. В., Шелудько В. Н. Модифицированные алгоритмы адаптивного робастного управления с эталонной моделью нелинейными объектами в условиях неопределенности и неизвестных возмущений // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2025. Т. 18, № 2. С. 90–100. doi: 10.32603/2071-8985-2025-18-2-90-100.

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

Modified Algorithms of Model Reference Adaptive Robust Control for Nonlinear Objects under Uncertainty and Unknown Disturbances

D. K. Nguyen[✉], V. V. Putov, V. N. Sheludko

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

✉ khanhnguyen.mta@gmail.com

Abstract. The article considers the problem of synthesizing model reference adaptive robust control systems for nonlinear objects under uncertainty and unknown disturbances. To solve this problem, two approaches are proposed that allow overcoming the limitations of traditional model reference adaptive control under external disturbances. The first approach, based on modified model reference adaptive robust control, is used to compensate for the influence of uncertainty and unknown matched disturbances. The second approach, based on model reference adaptive robust sliding mode control, is used to compensate for the influence of the above-

mentioned factors and unknown unmatched disturbances. The Lyapunov function method is used to prove the robustness (robust stability) of control systems. The linear matrix inequalities (LMI) method is used to calculate the parameters of adaptive robust systems. The efficiency of the proposed approaches is demonstrated by modeling in the MatLab/Simulink software environment using a numerical example of control synthesis for a second-order nonlinear system.

Keywords: modified algorithms of model reference control, modified reference model, sliding mode control, adaptive robust control, linear matrix inequalities (LMI), nonlinear systems, uncertainty, matched and unmatched disturbances, modeling

For citation: Nguyen D. K., Putov V. V., Sheludko V. N. Modified Algorithms of Model Reference Adaptive Robust Control for Nonlinear Objects under Uncertainty and Unknown Disturbances // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2025. Vol. 18, no. 2. P. 90–100. doi: 10.32603/2071-8985-2025-18-2-90-100.

Conflict of interest. The authors declare no conflicts of interest.

Введение. На практике большинство объектов управления имеют нелинейные характеристики и неопределенные параметры. Во многих случаях они также подвержены непредсказуемому воздействию внешних возмущений. Поэтому одно из важных требований, предъявляемых к системам автоматического управления, – это их способность справляться с существованием неопределенности объекта и при этом сохранять высокое качество управления. Применением традиционных регуляторов – таких, как ПИД-регулятор или модальный регулятор, обеспечивается приемлемое качество управления, если нелинейные факторы и неопределенности не оказывают существенного влияния на динамику объекта. Однако системы управления могут стать неустойчивыми при действии существенных нелинейностей и неопределенностей модели и внешних возмущений. В таких случаях адаптивное управление служит эффективным подходом к синтезу систем управления нелинейными неопределенными объектами [1]–[3]. В качестве методов адаптивного управления наиболее распространены методы непосредственной компенсации и скоростного градиента [2], [4], [5], метод адаптивного обхода интегратора (adaptive backstepping) [6]–[8], адаптивное управление в скользящих режимах [9]–[11], адаптивное управление с эталонной моделью [2], [12], [13] и др.

Методы адаптивного управления с эталонной моделью разработаны очень рано и первоначально применялись к линейным системам, а затем были распространены на нелинейные системы. Модификации этого метода разработаны для применения к нелинейным объектам при действии неопределенностей и внешних возмущений с целью повышения качества управления. В [14], [15] представлено адаптивное нейросетевое управление с эталонной моделью для компенсации изме-

няющихся во времени неопределенностей. В [16] представлен сложный подход, основанный на сочетании адаптивного управления с эталонной моделью и управления в скользящих режимах, в котором метод градиентного спуска используется для настройки параметров управления в скользящих режимах. В [17], [18] предложен метод адаптивного управления с модифицированной эталонной моделью для нелинейных систем с неопределенностью и возмущением, согласованными с управляющим сигналом. Этот метод управления имеет ряд достоинств в сравнении с традиционной эталонной моделью, таких как улучшение качественных показателей и робастности, подавление высокочастотных колебаний управляющих сигналов, вызванных в процессе адаптации при высоких адаптивных коэффициентах. [19] посвящена синтезу интегрального адаптивного управления с эталонной моделью в сочетании с H_∞ – робастным управлением для нелинейной авиационной системы в условиях неопределенности и возмущений, несогласованных с управляющим сигналом, т. е. при невыполнении условия адаптируемости.

В данной статье представлены два модифицированных алгоритма адаптивного робастного управления с эталонной моделью нелинейными объектами в условиях неопределенности и неизвестных возмущений. Первый алгоритм, представляющий улучшение алгоритма в [17], [18] и работоспособный для систем с согласованными неопределенностями и возмущениями, отличается от алгоритма в этих работах использованием в модифицированной эталонной модели матрицы \mathbf{K}_e вместо коэффициента λ компонента обратной связи по ошибкам слежения между системой и модифицированной эталонной моделью. Кроме того, параметры адаптивного управления по первому алгоритму рассчитываются методом линейных матричных неравенств, а не решением мат-

ричного уравнения Ляпунова. При невыполнении условия адаптируемости предлагается второй алгоритм, служащий развитием первого алгоритма в сочетании с управлением в скользящих режимах. С помощью предлагаемых подходов размер инвариантного множества, к которому все сигналы системы сходятся, и их скорость сходимости можно регулировать в зависимости от параметров управления.

Алгоритм адаптивного робастного управления с модифицированной эталонной моделью. Рассмотрим динамику нелинейных объектов, описываемую следующим матричным дифференциальным уравнением:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{W}\mathbf{f}(\mathbf{x})] + \mathbf{d}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$ – вектор состояния; $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^p$ – вектор управления системы; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathfrak{R}^q$ – вектор функций регрессора; $\mathbf{W} \in \mathfrak{R}^{p \times q}$ – матрица неизвестных постоянных параметров; $\mathbf{d}(t) \in \mathfrak{R}^n$ – вектор неизвестных ограниченных внешних возмущений ($\|\mathbf{d}(t)\| \leq d_0$, где d_0 – неизвестная постоянная величина); $\mathbf{A} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ и $\mathbf{B} \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ – неизвестные постоянные матрицы, удовлетворяющие условию управляемости.

Для заданных матриц $\mathbf{A}_m \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ (\mathbf{A}_m – матрица Гурвица) и $\mathbf{B}_m \in \mathfrak{R}^{n \times p}$ ($\text{rank}(\mathbf{B}) = p$) существуют матрицы $\mathbf{K}_1 \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ и $\mathbf{\Lambda} \in \mathfrak{R}^{p \times p}$ ($\mathbf{\Lambda} > 0$) такие, что выполняются следующие соотношения:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_m \mathbf{\Lambda}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_m + \mathbf{B} \mathbf{K}_1. \quad (2)$$

Рассмотрим модифицированную эталонную модель следующего вида:

$$\dot{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{r}(t) + \mathbf{K}_e \mathbf{e}(t), \quad (3)$$

где $\mathbf{x}_m \in \mathfrak{R}^n$ – вектор состояния модифицированной эталонной модели; $\mathbf{r}(t) \in \mathfrak{R}^p$ – вектор командных сигналов; $\mathbf{K}_e \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ – постоянная матрица; $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_m(t) \in \mathfrak{R}^n$ – вектор ошибок слежения между системой и модифицированной эталонной моделью.

Перепишем уравнение (1) с учетом (2) в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{r}(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{\Lambda} \times [\mathbf{u}(t) + \mathbf{W}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_2 \mathbf{r}(t)] + \mathbf{d}(t), \quad (4)$$

где $\mathbf{K}_2 = \mathbf{\Lambda}^{-1} \in \mathfrak{R}^{p \times p}$.

Пусть $\hat{\mathbf{K}}_1, \hat{\mathbf{K}}_2, \hat{\mathbf{W}}$ – оценки матриц $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{W}$; $\tilde{\mathbf{K}}_1 = \hat{\mathbf{K}}_1 - \mathbf{K}_1$, $\tilde{\mathbf{K}}_2 = \hat{\mathbf{K}}_2 - \mathbf{K}_2$, $\tilde{\mathbf{W}} = \hat{\mathbf{W}} - \mathbf{W}$ – ошибки оценивания этих матриц. Тогда можно предложить адаптивное робастное управление с законом вида

$$\mathbf{u}(t) = -\hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r}(t) - \hat{\mathbf{W}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (5)$$

и алгоритмами настройки вида

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{K}}}_1 = \gamma_1 (\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e} \mathbf{x}^T - \sigma_1 \hat{\mathbf{K}}_1); \\ \dot{\hat{\mathbf{K}}}_2 = \gamma_2 (\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e} \mathbf{r}^T - \sigma_2 \hat{\mathbf{K}}_2); \\ \dot{\hat{\mathbf{W}}} = \gamma_3 (\mathbf{B}_m^T \mathbf{P} \mathbf{e} \mathbf{f}^T - \sigma_3 \hat{\mathbf{W}}), \end{cases} \quad (6)$$

где $\mathbf{P} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ – симметричная, положительно определенная матрица; $\gamma_i, \sigma_i > 0$ – положительные числа ($i = \overline{1, 3}$).

Далее будем исследовать устойчивость построенной системы с модифицированной эталонной моделью (3) и адаптивным робастным управлением (5) и (6). С помощью уравнений (3), (4) и (5) получим следующее выражение, описывающее динамику ошибок слежения:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= (\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_e) \mathbf{e}(t) - \mathbf{B}_m \mathbf{\Lambda} \times \\ &\times [\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r}(t) + \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{f}(\mathbf{x})] + \mathbf{d}(t). \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V_1 = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e} + \text{Tr} \left(\gamma_1^{-1} \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{K}}_1 \tilde{\mathbf{K}}_1^T + \gamma_2^{-1} \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{K}}_2^T + \gamma_3^{-1} \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{W}}^T \right),$$

и вычислим ее производную по времени в силу уравнения (7):

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \mathbf{e}^T \left[(\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_e)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_e) \right] \mathbf{e} - \\ &- 2 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_m \mathbf{\Lambda} (\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{f}) + \\ &+ 2 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{d} + 2 \text{Tr} \left(\gamma_1^{-1} \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{K}}_1 \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_1^T + \gamma_2^{-1} \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{K}}_2 \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_2^T + \gamma_3^{-1} \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{W}} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}^T \right), \text{ или} \\ \dot{V}_1 &= \mathbf{e}^T \left[(\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_e)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_e) \right] \mathbf{e} - \\ &- 2 \text{Tr} \left[\mathbf{\Lambda} (\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{f}) \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_m \right] + \\ &+ 2 \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{d} + 2 \text{Tr} \left(\gamma_1^{-1} \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{K}}_1 \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_1^T + \gamma_2^{-1} \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{K}}_2 \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_2^T + \gamma_3^{-1} \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{W}} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}^T \right). \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть $\mathbf{Q} = - \left[(\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_e)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_e) \right] > 0$.

Подставив (6) в (8), получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{d} - \\ &- 2\text{Tr} \left(\sigma_1 \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_1 \hat{\mathbf{K}}_1^T + \sigma_2 \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_2 \hat{\mathbf{K}}_2^T + \sigma_3 \Lambda \tilde{\mathbf{W}} \hat{\mathbf{W}}^T \right) \leq \\ &\leq -[\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) - 1] \|\mathbf{e}\|^2 - \lambda_{\min}(\Lambda) \times \\ &\times \left(\sigma_1 \|\tilde{\mathbf{K}}_1\|_F^2 + \sigma_2 \|\tilde{\mathbf{K}}_2\|_F^2 + \sigma_3 \|\tilde{\mathbf{W}}\|_F^2 \right) + \\ &+ \lambda_{\max}(\Lambda) \left(\sigma_1 \|\mathbf{K}_1\|_F^2 + \sigma_2 \|\mathbf{K}_2\|_F^2 + \sigma_3 \|\mathbf{W}\|_F^2 \right) + \\ &+ [\lambda_{\max}(\mathbf{P}) d_0]^2, \end{aligned}$$

где $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ и $\|\cdot\|_F$ – минимальное и максимальное собственные числа и норма матрицы Фробениуса соответственно.

Пусть

$$\begin{aligned} c_1 &= \lambda_{\max}(\Lambda) \left(\sigma_1 \|\mathbf{K}_1\|_F^2 + \sigma_2 \|\mathbf{K}_2\|_F^2 + \sigma_3 \|\mathbf{W}\|_F^2 \right) + \\ &+ [\lambda_{\max}(\mathbf{P}) d_0]^2 > 0, \\ \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) &> 1; \\ \alpha_1 &= \min \left\{ \frac{\lambda_{\min}(\mathbf{Q}) - 1}{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}; \frac{\lambda_{\min}(\Lambda)}{\lambda_{\max}(\Lambda)} \gamma_1 \sigma_1; \right. \\ &\left. \frac{\lambda_{\min}(\Lambda)}{\lambda_{\max}(\Lambda)} \gamma_2 \sigma_2; \frac{\lambda_{\min}(\Lambda)}{\lambda_{\max}(\Lambda)} \gamma_3 \sigma_3 \right\}, \end{aligned}$$

тогда получим следующее неравенство:

$$\dot{V}_1 \leq -\alpha_1 V_1 + c_1.$$

Отсюда следует, что $\dot{V}_1 < 0$ вне компактного множества

$$\Omega_1 = \left\{ (\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{K}}_1, \tilde{\mathbf{K}}_2, \tilde{\mathbf{W}}) : V(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{K}}_1, \tilde{\mathbf{K}}_2, \tilde{\mathbf{W}}) \leq \frac{c_1}{\alpha_1} \right\},$$

т. е. все сигналы системы ограничены и экспоненциально сходятся к наибольшему инвариантному множеству, границу которого можно регулировать (уменьшать) в зависимости от выбора параметров управления.

Теперь найдем значения параметров системы, позволяющие уменьшать $\|\mathbf{e}(t)\|_{L_\infty}$, где $\|\cdot\|_{L_\infty}$ – L_∞ -функциональная норма. Рассмотрим квадратичную форму вида $V_2 = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}$. Ее производная по времени в силу уравнения (7) описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \mathbf{e}^T \left[(\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_e)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_e) \right] \mathbf{e} + 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{d} - \\ &- 2\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_m \Lambda (\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{f}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq \mathbf{e}^T \left[(\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_e)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_e) + 2\mathbf{E}_n \right] \mathbf{e} + \\ &+ [\lambda_{\max}(\mathbf{P}) d_0]^2 + \\ &+ \left[\lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\mathbf{B}_m \Lambda (\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{f})\| \right]^2, \end{aligned}$$

где \mathbf{E}_n – n -мерная единичная матрица.

Поскольку все сигналы системы ограничены, существует постоянная величина $c_2 > 0$, такая, что

$$\begin{aligned} &[\lambda_{\max}(\mathbf{P}) d_0]^2 + \\ &+ \left[\lambda_{\min}(\mathbf{P}) \|\mathbf{B}_m \Lambda (\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{f})\| \right]^2 \leq c_2. \end{aligned}$$

Тогда нетрудно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &\leq -\alpha_2 V_2 + \mathbf{e}^T \left[\alpha_2 \mathbf{P} + (\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_e)^T \mathbf{P} + \right. \\ &\left. + \mathbf{P} (\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_e) + 2\mathbf{E}_n \right] \mathbf{e} + c_2, \end{aligned}$$

где $\alpha_2 > 0$ – заданное положительное число.

Если найдутся матрицы \mathbf{K}_e и \mathbf{P} , такие, что

$$\left[\alpha_2 \mathbf{P} + (\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_e)^T \mathbf{P} + \mathbf{P} (\mathbf{A}_m - \mathbf{K}_e) + 2\mathbf{E}_n \right] < 0, \quad (9)$$

то $\dot{V}_2 \leq -\alpha_2 V_2 + c_2$, и, следовательно,

$$\|\mathbf{e}\| \leq \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{P})} \left[\left(V_2(0) - \frac{c_2}{\alpha_2} \right) e^{-\alpha_2 t} + \frac{c_2}{\alpha_2} \right]}.$$

Нетрудно заметить, что чем больше α_2 , тем меньше $\|\mathbf{e}(t)\|_{L_\infty}$ и тем быстрее сходится $\mathbf{e}(t)$. Таким образом, для уменьшения $\|\mathbf{e}(t)\|_{L_\infty}$ необходимо увеличить значение α_2 в неравенстве (9) и уменьшить значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Используя метод линейных матричных неравенств [20], решим (9) для нахождения \mathbf{K}_e и \mathbf{P} . Сначала необходимо преобразовать (9) к виду линейного матричного неравенства.

Пусть $\mathbf{M} = -\mathbf{P} \mathbf{K}_e \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, тогда получим линейное матричное неравенство вида

$$\left[\alpha_2 \mathbf{P} + \mathbf{A}_m^T \mathbf{P} + \mathbf{M}^T + \mathbf{P} \mathbf{A}_m + \mathbf{M} + 2\mathbf{E}_n \right] < 0. \quad (10)$$

С помощью средства LMI Toolbox в MatLab/Simulink, можно найти решение неравенства (10) – пару (\mathbf{P}, \mathbf{M}) . Тогда \mathbf{K}_e вычисляется по формуле $\mathbf{K}_e = -\mathbf{P}^{-1} \mathbf{M}$.

Первый предлагаемый в статье алгоритм управления служит улучшением алгоритма в [17], [18]. Однако, как в [17], [18], данный алгоритм не решает задачу компенсации влияния внешних возмущений, несогласованных с управляющими сигналами. Если на систему воздействуют согласованные внешние возмущения, то разработанное адаптивное робастное управление эффективно компенсирует их влияние на качество системы. А если на систему воздействуют несогласованные внешние возмущения, то даже несмотря на то, что ошибка слежения между системой и модифицированной эталонной моделью очень мала, качество системы все равно ухудшается, поскольку в этом случае элементы матрицы \mathbf{K}_e обратно пропорциональны значению $\|\mathbf{e}\|$, а следовательно, компонент $\mathbf{K}_e \mathbf{e}(t)$ заметно влияет на динамику модифицированной эталонной модели и приводит к искажению ее переменных состояния, тем самым снижая качество управления системы. Таким образом, для решения задачи компенсации влияния внешних несогласованных возмущений необходимо разработать другой модифицированный алгоритм адаптивного робастного управления с эталонной моделью.

Алгоритм адаптивного робастного управления в скользящих режимах с эталонной моделью. Рассмотрим эталонную модель (3) при $\mathbf{K}_e = 0$:

$$\dot{\mathbf{x}}_m(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}_m(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{r}(t). \quad (11)$$

Преобразуем (4) к следующему виду:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{r}(t) + \mathbf{B}_m \Lambda \times \\ \times [\mathbf{u}_0(t) + \mathbf{u}_s(t) + \mathbf{Wf}(\mathbf{x}) + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_2 \mathbf{r}(t)] + \mathbf{d}(t),$$

где $\mathbf{u}_0(t)$ – адаптивное робастное управление, как в (5); $\mathbf{u}_s(t)$ – адаптивное робастное управление в скользящих режимах.

Пусть

$$\mathbf{B}_m \Lambda \mathbf{u}_s = \mathbf{B}_m \mathbf{u}_s + \Delta \mathbf{B} \mathbf{u}_s; \quad \Delta \mathbf{B} = \mathbf{B}_m (\Lambda - \mathbf{E}_p); \\ \xi(t) = \Delta \mathbf{B} \mathbf{u}_s(t) + \mathbf{d}(t); \quad \|\xi(t)\| \leq \rho$$

– неизвестная постоянная величина. Тогда получим следующее матричное дифференциальное уравнение:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_m \mathbf{r}(t) + \mathbf{B}_m \Lambda [\mathbf{u}_0(t) + \mathbf{Wf}(\mathbf{x}) + \\ + \mathbf{K}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{K}_2 \mathbf{r}(t)] + \mathbf{B}_m \mathbf{u}_s(t) + \xi(t). \quad (12)$$

Рассмотрим поверхность скольжения следующего вида [21]:

$$\mathbf{s} = \mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \mathbf{e}, \quad (13)$$

где $\mathbf{G} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ – искомая симметричная положительно определенная матрица, которую необходимо спроектировать с использованием метода линейных матричных неравенств.

Пусть $\|\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \xi(t)\| \leq \delta$ – неизвестная постоянная величина; $\hat{\delta}$ – оценка величины δ ; $\tilde{\delta} = \hat{\delta} - \delta$ – ошибка оценивания. Предлагаемый в статье второй адаптивный робастный алгоритм с законом настройки параметров описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_s; \quad \mathbf{u}_0 = -\hat{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r}(t) - \hat{\mathbf{W}} \mathbf{f}(\mathbf{x}); \\ \mathbf{u}_s = -(\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \mathbf{B}_m)^{-1} \times \\ \times [\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \mathbf{A}_m \mathbf{e} + (\hat{\delta} + \varepsilon) \text{sign}(\mathbf{s}) + k_0 \mathbf{s}]; \\ \dot{\hat{\mathbf{K}}}_1 = \gamma_1 (\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \mathbf{B}_m \mathbf{s} \mathbf{x}^T - \sigma_1 \hat{\mathbf{K}}_1); \\ \dot{\hat{\mathbf{K}}}_2 = \gamma_2 (\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \mathbf{B}_m \mathbf{s} \mathbf{r}^T - \sigma_2 \hat{\mathbf{K}}_2); \\ \dot{\hat{\mathbf{W}}} = \gamma_3 (\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \mathbf{B}_m \mathbf{s} \mathbf{f}^T - \sigma_3 \hat{\mathbf{W}}); \\ \dot{\hat{\delta}} = \gamma_4 (\mathbf{s}^T \text{sign}(\mathbf{s}) - \sigma_4 \hat{\delta}), \end{cases} \quad (14)$$

где $k_0, \varepsilon, \gamma_i, \sigma_i > 0$ – положительные числа ($i = \overline{1, 4}$).

Исследуем устойчивость построенной адаптивной робастной системы управления в скользящих режимах с эталонной моделью (11) и алгоритмом управления (14)–(15). С помощью уравнений (11), (12) и (14) получим следующее выражение для динамики ошибок слежения:

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{A}_m \mathbf{e}(t) - \mathbf{B}_m \Lambda [\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x}(t) + \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r}(t) + \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{f}(\mathbf{x})] + \\ + \mathbf{B}_m \mathbf{u}_s(t) + \xi(t). \quad (16)$$

Рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$L_1 = \frac{1}{2} \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma_1^{-1} \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_1 \tilde{\mathbf{K}}_1^T + \gamma_2^{-1} \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_2 \tilde{\mathbf{K}}_2^T + \\ + \gamma_3^{-1} \Lambda \tilde{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{W}}^T) + \frac{1}{2} \gamma_4^{-1} \tilde{\delta}^2. \quad (17)$$

Дифференцируя по времени приведенную функцию с учетом (13) и (16), получим

$$\dot{L}_1 = \mathbf{s}^T \mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \times \\ \times [\mathbf{A}_m \mathbf{e} - \mathbf{B}_m \Lambda (\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{f}) + \mathbf{B}_m \mathbf{u}_s + \xi] + \\ + \text{Tr}(\gamma_1^{-1} \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_1 \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_1^T + \gamma_2^{-1} \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_2 \dot{\tilde{\mathbf{K}}}_2^T + \gamma_3^{-1} \Lambda \tilde{\mathbf{W}} \dot{\tilde{\mathbf{W}}}^T) + \\ + \gamma_4^{-1} \tilde{\delta} \dot{\tilde{\delta}};$$

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 = & \mathbf{s}^T \mathbf{B}_m^T \mathbf{G} (\mathbf{A}_m \mathbf{e} + \mathbf{B}_m \mathbf{u}_s + \xi) - \\ & - \text{Tr} \left[\Lambda (\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{f}) \mathbf{s}^T \mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \mathbf{B}_m \right] + \\ & + \text{Tr} \left(\gamma_1^{-1} \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_1 \dot{\mathbf{K}}_1^T + \gamma_2^{-1} \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_2 \dot{\mathbf{K}}_2^T + \gamma_3^{-1} \Lambda \tilde{\mathbf{W}} \dot{\mathbf{W}}^T \right) + \\ & + \gamma_4^{-1} \dot{\delta} \tilde{\delta}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставив (14) и (15) в (18), получим

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 = & -(\hat{\delta} + \varepsilon) \mathbf{s}^T \text{sign}(\mathbf{s}) - k_0 \mathbf{s}^T \mathbf{s} + \\ & + \mathbf{s}^T \mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \xi + \tilde{\delta} \mathbf{s}^T \text{sign}(\mathbf{s}) - \\ & - \text{Tr} \left(\sigma_1 \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_1 \dot{\mathbf{K}}_1^T + \sigma_2 \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_2 \dot{\mathbf{K}}_2^T + \sigma_3 \Lambda \tilde{\mathbf{W}} \dot{\mathbf{W}}^T \right) - \sigma_4 \tilde{\delta} \dot{\delta}; \\ \dot{L}_1 = & -(\delta + \varepsilon) \|\mathbf{s}\| - k_0 \|\mathbf{s}\|^2 + \mathbf{s}^T \mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \xi - \\ & - \text{Tr} \left(\sigma_1 \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_1 \dot{\mathbf{K}}_1^T + \sigma_2 \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_2 \dot{\mathbf{K}}_2^T + \sigma_3 \Lambda \tilde{\mathbf{W}} \dot{\mathbf{W}}^T \right) - \sigma_4 \tilde{\delta} \dot{\delta}; \\ \dot{L}_1 \leq & -(\delta + \varepsilon - \|\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \xi\|) \|\mathbf{s}\| - k_0 \|\mathbf{s}\|^2 - \frac{\lambda_{\min}(\Lambda)}{2} \times \\ & \times \left(\sigma_1 \|\tilde{\mathbf{K}}_1\|_F^2 + \sigma_2 \|\tilde{\mathbf{K}}_2\|_F^2 + \sigma_3 \|\tilde{\mathbf{W}}\|_F^2 \right) + \\ & + \frac{\lambda_{\max}(\Lambda)}{2} \left(\sigma_1 \|\mathbf{K}_1\|_F^2 + \sigma_2 \|\mathbf{K}_2\|_F^2 + \sigma_3 \|\mathbf{W}\|_F^2 \right) - \\ & - \frac{\sigma_4}{2} \tilde{\delta}^2 + \frac{\sigma_4}{2} \delta^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Видно, что $(\delta + \varepsilon - \|\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \xi\|) < 0$. Пусть

$$\Delta_1 = \frac{\lambda_{\max}(\Lambda)}{2} \times$$

$$\times \left(\sigma_1 \|\mathbf{K}_1\|_F^2 + \sigma_2 \|\mathbf{K}_2\|_F^2 + \sigma_3 \|\mathbf{W}\|_F^2 \right) + \frac{\sigma_4}{2} \delta^2 > 0$$

и

$$\beta_1 = \min \left\{ 2k_0; \frac{\lambda_{\min}(\Lambda)}{\lambda_{\max}(\Lambda)} \gamma_1 \sigma_1; \frac{\lambda_{\min}(\Lambda)}{\lambda_{\max}(\Lambda)} \gamma_2 \sigma_2; \frac{\lambda_{\min}(\Lambda)}{\lambda_{\max}(\Lambda)} \gamma_3 \sigma_3; \gamma_4 \sigma_4 \right\}.$$

Тогда из (17) и (19) получим следующее неравенство:

$$\dot{L}_1 \leq -\beta_1 L_1 + \Delta_1.$$

Отсюда следует, что $\dot{L}_1 < 0$ вне компактного множества

$$\Omega_2 = \left\{ (\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{K}}_1, \tilde{\mathbf{K}}_2, \tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\delta}) : V(\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{K}}_1, \tilde{\mathbf{K}}_2, \tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\delta}) \leq \frac{\Delta_1}{\beta_1} \right\},$$

т. е. все сигналы системы ограничены и экспоненциально сходятся к наибольшему инвариантному множеству, границу которого можно регулировать (уменьшать) в зависимости от выбора параметров управления.

Рассмотрим функцию Ляпунова $L_2 = \mathbf{s}^T \mathbf{s}$ и найдем ее производную по времени \dot{L}_2 :

$$\begin{aligned} \dot{L}_2 = & 2\mathbf{s}^T \dot{\mathbf{s}} = -2(\hat{\delta} + \varepsilon) \|\mathbf{s}\| - 2k_0 \|\mathbf{s}\|^2 - \\ & - 2\mathbf{s}^T \mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \mathbf{B}_m \Lambda (\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{f}) + 2\mathbf{s}^T \mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \xi, \\ \dot{L}_2 \leq & -2\varepsilon \|\mathbf{s}\| - (2k_0 - 3) \|\mathbf{s}\|^2 + \hat{\delta}^2 + \|\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \xi\|^2 + \\ & + \|\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \mathbf{B}_m \Lambda (\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{f})\|^2. \end{aligned}$$

Поскольку все сигналы системы ограничены, существует постоянная величина $\Delta_2 > 0$, такая, что

$$\begin{aligned} & \left[\hat{\delta}^2 + \|\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \xi\|^2 + \right. \\ & \left. + \|\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \mathbf{B}_m \Lambda (\tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r} + \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{f})\|^2 \right] \leq \Delta_2. \end{aligned}$$

Тогда получим следующее неравенство:

$$\dot{L}_2 \leq -2\varepsilon \sqrt{L_2} - (2k_0 - 3) L_2 + \Delta_2.$$

Нетрудно заметить, что чем больше $\varepsilon > 0$ и $k_0 > \frac{3}{2}$, тем меньше $\|\mathbf{s}(t)\|_{L_\infty}$ (т. е. меньше границы инвариантного множества, к которому \mathbf{s} стремится) и тем быстрее сходится $\mathbf{s}(t)$. Следовательно, при достаточно больших значениях ε и k_0 существует малое время t_0 , по истечении которого $\mathbf{s} \approx 0$, т. е. $\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{B}_m \approx 0$.

Далее исследуем поведение ошибки слежения $\mathbf{e}(t)$ при $t \geq t_0$ и найдем матрицу \mathbf{G} . Предположим, с учетом (14), что $\mathbf{u}_s(t) = \mathbf{K}_3 \mathbf{e} + \boldsymbol{\eta}(t)$, где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}(t) = & -\mathbf{K}_3 \mathbf{e} - (\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \mathbf{B}_m)^{-1} \times \\ & \times \left[\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \mathbf{A}_m \mathbf{e} + (\hat{\delta} + \varepsilon) \text{sign}(\mathbf{s}) + k_0 \mathbf{s} \right], \end{aligned}$$

$\mathbf{K}_3 \in \mathfrak{R}^{p \times n}$ – постоянная матрица. Тогда уравнение (16) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) = & (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_3) \mathbf{e}(t) + \mathbf{B}_m \times \\ & \times \left[\boldsymbol{\eta}(t) - \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x}(t) - \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r}(t) - \Lambda \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right] + \xi(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим функцию Ляпунова в квадратичной форме вида $L_3 = \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{e}$. Учитывая (19), ее производная по времени записывается следующим выражением:

$$\begin{aligned} \dot{L}_3 = & \mathbf{e}^T \left[(\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_3)^T \mathbf{G} + \right. \\ & \left. + \mathbf{G} (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_3) \right] \mathbf{e} + \end{aligned}$$

$$+ 2\mathbf{e}^T \mathbf{G} \xi + 2 \left[\boldsymbol{\eta}(t) - \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_1 \mathbf{x}(t) - \Lambda \tilde{\mathbf{K}}_2 \mathbf{r}(t) - \Lambda \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \right]^T \mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \mathbf{e}.$$

При $t \geq t_0$ имеем $\mathbf{B}_m^T \mathbf{G} \mathbf{e} = \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{B}_m \approx 0$, поэтому можно упростить последнее выражение:

$$\begin{aligned} \dot{L}_3 &= \mathbf{e}^T \left[(\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_3)^T \mathbf{G} + \mathbf{G} (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_3) \right] \mathbf{e} + \\ &\quad + 2\mathbf{e}^T \mathbf{G} \xi; \\ \dot{L}_3 &\leq \mathbf{e}^T \left[(\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_3)^T \mathbf{G} + \mathbf{G} (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_3) \right] \mathbf{e} + \\ &\quad + \mu^{-1} \|\mathbf{e}\|^2 + \mu (\lambda_{\max}(\mathbf{G}) \rho)^2, \end{aligned}$$

где $\mu > 0$ – любое положительное число.

Пусть $\Delta_3 = \mu (\lambda_{\max}(\mathbf{G}) \rho)^2$, тогда нетрудно получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \dot{L}_3 &\leq -\beta_3 L_3 + \mathbf{e}^T \left[\beta_3 \mathbf{G} + (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_3)^T \mathbf{G} + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{G} (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_3) + \mu^{-1} \mathbf{E}_n \right] \mathbf{e} + \Delta_3. \end{aligned}$$

где $\beta_3 > 0$ – заданное положительное число.

Если найдутся матрицы \mathbf{K}_3 и \mathbf{G} такие, что

$$\begin{aligned} &\left[\beta_3 \mathbf{G} + (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_3)^T \mathbf{G} + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{G} (\mathbf{A}_m + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_3) + \mu^{-1} \mathbf{E}_n \right] < 0, \end{aligned} \quad (20)$$

то $\dot{L}_3 \leq -\beta_3 L_3 + \Delta_3$, и следовательно,

$$\|\mathbf{e}\| \leq \sqrt{\frac{1}{\lambda_{\min}(\mathbf{G})} \left[\left(L_3(t_0) - \frac{\Delta_3}{\beta_3} \right) e^{-\beta_3 t} + \frac{\Delta_3}{\beta_3} \right]}.$$

Нетрудно заметить, что чем больше β_3 тем меньше $\|\mathbf{e}(t)\|_{L_\infty}$ и тем быстрее сходится $\mathbf{e}(t)$. Таким образом, для уменьшения $\|\mathbf{e}(t)\|_{L_\infty}$ необходимо увеличить значение β_3 в неравенстве (20) и уменьшить значения $\sigma_i, i = \overline{1, 4}$.

Используя метод линейных матричных неравенств [20], решим неравенство (20) для нахождения \mathbf{K}_3 и \mathbf{G} . Сначала необходимо преобразовать (20) к виду линейного матричного неравенства.

Умножив неравенство (20) слева и справа на матрицу $\mathbf{N} = \mathbf{G}^{-1}$, получим следующее неравенство:

$$\begin{aligned} &\left[\beta_3 \mathbf{N} + \mathbf{N} \mathbf{A}_m^T + \mathbf{N} \mathbf{K}_3^T \mathbf{B}_m^T + \mathbf{A}_m \mathbf{N} + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{B}_m \mathbf{K}_3 \mathbf{N} + \mu^{-1} \mathbf{N} \mathbf{E}_n \mathbf{N} \right] < 0. \end{aligned}$$

Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{K}_3 \mathbf{N} \in \mathfrak{R}^{p \times n}$, тогда приведенное выше неравенство преобразует к следующему виду:

$$\begin{aligned} &\left[\beta_3 \mathbf{N} + \mathbf{N} \mathbf{A}_m^T + \mathbf{H}^T \mathbf{B}_m^T + \mathbf{A}_m \mathbf{N} + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{B}_m \mathbf{H} + \mu^{-1} \mathbf{N} \mathbf{E}_n \mathbf{N} \right] < 0, \end{aligned}$$

отсюда, получим следующее линейное матричное неравенство:

$$\begin{bmatrix} \beta_3 \mathbf{N} + \mathbf{N} \mathbf{A}_m^T + \mathbf{H}^T \mathbf{B}_m^T + \mathbf{A}_m \mathbf{N} + \mathbf{B}_m \mathbf{H} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N} & -\mu \mathbf{E}_n \end{bmatrix} < 0.$$

С помощью средства LMI Toolbox в MatLab/Simulink можно найти решение этого неравенства – пару (\mathbf{H}, \mathbf{N}) . Тогда \mathbf{K}_3 и \mathbf{G} вычисляются по формуле $\mathbf{K}_3 = \mathbf{H} \mathbf{N}^{-1}$; $\mathbf{G} = \mathbf{N}^{-1}$. Здесь \mathbf{K}_3 носит лишь вспомогательный характер для нахождения матрицы \mathbf{G} , которая играет важную роль в алгоритме управления. Таким образом, задача компенсации влияния внешних согласованных и несогласованных возмущений решается разработанным алгоритмом адаптивного робастного управления.

Результаты компьютерного моделирования на численном примере. Рассмотрим в качестве численного примера следующую нелинейную систему второго порядка:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{W} \mathbf{f}(\mathbf{x})] + \mathbf{d}(t),$$

где $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{W} = [1.5 \quad -2 \quad 3]$; $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [x_1^2 x_2 \quad x_2 |x_2| \quad x_1^3]^T$; $\mathbf{d}_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 + \sin(4t) \end{bmatrix}$ и $\mathbf{d}_2(t) = \begin{bmatrix} 0.01 + 0.03 \sin(5t + \pi/4) \\ 1.5 + \sin(4t) \end{bmatrix}$ – согласованное и несогласованное внешнее возмущение соответственно.

Эталонная модель выбирается как $\mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -9 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}$.

Для оценки предлагаемых в статье алгоритмов управления сравним эффективности системы управления при использовании следующих алгоритмов с параметров управления:

а) традиционное адаптивное управление с эталонной моделью (Т-ЭМ): $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 200$;
 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}$; $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 139.17 & 2.5 \\ 2.5 & 5.83 \end{bmatrix}$;

б) адаптивное управление с модифицированной эталонной моделью в [17], [18] (М-ЭМ-1):

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 200; \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 10^{-4}; \quad \lambda = 10;$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 139.1667 & 2.5 \\ 2.5 & 5.8333 \end{bmatrix};$$

в) предлагаемое в статье адаптивное робастное управление с модифицированной эталонной моделью (М-ЭМ-2): $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 200; \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 =$

$$= 10^{-4}; \quad \mathbf{K}_e = \begin{bmatrix} 122 & -9.25 \\ -10 & 119.75 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P} = 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 7.5 & 2.5 \\ 2.5 & 7.5 \end{bmatrix};$$

г) предлагаемое в статье адаптивное робастное управление в скользящих режимах с эталонной моделью (М-ЭМ-3): $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 200;$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 10^{-4}; \quad \varepsilon = k_0 = 10^3; \quad \mathbf{G} =$$

$$= \begin{bmatrix} 909.8303 & 3.5054 \\ 3.5054 & 0.0181 \end{bmatrix}.$$

Параметры предлагаемых в статье алгоритмов рассчитываются средством LMI Toolbox в MatLab/Simulink, а параметры алгоритмов а) и б) находятся методом подбора и решением матричного уравнения Ляпунова.

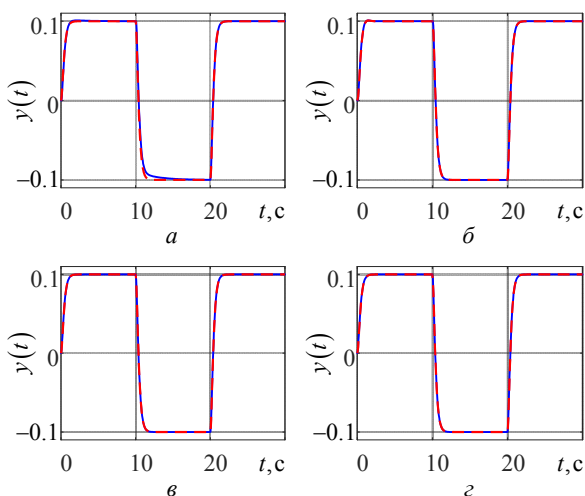


Рис. 1. График выходной переменной при номинальных значениях параметров объекта и $\mathbf{d}(t) = 0$: а – с Т-ЭМ; б – с М-ЭМ-1; в – с М-ЭМ-2; г – с М-ЭМ-3

Fig. 1. Output variable graph at nominal values of object parameters and $\mathbf{d}(t) = 0$: а – with T-RM; б – with M-RM-1; в – with M-RM-2; г – with M-RM-3

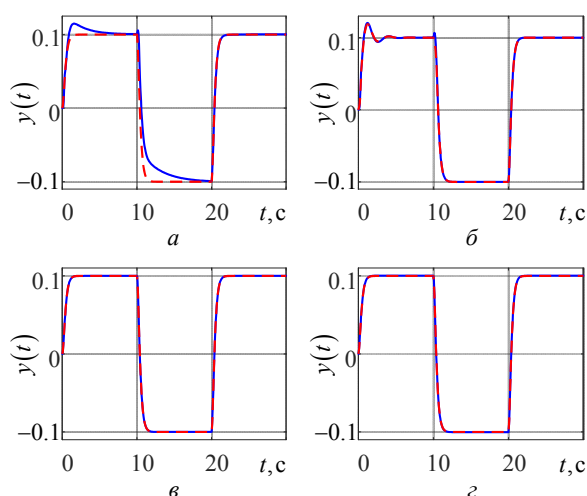


Рис. 2. График выходной переменной при вариации значений параметров объекта и $\mathbf{d}(t) = 0$: а – с Т-ЭМ; б – с М-ЭМ-1; в – с М-ЭМ-2; г – с М-ЭМ-3

Fig. 2. Output variable graph when varying values of object parameters and $\mathbf{d}(t) = 0$: а – with T-RM; б – with M-RM-1; в – with M-RM-2; г – with M-RM-3

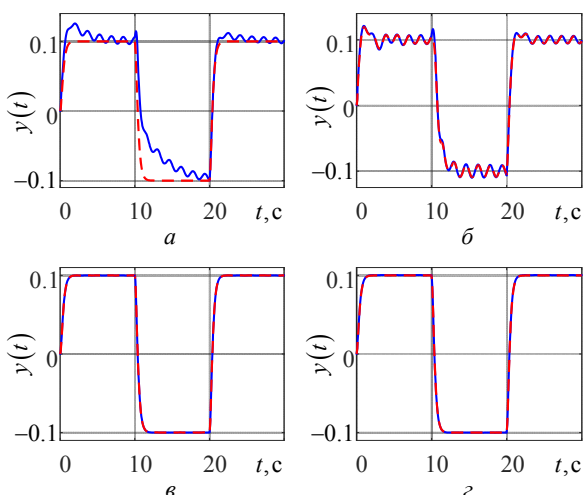


Рис. 3. График выходной переменной при вариации значений параметров объекта и $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_1(t)$: а – с Т-ЭМ; б – с М-ЭМ-1; в – с М-ЭМ-2; г – с М-ЭМ-3

Fig. 3. Output variable graph when varying values of object parameters and $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_1(t)$: а – with T-RM; б – with M-RM-1; в – with M-RM-2; г – with M-RM-3

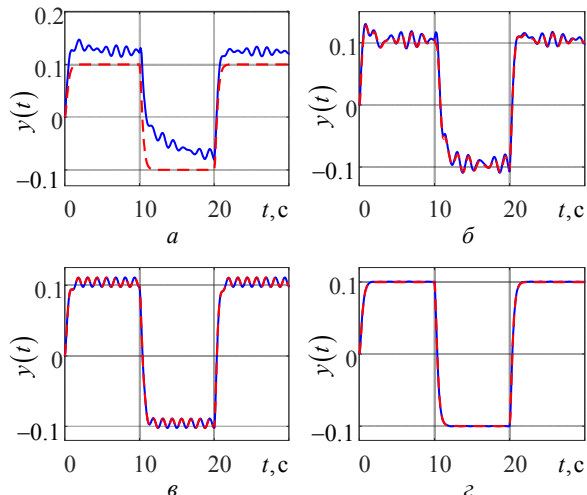


Рис. 4. График выходной переменной при вариации значений параметров объекта и $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_2(t)$: а – с Т-ЭМ; б – с М-ЭМ-1; в – с М-ЭМ-2; г – с М-ЭМ-3

Fig. 4. Output variable graph when varying values of object parameters and $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_2(t)$: а – with T-RM; б – with M-RM-1; в – with M-RM-2; г – with M-RM-3

Рассмотрим 4 случая моделирования в MatLab/Simulink:

– случай 1: при номинальных значениях параметров объекта $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{W} = [1.5 \quad -2 \quad 3]$ и отсутствии внешнего возмущения $\mathbf{d}(t) = 0$ (рис. 1);

– случай 2: при вариации значений параметров объекта $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 30 & 9 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{W} = [3 \quad -4 \quad 6]$ и отсутствии внешнего возмущения $\mathbf{d}(t) = 0$ (рис. 2);

– случай 3: при вариации значений параметров объекта $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 30 & 9 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{W} = [3 \quad -4 \quad 6]$ и наличии согласованного внешнего возмущения $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_1(t)$ (рис. 3);

– случай 4: при вариации значений параметров объекта $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 30 & 9 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{W} = [3 \quad -4 \quad 6]$ и наличии несогласованного внешнего возмущения $\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_2(t)$ (рис. 4).

Результаты компьютерного моделирования представлены на рис. 1–4, где штриховые линии – выходная переменная эталонной модели, сплошные линии – выходная переменная системы.

Из представленных сравнительных результатов нетрудно отметить, что разработанные адаптивные робастные алгоритмы управления в статье показывают высокую эффективность с более высоким качеством управления в сравнении с существующими в литературе алгоритмами, при которых система управления может стать неустойчивой в условиях неопределенности и неизвестных внешних возмущениях. Первый предлагаемый алгоритм работоспособен в условиях неопределенности параметров и согласованных возмущений (рис. 1–3), однако он не может устранить влияние несогласованных возмущений на систему (рис. 4). В таких случаях второй предлагаемый алгоритм демонстрирует хорошую работоспособность (рис. 1–4), вполне справляясь с задачей компенсации влияния неопределенности параметров и неизвестных внешних возмущений. Таким образом, результаты моделирования согласуются с теоретическим анализом.

Заключение. В статье рассмотрены вопросы подавления влияния на нелинейные системы неопределенностей в модели и неизвестных внешних возмущений, согласованных или несогласованных с управляющими сигналами.

1. Предложены два модифицированных алгоритма адаптивного робастного управления с эталонной моделью для нелинейных объектов при действии неопределенности и неизвестных возмущений:

– алгоритм адаптивного робастного управления с модифицированной эталонной моделью;

– алгоритм адаптивного робастного управления в скользящих режимах с эталонной моделью.

2. Первый алгоритм эффективен для управления в условиях неопределенных параметров системы и согласованных внешних возмущений. Однако при действии несогласованных внешних возмущений качество управления заметно снижается из-за искажения формы переходного процесса переменных состояния модифицированной эталонной модели. Второй алгоритм работоспособен не только при вышеупомянутых условиях, но и при действии несогласованных внешних возмущений. Параметры разработанных алгоритмов управления вычисляются с помощью эффективного метода линейных матричных неравенств при задании скорости сходимости (α_2 и β_3) для уменьшения ошибки слежения и размера наибольшего инвариантного множества, к которому сходятся все сигналы системы. Использование этого метода для расчета параметров системы обеспечивает ее устойчивость по проектированию и более высокое качество управления в сравнении с методом подбора параметров.

3. Методом функций Ляпунова доказано, что разработанные адаптивные робастные алгоритмы управления обеспечивают ограничение всех сигналов системы и их экспоненциальную сходимость к наибольшему инвариантному множеству, размер которого и скорость сходимости можно регулировать при расчете параметров управления методом линейных матричных неравенств.

4. Для проверки работоспособности созданных алгоритмов представлено моделирование на численном примере синтеза управления нелинейной системой второго порядка. Результаты моделирования подтверждают обоснованность теоретического анализа и эффективность предлагаемых в статье адаптивных робастных алгоритмов управления.

Список литературы

1. Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А. Адаптивное управление динамическими объектами. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. Фрадков А. Л. Адаптивное управление в сложных системах. Беспоиcковые методы. М.: Наука, 1990. 292 с.
3. Narendra K. S., Annaswamy A. M. Stable adaptive systems. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989. 494 p.
4. Andrievsky B. R., Fradkov A. L. Speed gradient method and its applications // Automation and Remote Control. 2021. Vol. 82, no. 9. P. 1463–1518. doi: 10.1134/S0005117921090010.
5. Ioannou P. A., Jing Sun. Robust adaptive control. New Jersey: Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996. 825 p.
6. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V. Non-linear and adaptive control design. New York: John Wiley & Sons, 1995. 592 p.
7. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V. Adaptive nonlinear control without overparametrization // Syst. & Control Lett. 1992. Vol. 19, no. 3. P. 177–185. doi: 10.1016/0167-6911(92)90111-5.
8. Command filtered adaptive backstepping / W. Dong, J. A. Farrell, M. M. Polycarpou, V. Djapic, M. Sharma // IEEE Trans. on Control Systems Technol. 2012. Vol. 20, no. 3. P. 566–580. doi: 10.1109/TCST.2011.2121907.
9. Huang Y. J., Kuo T. C., Chang S. H. Adaptive sliding-mode control for nonlinear systems with uncertain parameters // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics). 2008. Vol. 38, no. 2. P. 534–539. doi: 10.1109/TSMCB.2007.910740.
10. Adaptive sliding mode control for a robotic manipulator with unknown friction and unknown control direction / Seung-Hun Han, Manh Son Tran, Duc-Thien Tran // Appl. Sci. 2021. Vol. 11, no. 9. P. 1–14. doi: 10.3390/app11093919.
11. Edwards C., Shtessel Y. Enhanced continuous higher order sliding mode control with adaptation // J. of the Franklin Institute. 2019. Vol. 356, no. 9. P. 4773–4784. doi: 10.1016/j.jfranklin.2018.12.026.
12. Lavretsky E., Wise K. A. Robust and adaptive control with aerospace applications. London: Springer-Verlag London, 2012. 454 p.
13. Nguyen N. T. Model-reference adaptive control: A Primer. Cham: Springer International Publishing, 2018. 444 p.
14. Patino H. D., Liu D. Neural network-based model reference adaptive control system // IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Part B (Cybernetics). 2000. Vol. 30, no. 1. P. 198–204. doi: 10.1109/3477.826961.
15. A neuroadaptive architecture for model reference control of uncertain dynamical systems with performance guarantees / E. Arabi, T. Yucelen, B. C. Gruenwald, M. L. Fravolini, S. N. Balakrishnan, N. T. Nguyen // Systems & Control Lett. 2019. Vol. 125. P. 37–44. doi: 10.1016/j.sysconle.2019.01.005.
16. Mohammad J. M., Mohammad M. S., Nahid N. An optimal MRAC–ASMC scheme for robot manipulators based on the artificial bee colony algorithm // Trans. of the Canadian Soc. for Mechan. Engin. 2021. Vol. 45, no. 3. P. 487–495. doi: 10.1139/tcsme-2019-0228.
17. Stepanyan V., Krishnakumar K. M-MRAC for nonlinear systems with bounded disturbances // 50th IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conf. Orlando, FL, USA: IEEE, 2011. P. 5419–5424. doi: 10.1109/CDC.2011.6161416.
18. Stepanyan V., Krishnakumar K. Input and output performance of M-MRAC in the presence of bounded disturbances // AIAA Guidance, Navigation and Control Conf. Toronto, Ontario, Canada: AIAA, 2010. P. 1–21. doi: 10.2514/6.2010-7688.
19. Chen J., Wang J., Wang W. Robust adaptive control for nonlinear aircraft system with uncertainties // Appl. Sci. 2020. Vol. 10, no. 12. P. 1–16. doi: 10.3390/app10124270.
20. Поляк Б. Т., Хлебников М. В., Щербаков П. С. Управление линейными системами при внешних возмущениях: Техника линейных матричных неравенств. М.: Ленанд, 2014. 560 с.
21. Aydin M. N., Coban R. LMI-Based sliding mode control design and experimental application to an electromechanical plant // 2019 6th Intern. Conf. on Electr. and Electronics Engin. (ICEEE). Istanbul, Turkey: IEEE, 2019. P. 69–72. doi: 10.1109/ICEEE2019.2019.00021.

Информация об авторах

Нгуен Зуи Хань – аспирант, ассистент кафедры систем автоматического управления СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: kxanhnguyen.mta@gmail.com

Путов Виктор Владимирович – д-р техн. наук, профессор, зам. зав. кафедрой систем автоматического управления по развитию СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: vvputov@mail.ru

Шелудько Виктор Николаевич – д-р техн. наук, профессор кафедры систем автоматического управления, ректор СПбГЭТУ «ЛЭТИ».

E-mail: vnsheludko@etu.ru

References

1. Fomin V. N., Fradkov A. L., Jakubovich V. A. *Adaptivnoe upravlenie dinamicheskimi ob#ektami*. M.: Nauka, 1981. 448 s. (In Russ.)
2. Fradkov A. L. *Adaptivnoe upravlenie v slozhnykh sistemakh. Bespoiskovyete metody*. M.: Nauka, 1990. 292 s. (In Russ.)
3. Narendra K. S., Annaswamy A. M. *Stable adaptive systems*. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989. 494 p.
4. Andrievsky B. R., Fradkov A. L. Speed gradient method and its applications // *Automation and Remote Control*. 2021. Vol. 82, no. 9. P. 1463–1518. doi: 10.1134/S0005117921090010.
5. Ioannou P. A., Jing Sun. *Robust adaptive control*. New Jersey: Prentice-Hall, Upper Saddle River, 1996. 825 p.
6. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V. *Non-linear and adaptive control design*. New York: John Wiley & Sons, 1995. 592 p.
7. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotovic P. V. Adaptive nonlinear control without overparametrization // *Syst. & Control Lett.* 1992. Vol. 19, no. 3. P. 177–185. doi: 10.1016/0167-6911(92)90111-5.
8. Command filtered adaptive backstepping / W. Dong, J. A. Farrell, M. M. Polycarpou, V. Djapic, M. Sharma // *IEEE Trans. on Control Systems Technol.* 2012. Vol. 20, no. 3. P. 566–580. doi: 10.1109/TCST.2011.2121907.
9. Huang Y. J., Kuo T. C., Chang S. H. Adaptive sliding-mode control for nonlinear systems with uncertain parameters // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*. 2008. Vol. 38, no. 2. P. 534–539. doi: 10.1109/TSMCB.2007.910740.
10. Adaptive sliding mode control for a robotic manipulator with unknown friction and unknown control direction / Seung-Hun Han, Manh Son Tran, Duc-Thien Tran // *Appl. Sci.* 2021. Vol. 11, no. 9. P. 1–14. doi: 10.3390/app11093919.
11. Edwards C., Shtessel Y. Enhanced continuous higher order sliding mode control with adaptation // *J. of the Franklin Institute*. 2019. Vol. 356, no. 9. P. 4773–4784. doi: 10.1016/j.jfranklin.2018.12.026.
12. Lavretsky E., Wise K. A. *Robust and adaptive control with aerospace applications*. London: Springer-Verlag London, 2012. 454 p.
13. Nguyen N. T. *Model-reference adaptive control: A Primer*. Cham: Springer International Publishing, 2018. 444 p.
14. Patino H. D., Liu D. Neural network-based model reference adaptive control system // *IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*. 2000. Vol. 30, no. 1. P. 198–204. doi: 10.1109/3477.826961.
15. A neuroadaptive architecture for model reference control of uncertain dynamical systems with performance guarantees / E. Arabi, T. Yucelen, B. C. Gruenwald, M. L. Fravolini, S. N. Balakrishnan, N. T. Nguyen // *Systems & Control Lett.* 2019. Vol. 125. P. 37–44. doi: 10.1016/j.sysconle.2019.01.005.
16. Mohammad J. M., Mohammad M. S., Nahid N. An optimal MRAC-ASMC scheme for robot manipulators based on the artificial bee colony algorithm // *Trans. of the Canadian Soc. for Mechan. Engin.* 2021. Vol. 45, no. 3. P. 487–495. doi: 10.1139/tcsme-2019-0228.
17. Stepanyan V., Krishnakumar K. M-MRAC for nonlinear systems with bounded disturbances // *50th IEEE Conf. on Decision and Control and European Control Conf. Orlando, FL, USA: IEEE, 2011. P. 5419–5424. doi: 10.1109/CDC.2011.6161416.*
18. Stepanyan V., Krishnakumar K. Input and output performance of M-MRAC in the presence of bounded disturbances // *AIAA Guidance, Navigation and Control Conf. Toronto, Ontario, Canada: AIAA, 2010. P. 1–21. doi: 10.2514/6.2010-7688.*
19. Chen J., Wang J., Wang W. Robust adaptive control for nonlinear aircraft system with uncertainties // *Appl. Sci.* 2020. Vol. 10, no. 12. P. 1–16. doi: 10.3390/app10124270.
20. Poljak B. T., Hlebnikov M. V., Shherbakov P. S. *Upravlenie linejnymi sistemami pri vneshnih vozmushhenijah: Tehnika linejnykh matrichnykh neravenstv*. M.: Lenand, 2014. 560 s. (In Russ.)
21. Aydin M. N., Coban R. LMI-Based sliding mode control design and experimental application to an electromechanical plant // *2019 6th Intern. Conf. on Electr. and Electronics Engin. (ICEEE)*. Istanbul, Turkey: IEEE, 2019. P. 69–72. doi: 10.1109/ICEEE2019.2019.00021.

Information about the authors

Duy Khanh Nguyen – postgraduate student, Assistant of the Department of Automatic Control Systems, Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: kxanhnguyen.mta@gmail.com

Victor V. Putov – Dr Sci. (Eng.), Professor, Deputy Head of the Department of Automatic Control Systems for Development, Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: vvputov@mail.ru

Victor N. Sheludko – Dr Sci. (Eng.), Professor of the Department of Automatic Control Systems, Rector of Saint Petersburg Electrotechnical University.
E-mail: vnscheludko@etu.ru

Статья поступила в редакцию 10.10.2024; принята к публикации после рецензирования 11.12.2024; опубликована онлайн 28.02.2025.

Submitted 10.10.2024; accepted 11.12.2024; published online 28.02.2025.
