УДК 621.3.01 Научная статья

https://doi.org/10.32603/2071-8985-2022-15-2-58-66

Численный расчет неавтономных динамических моделей с нелинейностями в виде нестепенных элементарных функций

Ю. А. Бычков, Е. Б. Соловьева✉, С. В. Щербаков

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина), Санкт-Петербург, Россия

✉ selenab1@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрен метод численного расчета динамических моделей с нелинейностями, описываемыми нестепенными элементарными функциями. Проанализированы вычислительные трудности в случае применения степенных рядов. Для преодоления вычислительных трудностей предложена конструктивная процедура, базирующаяся на разработанном авторами аналитически-численном методе анализа. Численная процедура применима для моделей, описываемых системой нелинейных дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши. Предложенная процедура, сохраняя все преимущества аппарата степенных рядов, исключает необходимость построения композиций степенных рядов и специальных оценок, а также повышает уровень формализации расчета динамических моделей с нестепенными нелинейностями. В предложенной численной процедуре используются готовые оценки искомых решений и определяются границы одномерных областей точных решений с целью их приведения к неизвестным точным решениям. Достоинства процедуры описаны при расчете нелинейной автономной динамической модели типа «маятник с затуханием».

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, математическая модель, нелинейное дифференциальное уравнение, аналитически-численный метод

Для цитирования: Бычков Ю. А., Соловьева Е. Б., Щербаков С. В. Численный расчет неавтономных динамических моделей с нелинейностями в виде нестепенных элементарных функций // Изв. СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2022. Т. 15, № 2. С. 58–66. doi: 10.32603/2071-8985-2022-15-2-58-66.

Original article

Numerical calculation of non-autonomous dynamic models with nonlinearities in the form of non-power elemental functions

Yu. A. Bychkov, E. B. Solovyeva✉, S. V. Scherbakov

Saint Petersburg Electrotechnical University, Saint Petersburg, Russia

✉ selenab1@yandex.ru

Abstract. The numerical calculation method of dynamic models with nonlinearities described by elementary non-power functions is represented. The computational difficulties in applying power series are analyzed. To overcome computational difficulties, a constructive procedure based on the analytical-numerical method of analysis developed by the authors is proposed. The numerical procedure is applicable to the models described by a system of nonlinear differential equations in the normal form of Cauchy. The proposed procedure, while preserving all the advantages of the power-series apparatus, eliminates the necessity for constructing the power-series compositions and special estimates, as well as raises the formalization of dynamic model calculations with non-power nonlinearities. The proposed numerical procedure uses the evaluations of the desired solutions and manages the boundaries of one-dimensional domains of exact solutions in order to bring them to unknown exact solutions. The advantages of the procedure are highlighted during the calculation of nonlinear autonomous dynamic model of the type «damped pendulum».

Keywords: nonlinear dynamic system, mathematical model, nonlinear differential equation, analytical-numerical method

For citation: Bychkov Yu. A., Solovyeva E. B., Scherbakov S. V. Numerical Calculation of Non-Autonomous Dynamic Models with Nonlinearities in the Form of Non-Power Elemental Functions. // LETI Transactions on Electrical Engineering & Computer Science. 2022. Vol. 15, no. 2. P. 58–66. doi: 10.32603/2071-8985-2022-15-2-58-66.

Введение. Разработка проблемно-ориентированных способов расчета детерминированных нелинейных неавтономных динамических моделей обусловлена совершенствованием вычислительных технологий и расширением области применения метода математического моделирования [1]–[4]. Формирование динамических моделей различных по физической природе сложных многосвязных систем нередко сопряжено с включением в нелинейную часть описания модели элементарных функций. Эти элементарные функции, как правило нестепенные, определяют нелинейные части детерминированных динамических моделей. Их аргументами служат искомые решения. К таким моделям в различных отраслях знания относятся, например, «переход Джозефсона» и «маятник с затуханием» [1], [4], [5]. Задача расчета динамических моделей, описания нелинейных частей которых содержат нестепенные элементарные функции, обладает особенностями, которые требуют корректировок стандартных расчетных схем используемых численных методов [6]–[8].

В расчетных схемах анализа нелинейной динамики широко используют функциональные ряды, наиболее известные среди них – степенные [7], [9]–[13]. Применение степенных рядов для расчета динамики нелинейной модели отличается рядом вычислительных преимуществ [14]–[18].

Во-первых, известные в каждом интервале пошагового расчета коэффициенты степенного ряда для регулярной составляющей искомого решения позволяют, исследуя его сходимость, вычислить ее радиус, что дает ответ на вопрос о существовании этой составляющей искомого решения. Устанавливая по независимой переменной моделирования t протяженность интервала, в котором при заданных предначальных условиях существует регулярная составляющая искомого решения, значение радиуса сходимости одновременно позволяет выделить существующие разрывы второго рода [1], [9], [10].

Во-вторых, степенные ряды обеспечивают эквивалентное приведение описания нелинейной части модели к унифицированной форме в виде обобщенного степенного ряда. Такая унификация дает возможность применения в расчетной схеме обобщенного интегрального преобразования Лапласа. Это определяет в каждом интервале расчета корректный переход от известных приближенных значений предначальных условий к приближенным значениям начальных условий, выделяя существующие в искомых решениях разрывы первого рода [5], [9], [10].

В-третьих, степенные ряды позволяют формализовать разработку необходимой для результативного анализа нелинейной динамики оценки возникающих и накапливаемых в ходе расчета погрешностей приближенных значений решений [9], [11].

При описаниях нестепенных нелинейных частей динамических моделей использование функциональных степенных рядов влечет следующие вычислительные трудности.

- В случае, когда степенной ряд регулярной составляющей искомого решения становится независимой переменной другого степенного ряда, это значительно усложняет формирование коэффициентов композиций степенных рядов и исследование их сходимости.
- Привлечение в расчетную схему метода композиций степенных рядов требует соответствующих математических преобразований, что снижает уровень его унификации и формализации [9], [11].
- Вынужденное ограничение на каждом шаге расчета степенных рядов, составляющих композицию, их частичными суммами качественно меняет уровень сложности оценки возникающих погрешностей, инициируя новые математические построения [9]–[11].

Для преодоления этих трудностей при расчете с использованием степенных рядов нелинейных неавтономных динамических моделей, содержащих нестепенные нелинейные части, предлагаем следующую вычислительную процедуру. Она применима к нелинейным неавтономным динамическим моделям, описания которых допускают изначальное формирование в нормальной форме Коши либо эквивалентное приведение к этой форме [1], [2], [10], [11]. Для определенности в качестве вычислительного базиса предлагаемой процедуры выбран аналитически-численный метод, расчетная схема которого основана на применении степенных рядов [9].

Вычислительная процедура аналитически-численного метода для расчета нелинейной динамической модели. Рассматриваем нелинейные неавтономные динамические модели, описание нелинейных частей которых содержат элементарные функции. Аргументом этих функций служит искомое решение, динамика модели представлена в области независимой переменной моделирования *t*. Получим:

$$\dot{x}_r(t) = \varphi_r\left(x_1(t), x_2(t), ..., x_{L_x}(t), t\right);\qquad \dot{t} = 1, \tag{1}$$

где «·» – знак дифференцирования по переменной времени *t*; $\varphi_r\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{L_x}(t), t\right)$ – функции, содержащие суммы членов, образованных произведениями искомых решений $x_r(t)$, $r = 1, 2, \ldots, L_x$, нестационарных параметров, внешних воздействий модели и нестепенных элементарных функций, аргументом которых служит искомое решение $x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$, в произвольных дробно-рациональных степенях.

Предначальные условия $x_r^+(0^-)$, $r = 1, 2, \ldots, L_x$, $0^- = t_0^-$ для расчета нелинейной динамики модели (1) заданы.

Решение поставленной задачи сводится к следующему. На основе исходной системы дифференциальных уравнений (1) формируем сопряженную ей систему дифференциальных уравнений относительно новой независимой переменной моделирования $x = x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$. В ее качестве выступает искомое решение $x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$ системы (1), которое является аргументом элементарных функций, входящих в нелинейную часть этой системы уравнений. Исходно предполагаем отсутствие сингулярной составляющей в этом искомом решении. Сформированная согласно процедуре, приведенной в [12], [13], сопряженная система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{dx_r}{dx} = \varphi_r\left(x_1(t)(t), x_2(t), \ldots, x_{l-1}(x),\right.\\ \left. x_{l+1}(x), \ldots, x_{L_x}(t), t(x), x\right) \Big/ \varphi_l\left(x_1(t), x_2(t), \ldots,\right.\\ \left. x_{l-1}(x), x_{l+1}(x), \ldots, x_{L_x}(t), t(x), x\right);\\ \frac{dt}{dx} = 1\Big/\varphi_l\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_{l-1}(x),\right.\\ \left. x_{l+1}(x), \ldots, x_{L_x}(t), t(x), x\right);\\ x' = \mp 1.\end{gathered} \tag{2}$$

Предначальные условия для сопряженной системы уравнений (2) относительно новой независимой переменной моделирования $x = x_l(t)$ с учетом обозначений, определяющих расчетную схему аналитически-численного метода, имеют следующие показатели: $x_r^+\left(x_{k-1}^{(-)}\right) = x_r^+(0^-)$; $x_{k-1}^+ = x_l^+(t_{k-1})$; $t\left(x_{k-1}^{(-)}\right) = t_{k-1}$; $0^- = t_{k-1}^-$; $k \in [1, K]$, K – число временных отсчетов; $r = 1, 2, ..., l-1, l+1, ..., L_x$ [9].

Двойной знак в правой части последнего из уравнений (2) указывает на то, что всегда положительному шагу расчета *h* по исходной независимой переменной моделирования *t* исследуемой нелинейно неавтономной динамической модели (1) может соответствовать как положительное, так и отрицательное приращение новой независимой переменной $x = x_l(t)$ сопряженной системы уравнений (2). Правило, определяющее выбор этого знака, таково. Заданные для первого интервала расчета точные значения или полученные для последующих интервалов расчета $\left[0^+; 0^+ + \tau\right]$, $0^+ = t_{k-1}^+$ приближенные значения предначальных условий определяют выполнение следующего неравенства:

$$\varphi_l\left(x_1^+(t), x_2^+(t), \ldots, x_{L_x}^+(t), t\right) > 0. \tag{3}$$

В этом случае в последнем из дифференциальных уравнений (2) выбираем знак «+».

Предначальные условия определяют выполнение следующего условия:

$$\varphi_l\left(x_1^+(t), x_2^+(t), \ldots, x_{L_x}^+(t), t\right) < 0. \tag{4}$$

В этом случае в последнем из уравнений (2) выбираем знак «–».

В результате перехода к новой независимой переменной моделирования $x = x_l(t)$ достигнута направленная трансформация описания нелинейной части, внешних воздействий и нестационарных параметров исследуемой нелинейной неавтономной динамической модели (1). В итоге в системе нелинейных дифференциальных уравнений (2) ее нелинейную часть, параметры и внешние воздействия относительно независимой переменной $x = x_l(t)$ описывают исключительно степенные функции.

Сформированная система нелинейных дифференциальных уравнений (2) относительно новой независимой переменной моделирования $x = x_l(t)$ образует описание нелинейной динамической модели с невыделенной линейной частью, однозначно соответствующей исследуемой динамической модели (1). Преобразовав систему (2) в соответствии с аналитической частью аналитически-численного метода, в текущем интервале расчета для описания регулярных составляющих ее решений $x_r(t)$, $t(x)$ получим следующие степенные ряды [9]:

$$x_r^+(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{r.i}\, x^i / i!;$$
$$t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{ti}\, x^i / i!, \tag{5}$$

где $P_{r.i}$, $r = 1, 2, ..., l-1, l+1, ..., L_x$ и P_{ti} – коэффициенты разложения в правых полуокрестностях точек с абсциссой $x = x_{k-1} = x_l^+(0^-)$, $0^- = t_{k-1}^-$, $l \in [1; L_x]$ регулярных составляющих искомых решений в степенные ряды, вычисляемые с учетом знака в правой части последнего из уравнений (2) по формулам, приведенным в [9]; i – i-й член степенного ряда в (5).

Составив для описания регулярных составляющих искомых решений сопряженной системы дифференциальных уравнений (2) степенные ряды (5), в дискретный момент времени начала текущего интервала расчета $[0^+; 0^+ + \tau]$, $0^+ = t_{k-1}^+$, в интервале сходимости этих степенных рядов получим следующую обобщенную каноническую форму описания этой сопряженной системы уравнений [9]:

$$\frac{dx_r^+(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{\infty} P_{r.i}\, x^{i-1} / (i-1)!;$$
$$\frac{dt(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{\infty} P_{t\,i}\, x^{i-1} / (i-1)!; \tag{6}$$
$$x' = \mp 1,$$
$$x_r^+\left(x_{k-1}^+\right) = P_{r.0}; \quad t\left(x_{k-1}^+\right) = P_{t\,0} = t_{k-1}$$

Приведение (2) к обобщенной канонической форме описания (6) сопровождают два существенных результата: переход при взаимосвязанных значениях новой и исходной независимых переменных $x = x_{k-1} = x_l^+(0^-)$, $0^- = t_{k-1}^-$ от предначальных условий к начальным; разложение регулярных составляющих решений $x_r(x)$, $t(x)$, $x = x_l^+(t)$, $l \in [1; L_x]$ в сходящиеся степенные ряды (5). Для полученных при таком переходе значений начальных условий, точных для первого интервала расчета и приближенных для всех последующих, необходимо проверить выполнение неравенств (3), (4). Если в результате проверки необходимо сменить знак в правой части последнего из дифференциальных уравнений (2), то, сменив знак, повторяем вычисления коэффициентов степенных рядов (5).

Используя обобщенную каноническую форму (6), формируем сопряженную ей систему дифференциальных уравнений относительно исходной независимой переменной моделирования t [12], [13]. Сформированная в соответствии с правилами проведения операций над степенными рядами такая сопряженная система дифференциальных уравнений имеет следующий вид [10]:

$$\dot{x}_r^+(t) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} P_{r.i}\, x^{i-1} / (i-1)!\right]\left[\sum_{i=1}^{\infty} P_{t\,i}\, x^{i-1} / (i-1)!\right]^{-1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} R_{r.i}\, t^{i-1} / (i-1)!;$$
$$\dot{x}_l^+(t) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} P_{t\,i}\, x^{i-1} / (i-1)!\right]^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} R_{l.i}\, t^{i-1} / (i-1)!;$$
$$\dot{t} = 1, \tag{7}$$
$$x_r^+\left(t_{k-1}^+\right) = R_{r.0} = P_{r.0}, \quad t_{k-1} = P_{t\,0};$$
$$x_l^+\left(t_{k-1}^+\right) = R_{l.0} = x_l^+\left(t_{k-1}^-\right) = x_{k-1};$$
$$r = 1, 2, ..., l-1, l+1, ..., L_x, \;\; l \in [1; L_x].$$

Система дифференциальных уравнений (7) образует обобщенную каноническую форму описания в текущем интервале расчета $[0^+; 0^+ + \tau]$, $0^+ = t_{k-1}^+$ исследуемой нелинейной неавтономной динамической модели (1), нелинейные свойства которой описывают нестепенные элементарные функции. Решениями системы уравнений (7) в текущем интервале расчета $[0^+; 0^+ + \tau]$, $0^+ = t_{k-1}^+$ служат следующие степенные ряды:

$$x_r^+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{r.i}\, t^i / i!, \quad r = 1, 2, \ldots, L_x. \tag{8}$$

Степенные ряды (8) в текущем интервале расчета $\left[0^+; 0^+ + \tau\right]$, $0^+ = t_{k-1}^+$ описывают регулярные составляющие искомых решений системы дифференциальных уравнений (1), нелинейная часть которой содержит нестепенные элементарные функции. Такой результат полностью аналогичен результату применения стандартной процедуры аналитической части аналитически-численного метода в отношении нелинейных неавтономных динамических моделей со степенными нелинейными частями [9]. Последующая численная часть аналитически-численного метода, включая оценку погрешностей расчета, аналогична штатной расчетной схеме метода.

Результатом применения описанной процедуры на текущем шаге расчета $h = h_k$ служат сформированные по расчетной схеме аналитически-численного метода одномерные области, заключенные в двойные неравенства и содержащие неизвестные точные значения $x_r^+(t_k)$, $r = 1, 2, \ldots, L_x$, $t_k = t_{k-1} + h_k$ регулярных составляющих решений $x_r^+(t)$ системы нелинейных дифференциальных уравнений (1).

Предложенная процедура, сохраняя все преимущества аппарата степенных рядов, исключает необходимость использования композиций степенных рядов и разработки специальных оценок. Достигнутый результат повышает степень формализации расчета нелинейной динамики при функциональных нестепенных нелинейностях в описаниях динамических моделей.

Расчет нелинейной автономной динамической модели типа «маятник с затуханием». Рассмотрим расчет нелинейной автономной динамической модели «маятник с затуханием» [11]. Исследуемой нелинейной автономной динамической модели отвечает нелинейная электрическая цепь, изображенная на рис. 1.

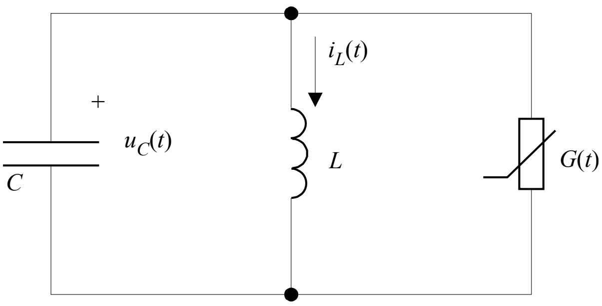

Рис. 1. Электрическая цепь для нелинейной автономной динамической модели типа «маятник с затуханием»
Fig. 1. Electrical circuit for nonlinear autonomous dynamic model of the type «damped pendulum»

Параметры цепи в относительных единицах таковы: $G(t) = G_0 + \left(\sin i_L(t) - i_L(t)\right)/u_C(t)$, $L = 1$, $C = 1$, $G_0 = 0.4$. Предначальные условия: $i_L^+(0^-) = 3$, $u_C^+(0^-) = 2$, $0^- = t_0^-$, $t_0 = 0$.

Электрическую цепь, изображенную на рис. 1, в канонической форме (1) описывает следующая система нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{du_C}{dt} = C^{-1}\left[-G_0\, u_C(t) - \sin i_L(t)\right];$$
$$\frac{di_L}{dt} = L^{-1}\, u_C(t); \qquad (9)$$
$$\dot{t} = 1,$$

Нелинейная часть сформированной системы (9) содержит синусоидальную функцию, аргумент которой – искомое решение $i_L(t)$. Качественная особенность искомых решений системы нелинейных дифференциальных уравнений (9) состоит в том, что образуемая ими фазовая плоскость вследствие бесконечного числа положений равновесия содержит «бассейны притяжения» и «бассейны отталкивания». Это обусловливает необходимость применения для расчета моделей подобного рода численных методов, которые имеют «достаточно совершенную схему контроля погрешностей» [11].

Для решения поставленной задачи, согласно предложенной процедуре, сначала необходимо сформировать систему дифференциальных уравнений (2), сопряженную системе дифференциальных уравнений (9). В качестве новой независимой переменной моделирования x следует рассматривать регулярную составляющую $i_L^+(t)$ искомого решения $i_L(t)$ исходной системы уравнений (9), которая является аргументом синусоидальной функции, определяющей нелинейную часть этой системы уравнений. На первом шаге расчета сопряженная система уравнений относительно новой независимой переменной моделирования $x = i_L^+(t)$ имеет следующий вид:

$$\frac{du_C}{dx} = \frac{L}{C}\left[-G_0 - \frac{\sin x}{u_C(x)}\right];$$
$$\frac{dt}{dx} = \frac{L}{u_C(x)}; \qquad (10)$$
$$x' = 1,$$

где $x_0 = x(0^-) = i_L^+(0^-) = 3$, $u_C^+(x_0^-) = u_C^+(0^-) = 2$, $t(x_0^-) = t_0 = 0$.

Знак «+» в третьем из уравнений (10) обусловлен тем, что при заданных предначальных условиях для функции в правой части второго из уравнений (9) выполняется неравенство (3). Преобразовав сформированную систему дифференциальных уравнений (10) в соответствии с аналитической частью аналитически-численного метода, в форме (5) получили следующее описание ее искомых решений:

$$u_C^+(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i\, x^i / i!;$$
$$t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} P_{t\,i}\, x^i / i!, \tag{11}$$

где

$$P_0 = u_C^+(x_0^-),\;\; P_1 = LC^{-1}\left[-G_0 - \sin x \big/ u_C^+\left(x_0^-\right)\right],$$
$$P_2 = LC^{-1}\left\{-\cos x \big/ u_C^+\left(x_0^-\right) + LC^{-1}\left[-G_0 -\right.\right.$$
$$\left.\left. - \sin x \big/ u_C^+\left(x_0^-\right)\right] \sin x \Big/ \left[u_C^+\left(x_0^-\right)\right]^2\right\}, \ldots,$$
$$P_{t0} = t(x_0^-),\;\; P_{t1} = L \big/ u_C^+(x_0^-), \ldots$$

Приведенные в экспликации к равенствам (11) соотношения определяют переход от заданных значений предначальных условий $u_C^+\left(x_0^-\right) = u_C^+\left(i_L^+(0^-)\right)$, $t\left(x_0^-\right) = t\left(i_L^+(0^-)\right)$ к значениям начальных условий $u_C^+\left(x_0^+\right) = P_0$, $t\left(x_0^+\right) = P_{t0}$. Полученная на основе степенных рядов (11) обобщенная каноническая форма описания сопряженной системы уравнений (10) в форме (6) имеет следующий вид:

$$\frac{du_C^+(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{\infty} P_i\, x^{i-1} \big/ (i-1)!;$$
$$\frac{dt(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{\infty} P_{t\,i}\, x^{i-1} \big/ (i-1)!; \tag{12}$$
$$x' = 1,$$

где $x_0 = x(0^-) = i_L^+(0^-)$, $u_C^+\left(x^+\right) = P_0$, $t\left(x^+\right) = P_{t0}$.

Система дифференциальных уравнений, сопряженная системе (12) относительно исходной независимой переменной моделирования t, в форме (7) имеет следующее описание:

$$\frac{du_C^+(t)}{dt} = \left[\sum_{i=1}^{\infty} P_i\, x^{i-1} \big/ (i-1)!\right]\left[\sum_{i=1}^{\infty} P_{ti}\, x^{i-1} \big/ (i-1)!\right]^{-1} =$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} P_{1.i}\, t^{i-1} \big/ (i-1)!;$$
$$\frac{di_L^+(t)}{dt} = \left[\sum_{i=1}^{\infty} P_{ti}\, x^{i-1} \big/ (i-1)!\right]^{-1} = \tag{13}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} P_{2.i}\, t^{i-1} \big/ (i-1)!;$$
$$\dot{t} = 1.$$

Полученная система дифференциальных уравнений с унифицированными соответствующими степенными рядами правыми частями представляет обобщенную каноническую форму описания в текущем интервале расчета $\left[0^+; 0^+ + \tau\right]$, $0^+ = t_{k-1}^+$, $k = 1$ исходной системы нелинейных автономных дифференциальных уравнений (9); τ – длительность текущего интервала расчета. При выборе шага расчета, не превышающем радиусов сходимости степенных рядов в правых частях первых двух дифференциальных уравнений (13), в текущем интервале расчета $\left[0^+; 0^+ + \tau\right]$, $0^+ = t_{k-1}^+$, $k = 1$ эти ряды сходятся к разложенным в них функциям, поэтому искомые решения системы нелинейных автономных дифференциальных уравнений (9) приобретают следующее описание:

$$u_C(t) = u_C^+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{1.i}\, t^i / i!;$$
$$i_L(t) = i_L^+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{2.i}\, t^i / i!, \tag{14}$$

где

$$t_0 = 0^+,\;\; R_{1.0} = P_0 = u_C^+(0^+) = u_C^+(0^-),$$
$$R_{1.1} = C^{-1}\left[-G_0 R_{2.0} - \sin R_{1.0}\right],$$
$$R_{1.2} = C^{-1}\left[P_1 R_{2.2} + P_2 R_{2.1}\right],\; \ldots,$$
$$R_{2.0} = i_L^+(0^+) = i_L^+(0^-),\;\; R_{2.1} = L^{-1} R_{1.0},$$
$$R_{2.2} = L^{-1} R_{1.1},\; \ldots .$$

Преобразования, приводящие последовательно к результатам, описываемым равенствами (10)–(14), сопровождают выполнение каждого шага расчета нелинейной автономной динамической модели (9). Численная часть аналитически-

Результаты расчета нелинейной автономной динамической модели (9)
The calculation results of nonlinear autonomous dynamic model (9)

Параметр	Значение					
t	0	0.400913	1.006496	1.247571	1.818210	2.041508
h	0.105922	0.085466	0.112962	0.0138348	0.082483	0.060436
	Результаты расчета					
I_1	7	7	7	7	7	7
$u_C^+(t;I_1)$	2	1.776366	1.859170	1.906583	1.741334	1.540498
$\left\|\Delta u_C^+(t;I_1)\right\| \cdot 10^{-3}$	0	0,210424	0.509228	0.613566	0.874628	1.01458
I_2	7	8	8	8	8	8
$i_L^+(t;I_2)$	3	3.751662	4.837544	5.29074	6.358791	6.729311
$\left\|\Delta i_L^+(t;I_2)\right\| \cdot 10^{-3}$	0	0.367111	0.443675	0.473912	0.562118	0.621708

численного метода, включая оценку возникающих погрешностей, полностью соответствует его стандартной расчетной схеме.

Выборочные результаты расчета нелинейной автономной динамической модели (9) в интервале исследования $[0; 2.041508]$ при заданных предначальных условиях и предельных уровнях абсолютных локальных погрешностей расчета $\varepsilon_r(h) = 1 \cdot 10^{-4}$, r = 1, 2 приведены в таблице, где использованы следующие обозначения: t – абсциссы начал вынесенных в таблицу шагов расчета h; $u_C^+(t;I_1)$, $i_L^+(t;I_2)$ – приближенные значения искомых решений, полученные в результате замены на каждом шаге расчета числовых рядов (14) при $t = h$ их частичными суммами, порядки I_r которых обеспечивают непревышение локальными погрешностями расчета их заданных предельных уровней $\varepsilon_r(h) = 1 \cdot 10^{-4}$; $\left|\Delta u_C^+(t;I_1)\right|$, $\left|\Delta i_L^+(t;I_2)\right|$ – верхние оценки абсолютных полных погрешностей расчета приближенных значений решений, процедура вычисления которых приведена в [9].

Результатом расчета нелинейной автономной динамической модели (9) с синусоидальной нелинейностью служат одномерные области, определяемые в дискретные моменты времени. Эти области описываются двойными неравенствами, и они содержат неизвестные точные значения искомых решений. В рассматриваемом примере эти одномерные области имеют следующее описание:

$$u_C^+(t; I_1) - \left|\Delta u_C^+(t; I_1)\right| \le u_C^+(t) \le$$
$$\le u_C^+(t; I_1) + \left|\Delta u_C^+(t; I_1)\right|;$$

$$i_L^+(t; I_2) - \left|\Delta i_L^+(t; I_2)\right| \le i_L^+(t) \le$$
$$\le i_L^+(t; I_2) + \left|\Delta i_L^+(t; I_2)\right|.$$

С использованием указанных неравенств получены приближенные значения реакций $u_C(t)$, $i_L(t)$ цепи на нескольких шагах расчета, представленных в таблице.

Заключение. Предложен метод решения актуальной задачи численного расчета динамических моделей с нелинейностями, описываемыми нестепенными элементарными функциями. Задача сводится к формированию системы нелинейных дифференциальных уравнений, сопряженной к исходной системе уравнений (исходной модели). Сопряженная система приводится к обобщенной классической форме. Далее формируется система нелинейных дифференциальных уравнений, сопряженная к системе в обобщенной классической форме. Решениями последней сопряженной системы уравнений служат степенные ряды, описывающие границы одномерных областей, в которых заключены неизвестные точные решения исходной системы уравнений. Таким образом, с помощью двукратного сопряжения систем достигается главный результат, заключающийся в том, что, во-первых, используются готовые оценки искомых решений и, во-вторых, границами одномерных областей точных решений можно управлять, бесконечно близко приводя их к неизвестным точным решениям.

Предложенная процедура, сохраняя все преимущества аппарата степенных рядов, исключает необходимость использования композиций степенных рядов и повышает уровень формализации расчета нелинейной динамики на основе динамических моделей с нестепенными нелинейностями.

Список литературы

1. Никульчев Е. В. Геометрический подход к моделированию нелинейных систем по экспериментальным данным. М.: МГУП, 2007. 162 с.

2. Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 326 с.

3. Малинецкий Г. Г. Хаос, структуры, вычислительный эксперимент. Введение в нелинейную динамику. М.: Едиториал УРСС, 2002. 256 с.

4. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 318 с.

5. Васин В. В., Ряшко Л. Б. Элементы нелинейной динамики: от порядка к хаосу. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Ин-т комп. исследований, 2006. 164 с.

6. Лобанов А. И., Петров И. Б. Вычислительные методы для анализа моделей сложных динамических систем. М.: Изд-во МФТИ, 2000. 168 с.

7. Чуличков А. И. Математические методы нелинейной динамики. М.: Наука, 2000. 296 с.

8. Методы анализа нелинейных динамических моделей / М. Холодниок, А. Клич, М. Кубичек, М. Марек // М.: Мир, 1991. 368 с.

9. Бычков Ю. А., Соловьева Е. Б., Щербаков С. В. Непрерывные и дискретные нелинейные модели динамических систем. СПб.: Лань, 2018. 420 с.

10. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1980. 718 с.

11. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи / пер. с англ. И. А. Кульчицкой, С. С. Филиппова (ред.). М.: Мир, 1990. 512 с.

12. Гофен А. М. Быстрое разложение в ряд Тейлора и решение задачи Коши // Журн. вычисл. мат. и физ. 1982. Т. 22, № 5. С.13–22.

13. Гофен А. М. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений методом Тейлора и проблема шага: Препринт. М.: ИПИ АН СССР, 1991. 29 с.

14. Данилов Л. В., Соловьева Е. Б. Макромоделирование существенно нелинейных электрических цепей на основе функциональных полиномов // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1990. Т. 33, № 6. С. 3–7.

15. Соловьева Е. Б. Компенсация нелинейных искажений сигналов в каналах связи методом расщепления // Цифровая обработка сигналов. 2005, № 4. С. 2–8.

16. Solovyeva E. B. Piecewise-polynomial and cascade models of predistorter for linearization of power amplifier // Radioelectronics and Communications Systems. 2012. Vol. 55, no. 8. P. 375–380. doi: 10.3103/S0735272712080055.

17. Solovyeva E. B. Cascade structure of digital predistorter for power amplifier linearization // Radioengineering. 2015. Vol. 24, no. 4. December. P. 1071–1076. doi: 10.13164/re.2015.1071.

18. Введение в теоретическую электротехнику. Курс подготовки бакалавров: учеб. пособие / Ю. А. Бычков, В. М. Золотницкий, Е. Б. Соловьева, Э. П. Чернышев. СПб.: Лань, 2016. 288 с.

Информация об авторах

Бычков Юрий Александрович – д-р техн. наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина) ул. Профессора Попова, д. 5Ф, Санкт-Петербург, 197022, Россия.
E-mail: rimelena@yahoo.com

Соловьева Елена Борисовна – д-р техн. наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина) ул. Профессора Попова, д. 5Ф, Санкт-Петербург, 197022, Россия.
E-mail: selenab1@yandex.ru
http://orcid.org/0000-0001-8204-6632

Щербаков Сергей Валентинович – д-р техн. наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина) ул. Профессора Попова, д. 5Ф, Санкт-Петербург, 197022, Россия.
E-mail: gz52@pskovsobranie.ru

References

1. Nikul'chev E. V. Geometricheskij podhod k modelirovaniyu nelinejnyh sistem po eksperimental'-nym dannym: monografiya. M.: MGUP, 2007. 162 p. (In Russ.).

2. Malineckij G. G., Potapov A. B. Sovremennye problemy nelinejnoj dinamiki. M.: Editorial URSS, 2000. 326 p. (In Russ.).

3. Malineckij, G. G. Haos, struktury, vychislitel'nyj eksperiment. Vvedenie v nelinejnuyu dinamiku. M.: Editorial URSS, 2002. 256 p. (In Russ.).

4. Tabor M. Haos i integriruemost' v nelinejnoj dinamike. M.: Editorial URSS, 2001. 318 p. (In Russ.).

5. Vasin V. V., Ryashko L. B. Elementy nelinejnoj dinamiki: ot poryadka k haosu. Moskva–Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika»; In-t komp. issledovanij, 2006. 164 p. (In Russ.).

6. Lobanov A. I., Petrov I. B. Vychislitel'nye metody dlya analiza modelej slozhnyh dinamicheskih sistem. M.: Izd. MFTI, 2000. 168 p. (In Russ.).

7. CHulichkov A. I. Matematicheskie metody nelinejnoj dinamiki. M.: Nauka, 2000. 296 s. (In Russ.).

8. Holodniok M., Klich A., Kubichek M., Marek M. Metody analiza nelinejnyh dinamicheskih modelej. M.: Mir, 1991. 368 p. (In Russ.).

9. Bychkov YU. A., Solov'eva E. B., Shcherbakov S. V. Nepreryvnye i diskretnye nelinejnye modeli dinamicheskih sistem. SPb.: Lan, 2018. 420 p. (In Russ.).

10 Bronshtejn I. N., Semendyaev K. A. Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchihsya vtuzov. M.: Nauka, 1980. 718 p. (In Russ.).

11. Hajrer E., Nersett S., Vanner G. Reshenie obyknovennyh differencial'nyh uravnenij. Nezhyostkie zadachi / per. s angl. I. A. Kul'chickoj, S. S. Filippova (red.). M.: Mir, 1990. 512 p. (In Russ.).

12. Gofen A. M. Bystroe razlozhenie v ryad Tejlo-ra i reshenie zadachi Koshi // ZHurn. vychisl. mat. i fiz. 1982. T. 22, № 5. P. 13–22. (In Russ.).

13. Gofen A. M. Integrirovanie obyknovennyh differencial'nyh uravnenij metodom Tejlora i problema shaga: Preprint. M.: IPI AN SSSR, 1991. 29 p. (In Russ.).

14. Danilov L. V., Solov'eva E. B. Makromodelirovanie sushchestvenno nelinejnyh elektricheskih cepej na osnove funkcional'nyh polinomov // Izv. vuzov. Radioelektronika. 1990. T. 33, № 6. P. 3–7. (In Russ.).

15. Solov'eva E. B. Kompensaciya nelinejnyh iskazhenij signalov v kanalah svyazi metodom rasshchepleniya // Cifrovaya obrabotka signalov. 2005, № 4. P. 2–8. (In Russ.).

16. Solovyeva E. B. Piecewise-polynomial and cascade models of predistorter for linearization of power amplifier. // Radioelectronics and Communications Systems. 2012. Vol. 55, no. 8. P. 375–380. doi: 10.3103/S0735272712080055. (In Russ.).

17. Solovyeva E. B. Cascade structure of digital predistorter for power amplifier linearization // Radioengineering. 2015. Vol. 24, no. 4. December. P. 1071–1076. doi: 10.13164/re.2015.1071.

18. Vvedenie v teoreticheskuyu elektrotekhniku. Kurs podgotovki bakalavrov: Uchebnoe posobie / YU. A. Bychkov, V. M. Zolotnickij, E. B. Solov'eva, E. P. CHernyshev. SPb.: Lan', 2016. 288 s. (In Russ.).

Information about the authors

Yuri A. Bychkov – Dr Sci. (Eng.), Professor of Saint Petersburg Electrotechnical University, Professor Popov str., 5F, Saint Petersburg, 197022, Russia.
E-mail: rimelena@yahoo.com

Elena B. Solovyeva – Dr Sci. (Eng.), Professor of Saint Petersburg Electrotechnical University, Professor Popov str., 5F, Saint Petersburg, 197022, Russia.
E-mail: selenab1@yandex.ru
http://orcid.org/0000-0001-8204-6632

Sergey V. Scherbakov – Dr Sci. (Eng.), Professor of Saint Petersburg Electrotechnical University, Professor Popov str., 5F, Saint Petersburg, 197022, Russia.
E-mail: gz52@pskovsobranie.ru

Статья поступила в редакцию 17.01.2022; принята к публикации после рецензирования 25.01.2022; опубликована онлайн 11.03.2022.

Submitted 17.01.2022; accepted 25.01.2022; published online 11.03.2022.