

УДК 378.147.88

Н. Г. Гоголева

*Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)*

В. Н. Миронов

*Санкт-Петербургский национальный исследовательский академический университет российской академии наук*

## **Моделирование процесса формирования собственных мод открытого резонатора при изучении физики лазеров**

*Представлены физическая и математическая модели, позволяющие исследовать формирование пространственной структуры излучения в резонаторе лазера. Представлены результаты моделирования для плоскопараллельного и конфокального резонаторов при различных числах Френеля. Компьютерная программа позволяет наблюдать, как лазерное излучение, первоначально имеющее случайное распределение амплитуды и фазы, при многократном распространении от одного зеркала к другому приобретает пространственную структуру, соответствующую стационарному распределению. Картины установившихся распределений интенсивности поля на зеркалах, а также графические зависимости амплитуды поля в какой-либо точке в зависимости от числа проходов от одного зеркала к другому могут быть выведены на печать. Численное моделирование проводится с помощью итерационного метода Фокса и Ли. Программа может быть использована при инженерном проектировании лазерных резонаторов для расчета распределения поля по поверхности зеркал и при проведении лабораторных работ и практических занятий студентами, изучающими физику лазеров. Удобный интерфейс позволяет студентам полностью сосредоточиться на изучении физических процессов.*

### **Резонаторы, численное моделирование, метод Фокса и Ли, виртуальные лабораторные работы**

В настоящее время большое внимание уделяется внедрению в образовательный процесс различных информационных технологий, среди которых использование виртуальных лабораторных работ, позволяющих сделать практические занятия более интересными, повышая при этом качество образования. Математические модели и современные методы вычислительной математики дают возможность максимально приблизить вычислительные эксперименты к натурным. Это позволяет, не проводя дорогостоящих физических экспериментов, предсказывать различные физические явления. В последние годы усилился интерес к дистанционному образованию, поскольку пройти курс обучения таким образом можно в любое время и без привязки к определенному месту. Виртуальные лабораторные работы также

могут выполняться дистанционно, однако они должны дополнять, а не заменять работу на реальном оборудовании. Во-первых, при выполнении виртуальных лабораторных работ не развиваются навыки проведения эксперимента. Если заменить все реальные лабораторные работы виртуальными, то на выходе мы получим специалиста, который не может работать с реальными объектами. Во-вторых, реальные лабораторные работы выполняются бригадами по 2–3 человека, формируя у студентов умение работать в коллективе. Виртуальные же лабораторные работы выполняются индивидуально и такого навыка не формируют, а значит, полное замещение реальных лабораторных работ виртуальными недопустимо. Тем не менее, компьютерный эксперимент

часто совершенно необходимо как дополнение натурального эксперимента.

Использование пакета «Resonator» наглядно демонстрирует формирование пространственной структуры излучения в оптическом резонаторе лазера. Программа используется студентами ФЭЛ СПбГЭТУ «ЛЭТИ» при изучении дисциплины «Физика лазеров». Ранее студентам предлагалось самостоятельно составлять программу в среде Matcad в рамках лабораторных занятий. Написание и отладка кода отнимали слишком много времени, не позволяя провести лабораторную работу в течение двух академических часов (одной пары). Это стало причиной создания (также в среде Matlab) программного пакета «Resonator» (св-во о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018663283, дата регистрации 24.10.2018). Дружественный интерфейс позволяет студентам полностью сосредоточиться на изучении физических процессов, не занимаясь написанием и отладкой кода.

**Теория Фокса и Ли. Плоскопараллельный резонатор.** В 1960–1961 гг. А. Фокс и Т. Ли разработали физическую и математическую модель, описывающую процесс формирования собственных мод открытого резонатора [1].

На рис. 1 изображены два плоских квадратных зеркала со сторонами  $2a$ , расположенных на расстоянии  $L$  друг от друга. Здесь  $P_1$  и  $P_2$  – произвольные точки первого и второго зеркал;  $x_1, y_1, x_2, y_2$  – координаты, характеризующие положение точки на зеркалах 1 и 2 соответственно;  $r$  – расстояние между точками  $P_1$  и  $P_2$ ;  $\theta$  – угол между нормалью к поверхности первого зеркала в точке  $P_1$  и отрезком  $P_1P_2$ . Пусть  $U_1$  – распределение поля на первом зеркале. Благодаря дифракции это распределение вызовет распределение поля  $U_2$  на зеркале 2, которое можно вычислить с помощью дифракционного интеграла Кирхгофа.

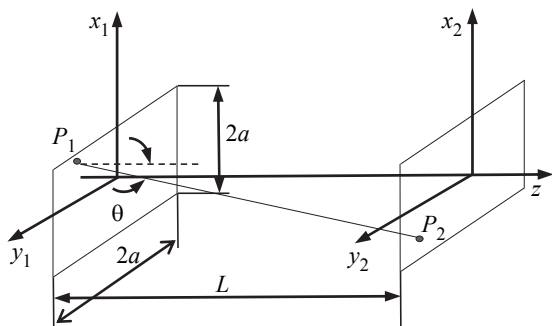


Рис. 1

Поле в произвольной точке  $P_2$  второго зеркала учитывает вклад от всех точек первого зеркала и определяется как

$$U_2(P_2) = -\frac{i}{2\lambda} \int_1 \frac{U_1(P_1) \exp(ikr) (1 + \cos \theta) dS_1}{r}, \quad (1)$$

где  $k = 2\pi/\lambda$ ,  $\lambda$  – длина волны падающего излучения;  $dS_1$  – элемент поверхности в точке  $P_1$ .

Рассмотрим распределение поля  $U$ , соответствующее моде резонатора. В этом случае снова распределение поля на зеркале 2, вычисленное по формуле (1), должно быть равно  $U$  с точностью до некоторого постоянного множителя. Тогда получаем

$$\sigma U(P_2) = -\frac{i}{2\lambda} \int_1 \frac{U(P_1) \exp(ikr) (1 + \cos \theta) dS_1}{r}, \quad (2)$$

где  $\sigma$  – постоянная величина, не зависящая от координат. Выражение (2) представляет собой однородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Собственные решения этого уравнения  $U$  определяют распределения поля на зеркалах резонатора, соответствующие его модам. Введем некоторые допущения. Пусть  $L \gg a$ , тогда

$$N = a^2/(L\lambda) \ll (L/a)^2, \quad (3)$$

где  $L$  – расстояние между зеркалами;  $2a$  – поперечный размер зеркал;  $N = a^2/(L\lambda)$  – число Френеля. При выполнении допущений (3) уравнение (2) существенно упрощается и после перехода к безразмерным переменным  $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$  может быть переписано в виде

$$\sigma^* U(\xi_2, \eta_2) = -i \int_1 U(\xi_1, \eta_1) \times \exp\left\{i\pi\left[(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2\right]\right\} d\xi_1 d\eta_1, \quad (4)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  – безразмерные переменные, характеризующие положение точки на зеркале, индексы 1 и 2 обозначают номер зеркала;  $\sigma^*$  – постоянная величина;

$$\begin{aligned} \xi_1 &= (\sqrt{N}/a)x_1, & \eta_1 &= (\sqrt{N}/a)y_1; \\ \xi_2 &= (\sqrt{N}/a)x_2, & \eta_2 &= (\sqrt{N}/a)y_2; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\sigma^* = \sigma \exp(-ikL).$$

Для зеркал квадратной или прямоугольной формы возможно разделение переменных и функцию  $U(\xi, \eta)$  можно представить в виде произведения более простых функций  $U^\xi(\xi)$  и  $U^\eta(\eta)$ :

$$U(\xi, \eta) = U_\xi(\xi)U_\eta(\eta), \quad \sigma^* = \sigma_\xi^* \sigma_\eta^*.$$

Тогда из (4) получаем два уравнения:

$$\sigma_\xi^* U_\xi(\xi_2) = \exp[-i(\pi/4)] \times \int_{-\sqrt{N}}^{+\sqrt{N}} U_\xi(\xi_1) \exp[i\pi(\xi_1 - \xi_2)^2] d\xi_1, \quad (6)$$

$$\sigma_\eta^* U_\eta(\eta_2) = \exp[-i(\pi/4)] \times \int_{-\sqrt{N}}^{+\sqrt{N}} U_\eta(\eta_1) \exp[i\pi(\eta_1 - \eta_2)^2] d\eta_1. \quad (7)$$

Хотя интегральные уравнения (6)–(7) выглядят значительно проще, чем (2), они не имеют аналитического решения. В программе «Resonator» интегральные уравнения решаются численно. Задаются начальные условия (произвольное распределение поля у первого зеркала) и вычисляется поле у второго зеркала после первого прохода волны. Далее полученное распределение поля у второго зеркала используется для расчета поля у первого зеркала в результате второго прохода волны. Эти вычисления повторяются многократно для последующих проходов. Процесс заканчивается, когда форма распределения поля перестает меняться от прохода к проходу, т. е. первоначально случайное распределение приобретает пространственную структуру, соответствующую стационарному распределению. Полученное стационарное распределение будет собственным решением уравнений (6)–(7). Если начальное распределение поля представляет собой четную функцию  $\xi$ , то в конечном итоге получаем четную моду, а если начальное распределение было нечетной функцией  $\xi$ , – то нечетную моду.

**Конфокальный резонатор.** Введем некоторые допущения. Пусть оба зеркала имеют в поперечном сечении квадрат со стороной  $2a$ . Как и в плоскопараллельном резонаторе,  $L$  – расстояние между зеркалами,  $N$  – число Френеля. Если использовать допущения (3), то (2) в случае конфокального резонатора можно существенно упростить. После перехода к безразмерным переменным  $\xi$  и  $\eta$  уравнение (2) можно переписать в виде

$$\sigma^* U(\xi_2, \eta_2) = -i \int_1 U(\xi_1, \eta_1) \exp\{-i2\pi(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2)\} d\xi_1 d\eta_1.$$

Как и для случая плоскопараллельного резонатора,  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\sigma^*$  определяются выражением (5).

Разделяя переменные, получаем

$$\sigma_\xi^* U_\xi(\xi_2) = \exp[-i(\pi/4)] \times \int_{-\sqrt{N}}^{+\sqrt{N}} U_\xi(\xi_1) \exp(-i2\pi\xi_1\xi_2) d\xi_1,$$

$$\sigma_\eta^* U_\eta(\eta_2) = \exp[-i(\pi/4)] \times \int_{-\sqrt{N}}^{+\sqrt{N}} U_\eta(\eta_1) \exp(-i2\pi\eta_1\eta_2) d\eta_1.$$

Если же  $N \gg 1$ , собственные функции можно найти из аналитических выражений

$$U_{xm}(x) = H_m \left[ x \left( \frac{2\pi}{L\lambda} \right)^{1/2} \right] \exp \left[ - \left( \frac{\pi}{\lambda L} \right) x^2 \right],$$

$$U_{yl}(y) = H_l \left[ y \left( \frac{2\pi}{L\lambda} \right)^{1/2} \right] \exp \left[ - \left( \frac{\pi}{\lambda L} \right) y^2 \right],$$

где  $H_l$  и  $H_l$  – полиномы Эрмита  $m$ -го и  $l$ -го порядков, переменные  $x$  и  $y$  характеризуют положение точки на зеркале (рис. 1). Числа  $m$  и  $l$  соответствуют индексам моды  $TEM_{ml}$ . Полная собственная функция записывается в виде

$$U_{ml}(x, y) = H_m H_l \exp \left[ - \left( \frac{\pi}{\lambda L} \right) (x^2 + y^2) \right].$$

**Описание работы программы.** Дружественный интерфейс дает студентам возможность полностью сосредоточиться на изучении процессов формирования стационарного распределения поля в резонаторе. Пакет позволяет изучать формирование поля в плоскопараллельном и конфокальном резонаторах. При запуске программы появляется окно, предлагающее выбрать тип резонатора; при выборе плоскопараллельного резонатора – окно, в котором предлагается ввести исходные данные, – число Френеля и тип моды (рис. 2).

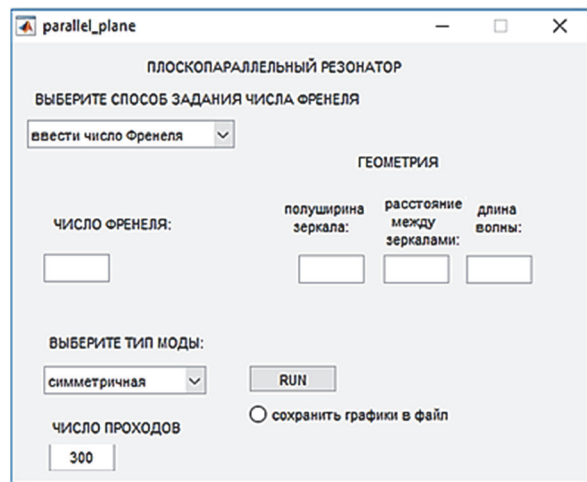


Рис. 2

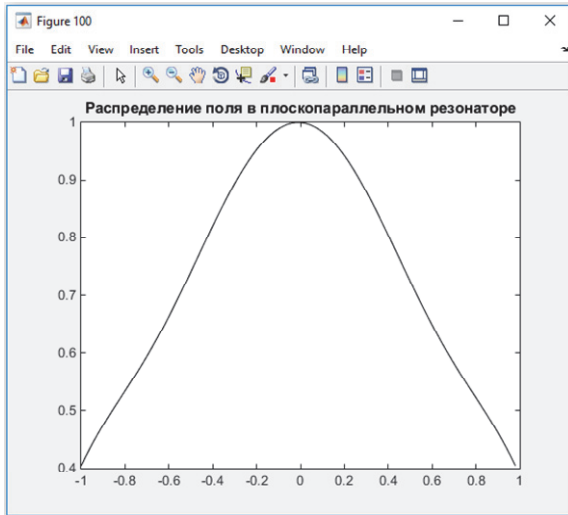


Рис. 3

Число Френеля можно ввести непосредственно или рассчитать из геометрии резонатора. Введенные данные контролируются на соответствие их физическому смыслу. Если они выходят из области значений, допустимых для расчета, появляется соответствующее сообщение. На рис. 3 представлено распределение амплитуды симметричной моды низшего порядка для числа Френеля:  $N = 0.6$ . По горизонтальной оси отложены безразмерные координаты, рассчитанные по (5), по вертикальной оси – нормированные значения амплитуды.

Программа дает возможность вывести амплитуду поля в какой-либо точке в зависимости от числа проходов, наглядно демонстрируя, что после определенного числа проходов поле перестает меняться, т. е. достигается стационарное распределение. Пример такого распределения представлен на рис. 4 (симметричная мода низшего порядка,  $N = 7$ ).

Результаты расчета могут быть записаны в файл и выведены на печать.

При выборе конфокального резонатора появляется окно ввода данных для расчета конфокального резонатора. Пример стационарного распределения поля в конфокальном резонаторе представлен на рис. 5 (симметричная мода низшего порядка,  $L = 0.5$  м,  $\lambda = 0.6$  мкм,  $N = 10$ ). По горизонтальной оси отложены безразмерные координаты, рассчитанные по (5), по вертикальной – нормированные значения амплитуды.

Таким образом, программа позволяет:

- выбрать тип оптического резонатора (плоскопараллельный или конфокальный) и ввести соответствующий набор параметров;

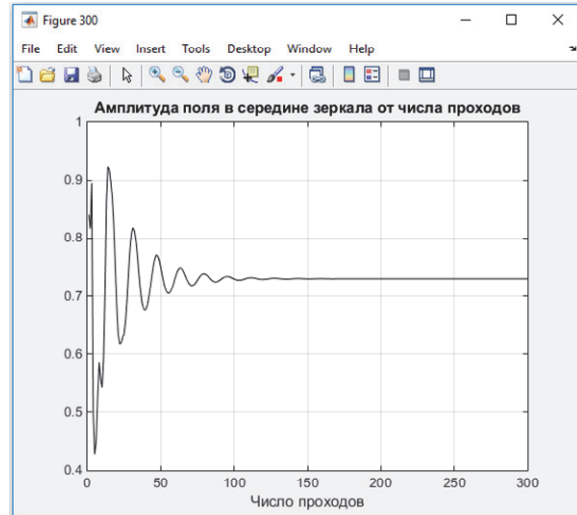


Рис. 4

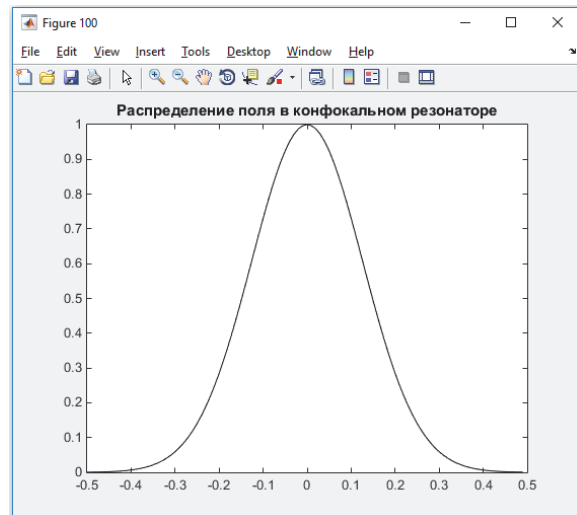


Рис. 5

- наблюдать, как лазерное излучение, имеющее первоначально случайное распределение амплитуды и фазы, при многократном распространении от одного зеркала к другому приобретает пространственную структуру, соответствующую стационарному распределению;

- наблюдать на экране и распечатать на принтере графики установившихся распределений интенсивности поля на поверхности зеркал, а также графики зависимости амплитуды поля в какой-либо точке в зависимости от числа проходов.

Программа может быть использована студентами при изучении физики лазеров в рамках лабораторных работ и практических занятий. Далее она может быть дополнена решением других задач. Относительная простота работы в Matlab позволяет предложить выполнение этих задач студентам в рамках написания выпускной квалификационной работы (ВКР). Например, можно

провести расчет для круглых зеркал. В этом случае моделирование проводится аналогично случаю прямоугольных зеркал, но уравнения (2) удобнее записать в цилиндрических координатах. Эта задача может быть решена в рамках выпускной работы для бакалавров. При написании магистерской работы программу можно усложнить, введя в резонатор дополнительный элемент. Так, было бы интересно исследовать изменение модовой структуры введением в резонатор жидкокристаллической ячейки. Возникновение акустической волны в жидком кристалле под действием излучения способно изменять пространственную структуру электромагнитного поля. Например, если изначально распространяется мода  $TEM_{00}$  с максимумом излучения в центре, то при прохождении через жидкий кристалл она сильнее всего воздействует на его центральную часть. Эта часть нагревается, и возникает цилиндрическая акустическая волна. Распространяясь, она меняет свойства кристалла (в частности, коэффициент рассеяния) и тем самым изменяет распределение интенсивности на зеркалах. Также возможно расширение программы введением в модель активной среды,

помещенной между зеркалами. В рамках ВКР для бакалавров описание усиления можно проводить упрощенной формулой [2]

$$g(I) = \frac{g_0}{1 + I/I_S},$$

где  $g$  – зависящий от интенсивности коэффициент усиления;  $g_0$  – усиление слабого сигнала;  $I$  – интенсивность излучения;  $I_S$  – интенсивность насыщения. В рамках написания магистерской работы описание усиления возможно решением системы кинетических уравнений для заселенностей уровней совместно с уравнением переноса излучения через среду. В этом случае целесообразно рассмотреть два случая – когда активная среда работает по 3-уровневой или 4-уровневой схеме.

Таким образом, возможно расширение программы рассмотрением другой формы зеркал и введением в резонатор дополнительных элементов. Часть этих задач можно решить силами студентов.

Также при некоторой доработке программа может быть использована в онлайн-курсах в рамках дистанционной формы образования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Звелто О. Принципы лазеров. М.: Мир, 1990. 558 с.

2. Пихтин А. Н. Оптическая и квантовая электроника. М.: Высш. шк., 2001. 573 с.

N. G. Gogoleva

*Saint Petersburg Electrotechnical University «LETI»*

V. N. Mironov

*Saint Petersburg National Research Academic University of the Russian Academy of Sciences*

## OPEN RESONATOR OWN MODES FORMATION MODELLING IN THE STUDY OF LASER PHYSICS

*Physical and mathematical model allowing to investigate the formation of the spatial structure of radiation in a laser resonator is presented. The simulation results for plane-parallel and confocal resonators at various Fresnel numbers are presented. A computer program makes it possible to observe how laser radiation, having an initially random amplitude and phase distribution, with repeated propagation from one mirror to another, acquires a spatial structure corresponding to a stationary distribution. Steady-state field intensity distributions on the mirrors, as well as graphical dependences of the field amplitude at any point depending on the number of passes from one mirror to another, can be printed. Numerical simulation is performed using the iterative method of Fox and Lee. The program can be used in the engineering design of laser resonators for calculating the field distribution over the surface of the mirrors and in carrying out laboratory work and practical exercises in the study of laser physics by students. The user-friendly interface allows students to fully concentrate on studying physical processes.*

**Resonators, numerical simulation, Fox and Lee method, virtual labs**